This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

Über dieses Buch

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

Nutzungsrichtlinien

Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

+ *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.

+ *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.

+ *Beibehaltung von Google-Markenelementen* Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.

+ *Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität* Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

Über Google Buchsuche

Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter `http://books.google.com` durchsuchen.

Stanford University Libraries
3 6105 001 363 436

INSTITUTE OF MATHEMATICAL STATISTICS
LIBRARY

Mittheilungen

der

athematischen Gesellschaft

in

Hamburg.

Band IV, Heft 1.

Ausgegeben im Februar 1901.

Redigirt von Hepsold, Schröder und Busche.

STANFORD LIBRARY

Druck von B. G. Teubner in Leipzig.

1901.

343445

Mittheilungen

der

Mathematischen Gesellschaft

in Hamburg.

Bd. IV. № 1. Ausgegeben im Februar 1901.

Beweis, dafs die unendliche Reihe

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} \left(\frac{P}{n}\right) \frac{1}{n}$$

einen positiven von Null verschiedenen Wert hat.

Von H. Teege.

In einer in der Akademie der Wissenschaften zu Berlin am 27. Mai 1841 gelesenen Abhandlung spricht Dirichlet von einer eigentümlichen Schwierigkeit, die sich ihm beim Beweise des Satzes entgegengestellt habe, dafs in jeder arithmetischen Reihe, deren erstes Glied und deren Differenz keinen gemeinschaftlichen Faktor haben, eine unendliche Menge von Primzahlen vorkomme. Nachdem er erzählt hat, dafs ihm erst nach Verlassen des ursprünglich von Legendre eingeschlagenen Weges ein strenger Beweis geglückt sei und zwar durch ähnliche Betrachtungen, wie sie Euler in dem Kapitel De seriebus ex evolutione productorum ortis seiner Introductio in analysin infinitorum angestellt habe, fährt er fort: „Sobald man den eben angedeuteten Weg betreten hat, scheint sich der Beweis mit der gröfsten Leichtigkeit und, so zu sagen, ganz von selbst zu gestalten; allein bei aufmerksamer Betrachtung bemerkt man eine Schwierigkeit, ohne deren Beseitigung das Verfahren ganz illusorisch werden oder doch nur auf bestimmte Fälle anwendbar sein würde. Diese Schwierigkeit besteht in der für den Erfolg unerläfslichen Nachweisung, dafs die Summen gewisser Reihen, deren Konvergenz leicht einzusehen ist, von der Null verschieden sind, und hat nicht etwa, wie man zunächst vermuten sollte, ihren Grund in der Unmöglichkeit die Summation auszuführen. Diese Operation ist viel-

mehr in allen Fällen leicht zu bewerkstelligen; allein der endliche Ausdruck, welchen man dadurch erhält, gewährt keine Erleichterung für die geforderte Nachweisung, und es ist im allgemeinen eben so schwer aus der Summe in endlicher Form zu erkennen, dafs sie von Null verschieden ist, als dies bei der ursprünglichen Reihe der Fall war. Nach mancherlei fruchtlosen Versuchen war es zwar gelungen, die erwähnte Schwierigkeit vollständig zu überwinden; doch waren die Betrachtungen, zu welchen man seine Zuflucht zu nehmen genötigt war, so kompliziert und indirekt, dafs sie nur wenig befriedigen konnten und die Auffindung eines kürzeren und der Natur der Sache mehr entsprechenden Verfahrens sehr wünschenswert machen mufsten."

Wiederholte auf diesen Gegenstand gerichtete Bemühungen führten dann Dirichlet zu einer seiner glänzendsten Entdeckungen, nämlich des Zusammenhanges zwischen der Klassenzahl der quadratischen Formen und den oben erwähnten Reihen; nach Auffindung dieses einfacheren Weges hat dann Dirichlet seinen ersten Beweis ganz unterdrückt und in seinen sämtlichen Veröffentlichungen findet sich auch nicht die leiseste Andeutung über die Art und Weise, wie er ursprünglich jene Schwierigkeit aus dem Wege geräumt hat. Unter diesen Umständen dürfte es daher nicht unwillkommen sein, wenn im folgenden noch ein weiterer Beweis gegeben wird, der insofern noch einfacher als der Dirichlet'sche ist, als er der Theorie der quadratischen Formen nicht mehr bedarf. Es handelt sich um den Nachweis, dafs die unendliche Reihe

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} \left(\frac{P}{n}\right) \frac{1}{n},$$

wo $\left(\frac{P}{n}\right)$ das Jacobi'sche Symbol bedeutet, einen positiven von Null verschiedenen Wert hat.

Wir betrachten den Ausdruck

$$\sum (-1)^{f(\nu)} \cdot \nu,$$

wo ν sämtliche Teiler der Zahl n (mit Einschlufs von 1 und n) bezeichnet und $f(\nu)$ gleich der Anzahl der gleichen oder verschiedenen Primfaktoren ist, deren Produkt gleich ν ist, wobei aber die Zahl 1 nicht als Faktor mitgezählt werden darf. Schreiben wir dann diesen Summenausdruck für die aufeinander folgenden ganzen Zahlen auf, so erhalten wir der Reihe nach:

$n = 1 : 1$
$n = 2 : 1 - 2$
$n = 3 : 1 \quad - 3$
$n = 4 : 1 - 2 \quad + 4$
$n = 5 : 1 \quad - 5$
$n = 6 : 1 - 2 - 3 \quad + 6$
$n = 7 : 1 \quad - 7$
$n = 8 : 1 - 2 \quad + 4 \quad - 8$
$n = 9 : 1 \quad - 3 \quad + 9$
$n = 10 : 1 - 2 \quad - 5 \quad + 10$
$n = 11 : 1 \quad - 11$
$n = 12 : 1 - 2 - 3 + 4 \quad + 6 \quad - 12$

u. s. w.

Für das folgende ist aber nicht die Bestimmung der Summen selbst nötig, sondern nur eine Abzählung der Glieder, wobei aber für einen jeden Teiler $+ 1$ oder $- 1$ gezählt werden soll, je nachdem er in dem obigen Schema das positive oder negative Vorzeichen hat. Auf diese Weise erhalten wir, wenn wir bei $n = m$ abbrechen, den Ausdruck

$$\left[\frac{m}{1}\right] - \left[\frac{m}{2}\right] - \left[\frac{m}{3}\right] + \left[\frac{m}{4}\right] - \left[\frac{m}{5}\right] + \left[\frac{m}{6}\right] - \left[\frac{m}{7}\right] - \left[\frac{m}{8}\right] + \left[\frac{m}{9}\right] \cdots\cdots \pm \left[\frac{m}{m}\right],$$

wo $\left[\frac{m}{n}\right]$ die gröfste in dem Bruche $\frac{m}{n}$ enthaltene ganze Zahl bezeichnet.

Die allgemeine Zahl n habe nun in ihre Primfaktoren zerlegt die Form

$$n = \pi_1^{\nu_1} \cdot \pi_2^{\nu_2} \cdot \pi_3^{\nu_3} \cdot \cdots \cdot \pi_r^{\nu_r}.$$

Dann wird, wie man unschwer beweist, die in der eben angegebenen Weise abgezählte $n$te Horizontalreihe des obigen Schemas gleich

$$\prod_{\nu=\nu_1}^{\nu=\nu_r} (1 + (-1)^1 + (-1)^2 + (-1)^3 + \cdots (-1)^\nu),$$

also stets gleich 0, ausser wenn n eine Quadratzahl ist, in welchem Falle die betreffende Horizontalreihe gleich 1 wird. Somit ergiebt sich unmittelbar, dafs

$$(1) \quad \left[\frac{m}{1}\right] - \left[\frac{m}{2}\right] - \left[\frac{m}{3}\right] + \left[\frac{m}{4}\right] - \left[\frac{m}{5}\right] + \left[\frac{m}{6}\right] + \cdots\cdots \pm \left[\frac{m}{m}\right] = \left[\sqrt{m}\right]$$

sein muss.

Sondert man nun auf der linken Seite alle Glieder aus, die durch die Primzahl p teilbar sind, so ist die Summe der übrig bleibenden Glieder, da

$$-\left[\frac{m}{p}\right]+\left[\frac{\frac{m}{p}}{2}\right]+\left[\frac{\frac{m}{p}}{3}\right]-\left[\frac{\frac{m}{p}}{4}\right]+\cdots\cdots=-\left[\sqrt{\frac{m}{p}}\right]$$
$$=-\left[\frac{m}{p}\right]+\left[\frac{m}{2p}\right]+\left[\frac{m}{3p}\right]-\left[\frac{m}{4p}\right]+\cdot-\cdots$$

ist, gleich $\left[\sqrt{m}\right]+\left[\sqrt{\frac{m}{p}}\right]$.

Fährt man in dieser Weise fort und sondert aus den übrig gebliebenen Gliedern die durch p_1 teilbaren, dann die durch p_2 teilbaren u. s. w. ab, d. h. sämtliche Glieder, die durch irgend einen der Primfaktoren p, p_1, p_2, ... p_r der ungeraden zusammengesetzten Zahl P teilbar sind, so erhält man nach einigen Reduktionen:

$$(2)\quad \left[\frac{m}{1}\right]-\left[\frac{m}{2}\right]-\left[\frac{m}{3}\right]+\left[\frac{m}{4}\right]-\left[\frac{m}{5}\right]+\left[\frac{m}{6}\right]\cdots\cdots+\left[\frac{m}{m}\right]=\left[\sqrt{m}\right]$$
$$+\left[\sqrt{\frac{m}{p}}\right]+\left[\sqrt{\frac{m}{p_1}}\right]+\left[\sqrt{\frac{m}{p_2}}\right]+\cdots\cdots\left[\sqrt{\frac{m}{p_r}}\right]$$
$$+\left[\sqrt{\frac{m}{p\cdot p_1}}\right]+\left[\sqrt{\frac{m}{p\cdot p_2}}\right]+\left[\sqrt{\frac{m}{p\cdot p_3}}\right]+\cdots\cdots$$
$$+\left[\sqrt{\frac{m}{p\cdot p_1\cdot p_2}}\right]+\cdots\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$+\left[\sqrt{\frac{m}{p\cdot p_1\cdot p_2\cdots p_r}}\right],$$

wo aber links in den Nennern nur relative Primzahlen zu P vorkommen dürfen und rechts in den einzelnen Horizontalreihen die Kombinationen ohne Wiederholung zu 1, zu 2, zu 3 u. s. w. für sämtliche Primzahlen p, p_1, p_2, p_3, ... p_r zu bilden sind.

So ist z. B. für $P=15$ und $m=20$

$$\left[\frac{20}{1}\right]-\left[\frac{20}{2}\right]+\left[\frac{20}{4}\right]-\left[\frac{20}{7}\right]-\left[\frac{20}{8}\right]-\left[\frac{20}{11}\right]-\left[\frac{20}{13}\right]+\left[\frac{20}{14}\right]+\left[\frac{20}{16}\right]-\left[\frac{20}{17}\right]-\left[\frac{20}{19}\right]$$
$$=9=\left[\sqrt{20}\right]+\left[\sqrt{\frac{20}{3}}\right]+\left[\sqrt{\frac{20}{5}}\right]+\left[\sqrt{\frac{20}{15}}\right].$$

Wir bedienen uns nun der Abkürzung

$$\left[\frac{m}{1}\right]-\left[\frac{m}{2}\right]-\left[\frac{m}{3}\right]+\left[\frac{m}{4}\right]-\left[\frac{m}{5}\right]+\cdots\cdots\pm\left[\frac{m}{m}\right]$$
$$=\left[\sqrt{m}\right]+\sum_{1}\left[\sqrt{\frac{m}{p}}\right]+\sum_{2}\left[\sqrt{\frac{m}{p\cdot p_1}}\right]+\sum_{3}\left[\sqrt{\frac{m}{p\cdot p_1\cdot p_2}}\right]$$
$$+\cdots\cdots+\sum_{r}\left[\sqrt{\frac{m}{p\cdot p_1\cdots p_r}}\right]$$

und bilden dadurch, dafs wir für m der Reihe nach

$$\frac{m}{p'}, \frac{m}{p''}, \frac{m}{p'''} \cdots\cdots$$

$$\frac{m}{p' \cdot p'}, \frac{m}{p' \cdot p''}, \frac{m}{p' \cdot p'''} \cdots$$

$$\frac{m}{p' \cdot p' \cdot p'}, \frac{m}{p' \cdot p' \cdot p''}, \frac{m}{p' \cdot p'' \cdot p'''} \cdots\cdots$$

u. s. w.

setzen, die entsprechenden Ausdrücke, wobei wir aber unter $p', p'', p''' \cdots$ nur solche Primzahlen verstehen wollen, für welche das Legendre'sche Symbol

$$\left(\frac{P}{p'}\right) = \left(\frac{P}{p''}\right) = \left(\frac{P}{p'''}\right) = \cdots = 1$$

ist.

Jede dieser Reihen multiplizieren wir mit $2^{\psi(\nu)}$, wo $\psi(\nu)$ die Anzahl der im Nenner des Anfangsgliedes der betreffenden Reihe vorkommenden verschiedenen Primfaktoren ist, und addieren die unter einander stehenden Reihen.

Da aber dieser Fortgang des Beweises am besten an einem Zahlenbeispiele erläutert wird, wollen wir wie oben $P = 15$ und $m = 20$ nehmen. Die Primzahlen, für welche $\left(\frac{P}{p}\right) = 1$ ist, sind dann 2, 7, 11, 17. Wir haben somit (s. Zusammenstellung nächste Seite)

Eine aufmerksame Betrachtung zeigt nun, dafs die Koeffizienten der links unter einander stehenden Glieder mit demselben Nenner gleich den Entwickelungsgliedern von

$$\varepsilon \cdot \prod_{\nu=\nu_1}^{\nu=\nu_r} (1 + (-1)^1 2 + (-1)^2 2 + (-1)^3 2 + \cdots + (-1)^\nu 2)$$

sind, wenn der betreffende Nenner die Primzahlen $p', p'', p''' \ldots$, von denen P quadratischer Rest ist, als Faktoren in den höchsten Potenzen $\nu_1, \nu_2, \nu_3 \ldots$ enthält und ε gleich dem Vorzeichen ist, mit welchem das zu dem betreffenden Nenner gehörige Glied in der ersten Horizontalreihe vorkommt. Hieraus schliefst man dann leicht, dafs die Summe der unter einander stehenden Koeffizienten gleich dem Jacobi'schen Symbol $\left(\frac{P}{n}\right)$ ist, wo n der betreffende Nenner ist, so dafs wir für die linke Seite auch

$$\left[\frac{20}{1}\right] + \left(\frac{P}{2}\right)\left[\frac{20}{2}\right] + \left(\frac{P}{3}\right)\left[\frac{20}{3}\right] + \left(\frac{P}{4}\right)\left[\frac{20}{4}\right] + \cdots \left(\frac{P}{m}\right)\left[\frac{m}{m}\right]$$

schreiben können.

$$\left[\frac{20}{1}\right]-\left[\frac{20}{2}\right]+\left[\frac{20}{4}\right]-\left[\frac{20}{7}\right]-\left[\frac{20}{8}\right]-\left[\frac{20}{11}\right]-\left[\frac{20}{13}\right]+\left[\frac{20}{14}\right]+\left[\frac{20}{16}\right]-\left[\frac{20}{17}\right]-\left[\frac{20}{19}\right]=\left[\sqrt{20}\right]+\left[\sqrt{\frac{20}{3}}\right]+\left[\sqrt{\frac{20}{5}}\right]+\left[\sqrt{\frac{20}{15}}\right]=9$$

$$+2\left[\frac{20}{2}\right]-2\left[\frac{20}{4}\right]+2\left[\frac{20}{8}\right]-2\left[\frac{20}{14}\right]-2\left[\frac{20}{16}\right]=2\left[\sqrt{\frac{20}{2}}\right]+2\left[\sqrt{\frac{20}{2.3}}\right]+2\left[\sqrt{\frac{20}{2.5}}\right]=10$$

$$+2\left[\frac{20}{4}\right]-2\left[\frac{20}{8}\right]+2\left[\frac{20}{16}\right]=2\left[\sqrt{\frac{20}{4}}\right]+2\left[\sqrt{\frac{20}{4.3}}\right]+2\left[\sqrt{\frac{20}{4.5}}\right]=8$$

$$+2\left[\frac{20}{7}\right]-2\left[\frac{20}{14}\right]=2\left[\sqrt{\frac{20}{7}}\right]+2\left[\sqrt{\frac{20}{7.3}}\right]=2$$

$$+2\left[\frac{20}{8}\right]-2\left[\frac{20}{16}\right]=2\left[\sqrt{\frac{20}{8}}\right]=2$$

$$+2\left[\frac{20}{11}\right]=2\left[\sqrt{\frac{20}{11}}\right]=2$$

$$+4\left[\frac{20}{14}\right]=4\left[\sqrt{\frac{20}{14}}\right]=4$$

$$+2\left[\frac{20}{16}\right]=2\left[\sqrt{\frac{20}{16}}\right]=2$$

$$+2\left[\frac{20}{17}\right]=2\left[\sqrt{\frac{20}{17}}\right]=2$$

$$\left[\frac{20}{1}\right]+\left[\frac{20}{2}\right]+\left[\frac{20}{4}\right]+\left[\frac{20}{7}\right]+\left[\frac{20}{8}\right]+\left[\frac{20}{11}\right]-\left[\frac{20}{13}\right]+\left[\frac{20}{14}\right]+\left[\frac{20}{16}\right]+\left[\frac{20}{17}\right]-\left[\frac{20}{19}\right]=41$$

$$=\left[\sqrt{20}\right]+2\left[\sqrt{\frac{20}{2}}\right]+2\left[\sqrt{\frac{20}{4}}\right]+2\left[\sqrt{\frac{20}{7}}\right]+2\left[\sqrt{\frac{20}{8}}\right]+2\left[\sqrt{\frac{20}{11}}\right]+4\left[\sqrt{\frac{20}{14}}\right]+2\left[\sqrt{\frac{20}{16}}\right]+2\left[\sqrt{\frac{20}{17}}\right]$$
$$+\left[\sqrt{\frac{20}{3}}\right]+2\left[\sqrt{\frac{20}{3.2}}\right]+2\left[\sqrt{\frac{20}{3.4}}\right]+2\left[\sqrt{\frac{20}{3.7}}\right]$$
$$+\left[\sqrt{\frac{20}{5}}\right]+2\left[\sqrt{\frac{20}{5.2}}\right]+2\left[\sqrt{\frac{20}{5.4}}\right]$$
$$+\left[\sqrt{\frac{20}{15}}\right].$$

Der allgemeine Fall läfst sich in ganz ähnlicher Weise behandeln, so dafs wir durch eine einfache Verallgemeinerung erhalten:

$$
\begin{aligned}
&\left[\frac{m}{1}\right]+\left(\frac{P}{2}\right)\left[\frac{m}{2}\right]+\left(\frac{P}{3}\right)\left[\frac{m}{3}\right]+\left(\frac{P}{4}\right)\left[\frac{m}{4}\right]+\cdots+\left(\frac{P}{m}\right)\left[\frac{m}{m}\right]\\
&\quad=\left[\sqrt{m}\right]+\sum 2^{\psi(\nu)}\left[\sqrt{\frac{m}{\nu}}\right]\\
&\quad+\sum_{1}\left\{\left[\sqrt{\frac{m}{p}}\right]+\sum 2^{\psi(\nu)}\left[\sqrt{\frac{m}{p\cdot\nu}}\right]\right\}\\
(3)\qquad&\quad+\sum_{2}\left\{\left[\sqrt{\frac{m}{p\cdot p_1}}\right]+\sum 2^{\psi(\nu)}\left[\sqrt{\frac{m}{p\cdot p_1\cdot\nu}}\right]\right\}\\
&\quad+\sum_{3}\left\{\left[\sqrt{\frac{m}{p\cdot p_1\cdot p_2}}\right]+\sum 2^{\psi(\nu)}\left[\sqrt{\frac{m}{p\cdot p_1\cdot p_2\cdot\nu}}\right]\right\}\\
&\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\quad+\sum_{r}\left\{\left[\sqrt{\frac{m}{p\cdot p_1\cdot p_2\cdots p_r}}\right]+\sum 2^{\psi(\nu)}\left[\sqrt{\frac{m}{p\cdot p_1\cdot p_2\cdots p_r\cdot\nu}}\right]\right\},
\end{aligned}
$$

wo die ersten (markierten) Summenzeichen die frühere Bedeutung haben, während die nicht markierten Summenzeichen sich auf sämtliche ν erstrecken, die nur solche Primfaktoren q enthalten, für welche $\left(\frac{P}{q}\right)=+1$ ist.

Für das folgende ist wichtig, dafs P stets als eine durch kein Quadrat (aufser 1) teilbare Zahl angesehen werden kann. Denn ist z. B.

$$P=P_1\cdot S^2,$$

so ändert sich die linke Seite des Ausdruckes (3) nicht, wenn man statt P die durch kein Quadrat mehr teilbare Zahl P_1 setzt, da nach den Regeln über das Jacobi'sche Symbol

$$\left(\frac{P}{n}\right)=\left(\frac{P_1\cdot S^2}{n}\right)=\left(\frac{P_1}{n}\right)$$

ist.

Wir wollen also von jetzt ab unter P eine durch kein Quadrat mehr teilbare Zahl verstehen, und betrachten nun die Gleichung

$$x^2-P=\nu,$$

in der für x alle ganzen aufeinanderfolgenden Zahlen gesetzt werden sollen, für welche ν positiv und kleiner als m wird. ν enthält dann, wenn es relative Primzahl zu P ist, nur solche Primfaktoren q, für welche $\left(\frac{P}{q}\right)=1$ ist, mufs also in dem Summenausdruck (3) auf der

rechten Seite unter den Zahlen ν der ersten Horizontalreihe vorkommen. Wenn aber ν nicht relative Primzahl zu P ist, so kann es, wie der Anblick der Gleichung

$$x^2 - P = \nu$$

lehrt, wenigstens nicht das Quadrat irgend eines Teilers der Zahl P enthalten; für alle anderen Faktoren von ν aber, die relative Primzahlen zu P sind, ist P quadratischer Rest. ν kommt also auch in diesem Falle auf der rechten Seite des Summenausdruckes (3) vor, wenn auch nicht mehr in der ersten Horizontalreihe.

Somit finden sich, wenn man in

$$x^2 - P = \nu$$

für x alle ganzen Zahlen zwischen $\sqrt{P}$ und $\sqrt{m}$ setzt, die so erhaltenen Zahlen ν sämtlich auf der rechten Seite des Summenausdruckes (3) in den Nennern wieder, und man sieht leicht ein, dafs diese Seite stets gröfser ist als

$$\sum_{x=[\sqrt{P}]+1}^{x=[\sqrt{m}]} \sqrt{\frac{m}{x^2 - P}},$$

selbst wenn man für $\sqrt{\frac{m}{x^2 - P}}$ den genauen Wert und nicht mehr die gröfste in der Wurzel enthaltene ganze Zahl nimmt. Denn in jeder Horizontalreihe der rechten Seite von (3) hat jedes Glied mindestens den Koeffizienten 2 mit Ausnahme des ersten Gliedes, das den Koeffizienten 1 hat. Unter der Voraussetzung genügend grofser m kommt aber neben diesem ersten Gliede noch ein zweites, mindestens mit dem Faktor 2 versehenes Glied vor, das stets > 1 ist, so dafs unter diesen Umständen

$$\left[\frac{m}{1}\right] + \left(\frac{P}{2}\right)\left[\frac{m}{2}\right] + \left(\frac{P}{3}\right)\left[\frac{m}{3}\right] + \cdots \left(\frac{P}{m}\right)\left[\frac{m}{m}\right]$$

$$> \sum_{[\sqrt{P}]+1}^{[\sqrt{m}]} \sqrt{\frac{m}{x^2 - P}} > \sum_{[\sqrt{P}]+1}^{[\sqrt{m}]} \sqrt{\frac{m}{x^2}} = \sqrt{m} \sum_{[\sqrt{P}]+1}^{[\sqrt{m}]} \frac{1}{x}.$$

Der letzte Ausdruck ist aber gleich

$$\sqrt{m}\,\{\ln \sqrt{m} + R\},$$

wo R auch bei wachsendem m eine endliche stets angebbare Grenze nicht überschreitet. Somit

$$\left[\frac{m}{1}\right] + \left(\frac{P}{2}\right)\left[\frac{m}{2}\right] + \left(\frac{P}{3}\right)\left[\frac{m}{3}\right] + \left(\frac{P}{4}\right)\left[\frac{m}{4}\right] + \cdots \left(\frac{P}{m}\right)\left[\frac{m}{m}\right] \tag{4}$$

$$> \sqrt{m}\,\{\ln \sqrt{m} + R\}.$$

In der Reihe auf der linken Seite, die auch in gebräuchlicher Abkürzung

$$\sum \left(\frac{P}{n}\right)\left[\frac{m}{n}\right]$$

geschrieben werden kann, sollen die Zahlen n ihrer Gröfse nach auf einander folgen. Daher nimmt der Faktor $\left[\frac{m}{n}\right]$ fortwährend ab oder doch wenigstens nie zu und die Reihe bricht ab, sobald $n > m$ wird. Ferner zieht man aus dem Reciprozitätsgesetze in der Theorie der quadratischen Reste und aus der Verallgemeinerung desselben leicht die Folgerung, dass die Summe von je $8 \cdot \varphi(P)$ auf einander folgenden Werten des Faktors $\left(\frac{P}{n}\right)$ verschwindet, wo $\varphi(P)$ die Anzahl derjenigen Zahlen bezeichnet, die kleiner als P und relative Primzahlen zu P sind. Es ergiebt sich also, dafs die Summe von noch so vielen auf einander folgenden Werten von $\left(\frac{P}{n}\right)$ ihrem absoluten Werte nach die endliche nur von P abhängige Gröfse $\Delta = 8 \cdot \varphi(P)$ niemals übertrifft. Diese Bemerkungen lassen nun leicht erkennen, dafs die Summe aller auf das Glied

$$\left(\frac{P}{n}\right)\left[\frac{m}{n}\right]$$

folgenden Glieder absolut genommen kleiner als $\Delta \frac{m}{n}$ ist.

Ein ähnlicher Satz gilt auch für die unendliche Reihe

$$\sum \left(\frac{P}{n}\right)\frac{1}{n}$$

wie man leicht unter Benutzung eines Satzes beweist, der in Dirichlets Vorlesungen über Zahlentheorie, pag. 254, folgendermafsen formuliert ist:

Sind $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \ldots$ unendlich viele Konstanten von der Beschaffenheit, dafs die Summe

$$\beta_n = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \ldots + \alpha_n,$$

wie grofs auch n werden mag, ihrem absoluten Werte nach stets kleiner bleibt als eine feste Konstante C, so konvergiert die unendliche Reihe

$$\frac{\alpha_1}{1^s} + \frac{\alpha_2}{2^s} + \frac{\alpha_3}{3^s} + \ldots + \frac{\alpha_m}{m^s} + \ldots \; inf$$

für jeden positiven Wert des Exponenten s (excl. $s = 0$) und ist zugleich eine stetige Funktion von s. Die auf $\frac{\alpha_n}{n^s}$ folgenden Glieder sind kleiner als $\frac{2C}{n^s}$.

Es ergiebt sich also, dafs in der unendlichen Reihe

$$\sum \left(\frac{P}{n}\right) \frac{1}{n}$$

sämtliche auf $\left(\frac{P}{n}\right) \frac{1}{n}$ folgenden Glieder absolut genommen kleiner als $\frac{2\Delta}{n}$ sind.

Nach diesen Vorbereitungen betrachten wir die Differenz der beiden Reihen

$$\sum \left(\frac{l}{n}\right) \frac{m}{n} \text{ und } \sum \left(\frac{P}{n}\right) \left[\frac{m}{n}\right],$$

d. h.

$$\left\{\frac{m}{1} - \left[\frac{m}{1}\right]\right\} + \left(\frac{P}{2}\right) \left\{\frac{m}{2} - \left[\frac{m}{2}\right]\right\} + \left(\frac{P}{3}\right) \left\{\frac{m}{3} - \left[\frac{m}{3}\right]\right\} + \cdots\cdots + \left(\frac{P}{m}\right) \left\{\frac{m}{m} - \left[\frac{m}{m}\right]\right\}$$
$$+ \left(\frac{P}{m+1}\right) \frac{m}{m+1} + \left(\frac{P}{m+2}\right) \frac{m}{m+2} + \left(\frac{P}{m+3}\right) \frac{m}{m+3} + \ldots \, inf.$$

Jeder Klammerausdruck ist ein echter Bruch; die Summe der n ersten Glieder ist somit absolut genommen kleiner als n. Für die dann folgenden Glieder ist die Grenze, die nicht überschritten werden kann, soeben ermittelt worden, und es ergiebt sich so, dafs die obige Differenz dem absoluten Werte nach kleiner als

$$n + \frac{3\Delta m}{n}$$

sein mufs.

Für $n = \left[\sqrt{3\Delta m}\right]$ erlangt dieser Ausdruck seinen kleinsten Wert $2\left[\sqrt{3\Delta m}\right] + \delta$, wo $\delta < 2$ ist, und es ist die obige Differenz stets kleiner als $2\left[\sqrt{3\Delta m}\right] + \delta$.

Dividiert man also beide Seiten durch m, so wird bei unendlich wachsendem m die rechte Seite unendlich klein, und es ergiebt sich somit, dafs

$$\sum \left(\frac{P}{n}\right) \frac{1}{n} - \lim_{m=\infty} \frac{\sum \left(\frac{P}{n}\right) \left[\frac{m}{n}\right]}{m} = 0$$

$$\text{oder } \sum \left(\frac{P}{n}\right) \frac{1}{n} = \lim_{m=\infty} \frac{\sum \left(\frac{P}{n}\right) \left[\frac{m}{n}\right]}{m}$$

sein muss.

$\frac{\sum \left(\frac{P}{n}\right) \left[\frac{m}{n}\right]}{m}$ hat aber stets positive Werte, wie der Anblick der Formel (3) ergiebt, so dafs die unendliche Reihe $\sum \left(\frac{P}{n}\right) \frac{1}{n}$ jedenfalls positiv sein mufs, wenn sie nicht Null wird.

Dafs letzteres aber nicht der Fall sein kann, beweisen wir folgendermafsen. Da nämlich $\sum \left(\frac{P}{n}\right) \frac{1}{n}$ jedenfalls nicht negativ sein kann, so ist nach dem obigen

$$m \sum \left(\frac{P}{n}\right) \frac{1}{n} > \sum \left(\frac{P}{n}\right) \left[\frac{m}{n}\right] - | \, 2\sqrt{3\Delta m} + \delta \, |,$$

wo durch | | der absolute Wert des eingeklammerten Ausdrucks bezeichnet werden soll. Nach Formel (4) ist aber

$$\sum \left(\frac{P}{n}\right) \left[\frac{m}{n}\right] > \sqrt{m} \, \left\{\ln \sqrt{m} - R\right\},$$

daher

$$m \sum \left(\frac{P}{n}\right) \frac{1}{n} > \sqrt{m} \, \left\{\ln \sqrt{m} - R\right\} - | \, 2\sqrt{3\Delta m} + \delta \, |.$$

Von einem bestimmten zwar grofsen, aber doch endlichen Werte von m an ist aber die rechte Seite eine positive von Null verschiedene Gröfse; dasselbe mufs also auch mit der linken Seite, oder mit

$$\sum \left(\frac{P}{n}\right) \frac{1}{n}$$

der Fall sein, worin der zu beweisende Satz besteht.

Transformation der Kirchhoff'schen Gleichungen und Integration derselben für Kreiscylinderkoordinaten.

Von P. Jaerisch in Hamburg.

Kirchhoff hat in seiner Abhandlung „Über den Einfluſs der Wärmeleitung in einem Gase auf die Schallgeschwindigkeit“[1]) die hydrodynamischen Gleichungen mit Berücksichtigung von Reibung und Wärmeleitung aufgestellt. Er wendet die Formeln an zur Untersuchung der Luftschwingungen in Röhren mit kreisförmigem Querschnitt und gelangt zu einer Formel für die Schallgeschwindigkeit, welche in die früher von Helmholtz abgeleitete übergeht, falls die Wärmeleitungskonstante gleich Null gesetzt wird. Aber dieser theoretisch gewonnene Wert für die Schallgeschwindigkeit entspricht insofern nicht der Beobachtung, als die Abnahme der Geschwindigkeit

1) Kirchhoff, Gesammelte Abh. S. 540 u. Pogg. Ann. Bd. 134. 1868.

nach dieser Formel proportional r^{-1} und $n^{-\frac{1}{2}}$ ist, wo r den Radius der Röhre und n die Schwingungszahl bezeichnen, während die Verminderung der Schallgeschwindigkeit nach den Beobachtungen von Kundt[1]) und später von Schneebeli[2]) und Seebeck[3]) bei abnehmendem Radius erheblich schneller als das Reziproke des Radius wächst und eher mit $n^{-\frac{3}{2}}$ als mit $n^{-\frac{1}{2}}$ proportional ist.

Dieser Mangel an Übereinstimmung der Beobachtung mit der Theorie ist noch nicht aufgeklärt. Nun ist Kundt durch seine Versuche zu dem Resultat gelangt, dafs „alle beobachteten Änderungen der Schallgeschwindigkeit von Reibung herrühren und speziell von dem Austausche von Wärme zwischen Luft und den Wänden der Röhre". Diesem Ergebnis genügen die Kirchhoff'schen Gleichungen. Aber Kirchhoff transformiert und integriert seine Gleichungen, die er in ebenen Koordinaten aufstellt, für cylindrische Röhren mit kreisförmigem Querschnitt unter der Voraussetzung, dafs die Bewegung symmetrisch in Beziehung auf die Achse der Röhre verlaufe.

Es liegt daher nahe zu untersuchen, ob bei strengerer Integration der für kreisförmige Röhren geltenden Differentialgleichungen sich für die Schallgeschwindigkeit eine Formel ergiebt, welche den Beobachtungen besser entspricht.

Die Vorarbeit für eine solche Untersuchung soll in der folgenden Arbeit gegeben werden. In derselben werden die Kirchhoff'schen Gleichungen verallgemeinert, indem sie für ein rotierendes System aufgestellt werden. Die dann für Kreiscylinderkoordinaten erhaltenen Integralsysteme führen, wie noch gezeigt werden soll, für den von Kirchhoff behandelten speziellen Fall zu der oben erwähnten Formel für die Schallgeschwindigkeit.

1.

Die Transformation der Kirchhoff'schen Gleichungen in allgemeine orthogonale Koordinaten.

Die Kirchhoff'schen Gleichungen (a. o. a. O.) für die Bewegung eines Gases mit Berücksichtigung von Reibung und Wärmeleitung sind:

1) Monatsbericht der Berl. Ak. 19. Dez. 1867.
Pogg. Ann. CXXXV S. 337. 1868.
2) Pogg. Ann. CXXXVI S. 296. 1869.
3) Pogg. Ann. CXXXIX S. 104. 1870.

$$(1)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + b^2 \dfrac{\partial \sigma}{\partial x} + (a^2 - b^2) \dfrac{\partial \theta}{\partial x} = \mu_1 \Delta u - \mu_2 \dfrac{\partial^2 \sigma}{\partial x \partial t} \\ \dfrac{\partial v}{\partial t} + b^2 \dfrac{\partial \sigma}{\partial y} + (a^2 - b^2) \dfrac{\partial \theta}{\partial y} = \mu_1 \Delta v - \mu_2 \dfrac{\partial^2 \sigma}{\partial y \partial t} \\ \dfrac{\partial w}{\partial t} + b^2 \dfrac{\partial \sigma}{\partial z} + (a^2 - b^2) \dfrac{\partial \theta}{\partial z} = \mu_1 \Delta w - \mu_2 \dfrac{\partial^2 \sigma}{\partial z \partial t} \\ \dfrac{\partial \sigma}{\partial t} + \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial y} + \dfrac{\partial w}{\partial z} = 0 \\ \dfrac{\partial \theta}{\partial t} - \dfrac{\partial \sigma}{\partial t} = \mu_3 \Delta \theta \text{ [1]}. \end{cases}$$

Hier bezeichnen u, v, w die Komponenten der Geschwindigkeit eines Massenteilchen ins dem Punkte x, y, z zur Zeit t; θ und σ sind Funktionen, welche proportional den Zunahmen der Temperatur und der Dichtigkeit sind, gerechnet von der Temperatur und der Dichtigkeit im Zustande der Ruhe.

Zur Abkürzung ist

$$(2)\qquad \Delta F = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2}$$

gesetzt.

Die Gröfsen a und b sind Konstanten, von denen „a die Fortpflanzungsgeschwindigkeit bezeichnet, die der Schall haben würde, wenn die Reibung und Wärmeleitung keinen Einfluſs ausübte, und b die Schallgeschwindigkeit, die stattfinden würde, wenn überdies keine Temperaturänderungen infolge der Änderungen der Dichigkeit eintreten"; und zwar ist

$$(3)\qquad a = \sqrt{\frac{p_0 c'}{\varrho_0 c}} \text{ und } b = \sqrt{\frac{p_0}{\varrho_0}},$$

wo p_0, ϱ_0 Druck und Dichtigkeit im Zustande der Ruhe bezeichnen, und c die spezifische Wärme des Gases bei konstantem Volumen, c' bei konstantem Drucke sind.

Von den ferner auftretenden Konstanten μ_1, μ_2, μ_3 hängen μ_1 und μ_2 von der Reibung, μ_3 von der Wärmeleitung ab.

Zur Transformation der obigen Gleichungen in allgemeine orthogonale Koordinaten ϱ_1, ϱ_2, ϱ_3 wende ich die in meiner Arbeit: „Transformation der hydrodynamischen Gleichungen mit Berücksichtigung der Reibung" [2]) gewonnenen Resultate an. Dort ergab sich, daſs die Gleichungen [3]) (1), (2)

---

1) μ_1, μ_2, μ_3 gesetzt für μ', μ'', ν.

2) Bd. III S. 273 dieser Mitteilungen.

3) Von den quadratischen Gliedern der Geschwindigkeiten und von den äuſseren Kräften ist abgesehen; δ ist durch ϱ, θ durch λ ersetzt.

$$(4)\qquad \begin{cases} \varrho \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu_1 \Delta u + \mu_2 \frac{\partial \lambda}{\partial x}, \\ \varrho \frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu_1 \Delta v + \mu_2 \frac{\partial \lambda}{\partial y}, \\ \varrho \frac{\partial w}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \mu_1 \Delta w + \mu_2 \frac{\partial \lambda}{\partial z}, \end{cases}$$

wo

$$(5)\qquad \lambda = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}$$

ist, und wo u, v, w die gleiche Bedeutung wie in (1) haben, also

$$(6)\qquad u = \frac{\partial x}{\partial t}, \quad v = \frac{\partial y}{\partial t}, \quad w = \frac{\partial z}{\partial t},$$

übergehen in die Gleichungen:

$$(7)\qquad \begin{cases} \varrho \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{v_1}{h_1}\right) = -\frac{\partial p}{\partial \varrho_1} + (\mu_1 + \mu_2)\frac{\partial \lambda}{\partial \varrho_1} + \mu_1 \frac{h_2 h_3}{h_1}\left(\frac{\partial M_3}{\partial \varrho_2} - \frac{\partial M_2}{\partial \varrho_3}\right), \\ \varrho \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{v_2}{h_2}\right) = -\frac{\partial p}{\partial \varrho_2} + (\mu_1 + \mu_2)\frac{\partial \lambda}{\partial \varrho_2} + \mu_1 \frac{h_1 h_3}{h_2}\left(\frac{\partial M_1}{\partial \varrho_3} - \frac{\partial M_3}{\partial \varrho_1}\right), \\ \varrho \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{v_3}{h_3}\right) = -\frac{\partial p}{\partial \varrho_3} + (\mu_1 + \mu_2)\frac{\partial \lambda}{\partial \varrho_3} + \mu_1 \frac{h_2 h_1}{h_3}\left(\frac{\partial M_2}{\partial \varrho_1} - \frac{\partial M_1}{\partial \varrho_2}\right), \end{cases}$$

wo jetzt

$$(7\,a)\qquad \lambda = h_1 h_2 h_3 \left\{\frac{\partial}{\partial \varrho_1}\left(\frac{v_1}{h_2 h_3}\right) + \frac{\partial}{\partial \varrho_2}\left(\frac{v_2}{h_3 h_1}\right) + \frac{\partial}{\partial \varrho_3}\left(\frac{v_3}{h_1 h_2}\right)\right\}$$

ist, und wo v_1, v_2, v_3 die Geschwindigkeiten in den Richtungen der Normalen im Punkte x, y, z auf den neuen Koordinatenflächen mit den Parametern ϱ_1, ϱ_2, ϱ_3 sind, so dafs

$$(8)\qquad v_1 = \frac{1}{h_1}\frac{\partial \varrho_1}{\partial t}, \quad v_2 = \frac{1}{h_2}\frac{\partial \varrho_2}{\partial t}, \quad v_3 = \frac{1}{h_3}\frac{\partial \varrho_3}{\partial t}$$

ist, und wo ferner zur Abkürzung

$$(9)\qquad h_i^2 = \left(\frac{\partial \varrho_i}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varrho_i}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varrho_i}{\partial z}\right)^2$$

und

$$(10)\qquad \begin{cases} M_1 = \frac{h_2 h_3}{h_1}\left\{\frac{\partial}{\partial \varrho_3}\left(\frac{v_2}{h_2}\right) - \frac{\partial}{\partial \varrho_2}\left(\frac{v_3}{h_3}\right)\right\}, \\ M_2 = \frac{h_3 h_1}{h_2}\left\{\frac{\partial}{\partial \varrho_1}\left(\frac{v_3}{h_3}\right) - \frac{\partial}{\partial \varrho_3}\left(\frac{v_1}{h_1}\right)\right\}, \\ M_3 = \frac{h_1 h_2}{h_3}\left\{\frac{\partial}{\partial \varrho_2}\left(\frac{v_1}{h_1}\right) - \frac{\partial}{\partial \varrho_1}\left(\frac{v_2}{h_2}\right)\right\}, \end{cases}$$

gesetzt ist.

Nun unterscheiden sich die Gleichungen (4) von den Kirchhoffschen (1), abgesehen von dem Faktor ϱ, dadurch, dafs p an Stelle von $b^2\sigma + (a^2 - b^2)\theta$, λ an Stelle von $-\frac{\partial \sigma}{\partial t}$ getreten sind. Daher

nehmen die Kirchhoff'schen Gleichungen nach (7) in allgemeinen orthogonalen Koordinaten ϱ_1, ϱ_2, ϱ_3 die Form an:

$$(11)\quad\begin{cases}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{r_1}{h_1}\right)+b^2\frac{\partial\sigma}{\partial\varrho_1}+(a^2-b^2)\frac{\partial\theta}{\partial\varrho_1}+(\mu_1+\mu_2)\frac{\partial^2\sigma}{\partial\varrho_1\partial t}=\mu_1\frac{h_3h_2}{h_1}\left(\frac{\partial M_3}{\partial\varrho_2}-\frac{\partial M_2}{\partial\varrho_3}\right),\\ \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{r_2}{h_2}\right)+b^2\frac{\partial\sigma}{\partial\varrho_2}+(a^2-b^2)\frac{\partial\theta}{\partial\varrho_2}+(\mu_1+\mu_2)\frac{\partial^2\sigma}{\partial\varrho_2\partial t}=\mu_1\frac{h_1h_3}{h_2}\left(\frac{\partial M_1}{\partial\varrho_3}-\frac{\partial M_3}{\partial\varrho_1}\right),\\ \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{r_3}{h_3}\right)+b^2\frac{\partial\varrho}{\partial\varrho_3}+(a^2-b^2)\frac{\partial\theta}{\partial\varrho_3}+(\mu_1+\mu_2)\frac{\partial^2\sigma}{\partial\varrho_3\partial t}=\mu_1\frac{h_2h_1}{h_3}\left(\frac{\partial M_2}{\partial\varrho_1}-\frac{\partial M_1}{\partial\varrho_2}\right),\\ \frac{\partial\sigma}{\partial t}+h_1h_2h_3\left\{\frac{\partial}{\partial\varrho_1}\left(\frac{r_1}{h_2h_3}\right)+\frac{\partial}{\partial\varrho_2}\left(\frac{r_2}{h_3h_1}\right)+\frac{\partial}{\partial\varrho_3}\left(\frac{r_3}{h_1h_2}\right)\right\}=0,\\ \frac{\partial\theta}{\partial t}-\frac{\partial\sigma}{\partial t}=\mu_3\Delta\theta,\end{cases}$$

wo jetzt

$$(12)\quad \Delta\theta=h_1h_2h_3\left\{\frac{\partial}{\partial\varrho_1}\left(\frac{h_1}{h_2h_3}\frac{\partial\theta}{\partial\varrho_1}\right)+\frac{\partial}{\partial\varrho_2}\left(\frac{h_2}{h_3h_1}\frac{\partial\theta}{\partial\varrho_2}\right)+\frac{\partial}{\partial\varrho_3}\left(\frac{h_3}{h_1h_2}\frac{\partial\theta}{\partial\varrho_3}\right)\right\}$$

ist.

2.

Die Kirchhoff'schen Gleichungen für beliebige Rotationskörper und in Kreiscylinderkoordinaten.

Die orthogonalen Koordinaten eines Rotationskörpers, für welchen wir die Gleichungen (11) bilden wollen, werden wie in meiner genannten Arbeit (diese Mitteilungen Bd. III, S. 287) durch die Gleichung

$$(13)\qquad z+ir=f(\xi+i\eta)$$

eingeführt. Dann ist die z-Achse die Rotationsachse des Körpers. Aus (13) entstehen durch Trennung des Reellen vom Imaginären zwei Gleichungen, welche zwei Flächenscharen mit den Parametern ξ und η darstellen. Diese beiden Flächenscharen bilden mit Meridianebenen φ das System orthogonaler Flächenscharen des Rotationskörpers. Wir haben daher in (11), um die Kirchhoff'schen Gleichungen für beliebige Rotationskörper abzuleiten, ϱ_1, ϱ_2, ϱ_3 durch ξ, η, φ zu ersetzen. Dann folgt zunächst aus (13) und (9) (vergl. die genannte Arbeit S. 287)

$$(13a)\qquad\begin{cases}h_1=h_2=\sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial\xi}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial\eta}\right)^2},\\ h_3=\frac{1}{r},\end{cases}$$

wenn

$$(13b)\qquad x=r\cos\varphi,\quad y=r\sin\varphi$$

genommen wird.

Setzt man noch

$$(13c)\qquad h=\sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial\xi}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial\eta}\right)^2}$$

und beachtet, dafs h von φ unabhängig ist, so lauten die Kirchhoffschen Gleichungen für beliebige Rotationskörper:

$$(14)\quad \begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{r_1}{h}\right) + b^2 \frac{\partial \sigma}{\partial \xi} + (a^2-b^2)\frac{\partial \theta}{\partial \xi} + (\mu_1+\mu_2)\frac{\partial^2 \sigma}{\partial \xi \partial t} = \frac{\mu_1}{r}\left(\frac{\partial M_3}{\partial \eta} - \frac{\partial M_2}{\partial \varphi}\right), \\ \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{r_2}{h}\right) + b^2 \frac{\partial \sigma}{\partial \eta} + (a^2-b^2)\frac{\partial \theta}{\partial \eta} + (\mu_1+\mu_2)\frac{\partial^2 \sigma}{\partial \eta \partial t} = \frac{\mu_1}{r}\left(\frac{\partial M_1}{\partial \varphi} - \frac{\partial M_3}{\partial \xi}\right), \\ \frac{\partial}{\partial t}(r r_3) + b^2 \frac{\partial \sigma}{\partial \varphi} + (a^2-b^2)\frac{\partial \theta}{\partial \varphi} + (\mu_1+\mu_2)\frac{\partial^2 \sigma}{\partial \varphi \partial t} = \mu_1 r h^2\left(\frac{\partial M_2}{\partial \xi} - \frac{\partial M_1}{\partial \eta}\right), \\ \frac{\partial \sigma}{\partial t} + \frac{h^2}{r}\left\{\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{r v_1}{h}\right) + \frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{r v_2}{h}\right) + \frac{1}{h^2}\frac{\partial v_3}{\partial \varphi}\right\} = 0, \\ \frac{\partial \theta}{\partial t} - \frac{\partial \sigma}{\partial t} = \mu_3 \Delta\theta. \end{cases}$$

Hier ist

$$\Delta\theta = \frac{h^2}{r}\left\{\frac{\partial}{\partial \xi}\left(r\frac{\partial \theta}{\partial \xi}\right) + \frac{\partial}{\partial \eta}\left(r\frac{\partial \theta}{\partial \eta}\right) + \frac{1}{r h^2}\frac{\partial^2 \theta}{\partial \varphi^2}\right\}$$

und

$$(14b)\quad \begin{cases} M_1 = \frac{1}{r}\left\{\frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\frac{v_2}{h}\right) - \frac{\partial}{\partial \eta}(r v_3)\right\}, \\ M_2 = \frac{1}{r}\left\{\frac{\partial}{\partial \xi}(r v_3) - \frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\frac{v_1}{h}\right)\right\}, \\ M_3 = r h^2\left\{\frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{v_1}{h}\right) - \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{v_2}{h}\right)\right\}. \end{cases}$$

Die vorstehenden Gleichungen gehen in diejenigen für einen Cylinder mit kreisförmigem Querschnitt über, wenn in (13) für f die einfachste Funktion des Arguments $\xi + i\eta$ gesetzt, also

$$(15)\qquad f = \xi + i\eta$$

angenommen wird. Denn dann folgt aus (13)

$$(16)\qquad \xi = z,\ \eta = r,$$

und diese Werte für ξ und η bilden mit φ die Kreiscylinderkoordinaten.

Aus (14), (14a) und (14b) ergeben sich jetzt durch (16) die Kirchhoff'schen Gleichungen in Kreiscylinderkoordinaten in folgender Form, da aus (13c)

$$(16a)\qquad h = 1$$

erhalten wird:

$$(17)\quad \begin{cases} \frac{\partial v_1}{\partial t} + b^2 \frac{\partial \sigma}{\partial z} + (a^2-b^2)\frac{\partial \theta}{\partial z} + (\mu_1+\mu_2)\frac{\partial^2 \sigma}{\partial z \partial t} = \frac{\mu_1}{r}\left(\frac{\partial M_3}{\partial r} - \frac{\partial M_2}{\partial \varphi}\right), \\ \frac{\partial v_2}{\partial t} + b^2 \frac{\partial \sigma}{\partial r} + (a^2-b^2)\frac{\partial \theta}{\partial r} + (\mu_1+\mu_2)\frac{\partial^2 \sigma}{\partial r \partial t} = \frac{\mu_1}{r}\left(\frac{\partial M_1}{\partial \varphi} - \frac{\partial M_3}{\partial z}\right), \\ \frac{\partial r_3}{\partial t} + b^2 \frac{\partial \sigma}{\partial \varphi} + (a^2-b^2)\frac{\partial \theta}{\partial \varphi} + (\mu_1+\mu_2)\frac{\partial^2 \sigma}{\partial \varphi \partial t} = \mu_1 r\left(\frac{\partial M_2}{\partial z} - \frac{\partial M_1}{\partial r}\right), \\ \frac{\partial \sigma}{\partial t} + \frac{1}{r}\left\{\frac{\partial (r v_1)}{\partial z} + \frac{\partial (r v_2)}{\partial r} + \frac{\partial v_3}{\partial \varphi}\right\} = 0, \\ \frac{\partial \theta}{\partial t} - \frac{\partial \sigma}{\partial t} = \mu_3 \Delta\theta. \end{cases}$$

Jetzt ist

$$\Delta\theta = \frac{1}{r}\frac{\partial r}{\partial r}\,r\,\frac{\partial\theta}{\partial r} + \frac{\partial^2\theta}{\partial z^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\theta}{\partial\varphi^2}, \tag{17a}$$

und

$$\begin{cases} M_1 = \frac{1}{r}\left\{\frac{\partial v_2}{\partial\varphi} - \frac{\partial(rv_3)}{\partial r}\right\}, \\ M_2 = \frac{1}{r}\left\{\frac{\partial(rv_3)}{\partial z} - \frac{\partial v_1}{\partial\varphi}\right\}, \\ M_3 = r\left\{\frac{\partial v_1}{\partial r} - \frac{\partial v_2}{\partial z}\right\}. \end{cases} \tag{17b}$$

Für ein rotierendes System sind den linken Seiten der ersten drei Gleichungen (11), (14), (17) Glieder hinzuzufügen, die ich in der genannten Arbeit (cf. (32), (34c), (35c)) aufgestellt habe; für den Kreiscylinder lauten sie:

$$\begin{cases} \mathfrak{Z}_1 = 0, \\ \mathfrak{Z}_2 = 2\omega v_3, \\ \mathfrak{Z}_3 = -2\omega r v_2, \end{cases} \tag{18}$$

wo mit ω die Winkelgeschwindigkeit bezeichnet wird.

3.

Integration der Kirchhoffschen Gleichungen für ein rotierendes System in Kreiscylinder-Koordinaten.

Da nur periodische Bewegungen des gasförmigen Mediums in Betracht kommen, so kann man setzen

$$\begin{cases} v_1 = v_1' e^{\varkappa t}, \\ v_2 = v_2' e^{\varkappa t}, \\ \varrho v_3 = v_3' e^{\varkappa t}, \\ \sigma = \sigma' e^{\varkappa t}, \\ \theta = \theta' e^{\varkappa t}, \end{cases} \tag{19}$$

wo mit $\varkappa$ eine reine imaginäre Konstante, mit v_i', σ', θ' zu bestimmende Funktionen bezeichnet werden. Dadurch werden auch die Funktionen M_i in (17b) von der Form

$$M_i = M_i' e^{\varkappa t} \tag{19a}$$

sein, wo

$$\begin{cases} M_1' = \frac{1}{r}\left(\frac{\partial v_2'}{\partial\varphi} - \frac{\partial v_3'}{\partial r}\right), \\ M_2' = \frac{1}{r}\left(\frac{\partial v_3'}{\partial z} - \frac{\partial v_1'}{\partial\varphi}\right), \\ M_3' = r\left(\frac{\partial v_1'}{\partial r} - \frac{\partial v_2'}{\partial z}\right) \end{cases} \tag{19b}$$

ist.

Setzt man noch zu Abkürzung

$$P = b^2\sigma' + (a^2 - b^2)\,\theta' + (\mu_1 + \mu_2)\,\varkappa\sigma', \tag{19c}$$

so gehen die Gleichungen (17) mit Berücksichtigung der Ausdrücke (18) über in folgendes System von Gleichungen:

$$(20)\quad \begin{cases} \varkappa v_1' + \dfrac{\partial P}{\partial z} = \dfrac{\mu_1}{r}\left(\dfrac{\partial M_3'}{\partial r} - \dfrac{\partial M_2'}{\partial \varphi}\right), \\ \varkappa v_2' + \dfrac{\partial P}{\partial r} = \dfrac{\mu_1}{r}\left(\dfrac{\partial M_1'}{\partial \varphi} - \dfrac{\partial M_3'}{\partial z}\right) + \dfrac{2\omega v_3'}{r}, \\ \varkappa v_3' + \dfrac{\partial P}{\partial \varphi} = \mu_1 r\left(\dfrac{\partial M_2'}{\partial z} - \dfrac{\partial M_1'}{\partial r}\right) - 2\omega r v_2' \\ \qquad \varkappa\sigma' + \dfrac{1}{r}\left\{\dfrac{\partial (r v_1')}{\partial z} + \dfrac{\partial (r v_2')}{\partial r} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial v_3'}{\partial \varphi}\right\} = 0, \\ \qquad \varkappa\theta' - \varkappa\sigma' = \mu_3 \Delta\theta'. \end{cases}$$

Bevor wir zur Integration dieser Gleichungen übergehen, möge eine Beziehung abgeleitet werden, die später von Nutzen sein wird.

Dazu wenden wir auf die ersten drei Gleichungen (20) der Reihe nach die Operationen $\frac{\partial \cdot}{\partial z}$, $\frac{\partial \cdot}{\partial r}$, $\frac{1}{r}\frac{\partial \cdot}{\partial \varphi}$ an, addieren die drei Gleichungen und erhalten mit Rücksicht auf die vierte der Gleichungen (20):

$$(21)\qquad -\varkappa^2 r\sigma' + r\Delta P = 2\omega\left(\frac{\partial v_3'}{\partial r} - \frac{\partial v_2'}{\partial \varphi}\right).$$

Ferner führen wir in die Gleichungen (20) die Ausdrücke (19b) für M_i' ein. Wir erhalten zunächst

$$\begin{aligned} \frac{\partial M_3'}{\partial r} - \frac{\partial M_2'}{\partial \varphi} &= \frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v_1'}{\partial r} - r\frac{\partial v_2'}{\partial z}\right) - \frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial v_3'}{\partial z} - \frac{1}{r}\frac{\partial v_1'}{\partial \varphi}\right), \\ \frac{\partial M_1'}{\partial \varphi} - \frac{\partial M_3'}{\partial z} &= \frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial v_2'}{\partial \varphi} - \frac{1}{r}\frac{\partial v_3'}{\partial r}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(r\frac{\partial v_1'}{\partial r} - r\frac{\partial v_2'}{\partial z}\right), \\ \frac{\partial M_2'}{\partial z} - \frac{\partial M_1'}{\partial r} &= \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial v_3'}{\partial z} - \frac{1}{r}\frac{\partial v_1'}{\partial \varphi}\right) - \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial v_2'}{\partial \varphi} - \frac{1}{r}\frac{\partial v_3'}{\partial r}\right) \end{aligned}$$

und hieraus mit Rücksicht auf die vierte Gleichung (20) sowie auf (17a)

$$\begin{aligned} \frac{\partial M_3'}{\partial r} - \frac{\partial M_2'}{\partial \varphi} &= r\Delta v_1' + \varkappa r\frac{\partial \sigma'}{\partial z}, \\ \frac{\partial M_1'}{\partial \varphi} - \frac{\partial M_3'}{\partial z} &= \Delta(r v_2' + 2\varkappa\sigma' + \varkappa r\frac{\partial \sigma'}{\partial r} + 2\frac{\partial v_1'}{\partial z}, \\ \frac{\partial M_2'}{\partial z} - \frac{\partial M_1'}{\partial r} &= \frac{1}{r}\Delta v_3' - \frac{2}{r}\frac{\partial v_3'}{\partial r} + \varkappa\frac{\partial \sigma'}{\partial \varphi} + \frac{2}{r}\frac{\partial v_2'}{\partial \varphi}. \end{aligned}$$

Hierdurch gehen die ersten drei Gleichungen (20) in folgende über:

$$(22)\quad \begin{cases} \varkappa v_1' + \dfrac{\partial P}{\partial z} = \mu_1\Delta v_1' + \mu_1\varkappa\dfrac{\partial \sigma'}{\partial z}, \\ \varkappa r v_2' + r\dfrac{\partial P}{\partial r} = \mu_1\Delta(r v_2') + 2\mu_1\varkappa\sigma' + \mu_1\varkappa r\dfrac{\partial \sigma'}{\partial r} + 2\mu_1\dfrac{\partial v_1'}{\partial z} + 2\omega v_3', \\ \varkappa v_3' + \dfrac{\partial P}{\partial \varphi} = \mu_1\Delta v_3' - \dfrac{2\mu_1}{r}\dfrac{\partial v_3'}{\partial r} + \mu_1\varkappa\dfrac{\partial \sigma'}{\partial \varphi} + \dfrac{2\mu'}{r}\dfrac{\partial v_2'}{\partial \varphi} - 2\omega r v_2'. \end{cases}$$

Aus diesen Gleichungen sowie aus (21) erkennt man, dafs es nicht möglich erscheint, das System partieller Differentialgleichungen (20) durch Elimination auf gewöhnliche Differentialgleichungen zurückzuführen.[1]) Wohl aber gelangt man dazu durch eine Transformation, ähnlich derjenigen, welche ich bei der Integration der Elastizitätsgleichungen angewendet habe.[2]) Nur genügen hier speziellere Transformationsformeln.

Es sei gesetzt

$$(23)\qquad \begin{cases} v_1' = \dfrac{\partial G}{\partial z}, \\ r v_2' = r\dfrac{\partial G}{\partial r} + \dfrac{\partial H}{\partial \varphi}, \\ v_3' = \dfrac{\partial G}{\partial \varphi} - r\dfrac{\partial H}{\partial r}, \end{cases}$$

wo G und H zwei zu bestimmende Funktionen sind. Hierdurch erhält man aus (19b)

$$M_1' = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} r\frac{\partial H}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 H}{\partial \varphi^2},$$
$$M_2' = -\frac{\partial^2 H}{\partial z \partial r},$$
$$M_3' = -\frac{\partial^2 H}{\partial z \partial \varphi}$$

und hieraus mit Rücksicht auf (17a)

$$\frac{\partial M_3'}{\partial r} - \frac{\partial M_2'}{\partial \varphi} = 0,$$
$$\frac{\partial M_1'}{\partial \varphi} - \frac{\partial M_3'}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial \varphi}\Delta H,$$
$$\frac{\partial M_2'}{\partial z} - \frac{\partial M_1'}{\partial r} = -\frac{\partial}{\partial r}\Delta H.$$

Durch die Substitution (23) gehen demnach die Gleichungen (20) über in folgende:

$$(24)\qquad \begin{cases} \varkappa\dfrac{\partial G}{\partial z} + \dfrac{\partial P}{\partial z} = 0, \\ \varkappa r\dfrac{\partial G}{\partial r} + \varkappa\dfrac{\partial H}{\partial \varphi} + r\dfrac{\partial P}{\partial r} = \mu_1\dfrac{\partial}{\partial \varphi}\Delta H + 2\omega\dfrac{\partial G}{\partial \varphi} - 2\omega r\dfrac{\partial H}{\partial r}, \\ \varkappa\dfrac{\partial G}{\partial \varphi} - \varkappa r\dfrac{\partial H}{\partial r} + \dfrac{\partial P}{\partial \varphi} = -\mu r\dfrac{\partial}{\partial r}\Delta H - 2\omega r\dfrac{\partial G}{\partial r} - 2\omega\dfrac{\partial H}{\partial \varphi}, \\ \varkappa\sigma' + \Delta G = 0, \\ \varkappa\theta' - \varkappa\sigma' = \mu_3\Delta\theta'. \end{cases}$$

1) Mit Ausnahme des Falles $\omega = 0$, der später betrachtet werden wird.

2) Journal für reine und angewandte Mathematik Bd. 104 S. 187. (15).

Aus der ersten dieser Gleichungen folgt

$$\varkappa G + P = f(r, \varphi), \tag{24a}$$

wo f eine noch unbestimmte Funktion von r und φ ist. Aus der zweiten und dritten Gleichung (24) folgt jetzt mit Rücksicht auf (24a)

$$\begin{cases} \varkappa \frac{\partial H}{\partial \varphi} + r \frac{\partial f(r,\varphi)}{\partial r} = \mu_1 \frac{\partial}{\partial \varphi} \Delta H + 2\omega \frac{\partial G}{\partial \varphi} - 2\omega r \frac{\partial H}{\partial r}, \\ -\varkappa r \frac{\partial H}{\partial r} + \frac{\partial f(r,\varphi)}{\partial \varphi} = -\mu_1 r \frac{\partial}{\partial r} \Delta H - 2\omega r \frac{\partial G}{\partial r} - 2\omega \frac{\partial H}{\partial \varphi}. \end{cases} \tag{24b}$$

Auf diese Gleichungen werden nun einmal die Operationen

$$r \frac{\partial \cdot}{\partial r} \text{ und } \frac{\partial \cdot}{\partial \varphi}$$

und dann die Operationen

$$\frac{\partial \cdot}{\partial \varphi} \text{ und } -r \frac{\partial \cdot}{\partial r}$$

angewendet. So entstehen, wenn beide Male addiert wird, die Gleichungen

$$\begin{cases} r \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial f(r,\varphi)}{\partial r} + \frac{\partial^2 f(r,\varphi)}{\partial \varphi^2} = -2\omega \left(r \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial H}{\partial r} + \frac{\partial^2 H}{\partial \varphi^2} \right), \\ \varkappa \left(r \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial H}{\partial r} + \frac{\partial^2 H}{\partial \varphi^2} \right) = \mu_1 \left(r \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r} \Delta H + \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \Delta H \right) \\ \qquad + 2\omega \left(r \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial G}{\partial r} + \frac{\partial^2 G}{\partial \varphi^2} \right) \end{cases} \tag{24c}$$

Die erste dieser Gleichungen zeigt, daſs die rechte Seite derselben für solche Glieder der Funktion H, welche von z abhängig sind, für sich verschwinden muſs. Wir wollen später den Fall, daſs H Glieder enthält, die von z unabhängig sind, für sich betrachten. Daher können wir hier $f(r, \varphi) = 0$ schreiben und die erste Gleichung (24c) durch die Gleichung

$$r \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial H}{\partial r} + \frac{\partial^2 H}{\partial \varphi^2} = 0 \tag{25}$$

ersetzen; die zweite Gleichung (24c) wird dann mit Rücksicht auf (17a) zunächst

$$0 = \mu_1 \left(r \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial^3 H}{\partial r \partial z^2} + \frac{\partial^4 H}{\partial \varphi^2 \partial z^2} \right) + 2\omega \left(r \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial G}{\partial r} + \frac{\partial^2 G}{\partial \varphi^2} \right)$$

und dann

$$0 = \mu_1 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(r \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial H}{\partial r} + \frac{\partial^2 H}{\partial \varphi^2} \right) + 2\omega \left(r \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial G}{\partial r} + \frac{\partial^2 G}{\partial \varphi^2} \right)$$

und durch (25) schlieſslich

$$r \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial G}{\partial r} + \frac{\partial^2 G}{\partial \varphi^2} = 0 \tag{26}$$

Durch (25) und (26) gehen die Gleichungen (24b), wo, wie

bemerkt wurde, $f(r,\varphi) = 0$ gesetzt werden soll, in Gleichungen über, die sich durch (17a) in folgender Form schreiben lassen:

$$\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\varkappa H - \mu_1 \frac{\partial^2 H}{\partial z^2} - 2\omega G\right) = -2\omega r \frac{\partial H}{\partial r},$$

$$r\frac{\partial}{\partial r}\left(\varkappa H - \mu_1 \frac{\partial^2 H}{\partial z^2} - 2\omega G\right) = 2\omega \frac{\partial H}{\partial\varphi}.$$

Diesen Gleichungen wird genügt, wenn gesetzt wird

$$27) \qquad \begin{cases} \varkappa H = \mu_1 \dfrac{\partial^2 H}{\partial z^2} - 2\omega G = -2\omega r \dfrac{\partial F}{\partial r} + Z_1, \\ H = \dfrac{\partial F}{\partial\varphi} + Z_2, \end{cases}$$

und F durch die Gleichung

$$(27a) \qquad r\frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial F}{\partial r} + \frac{\partial^2 F}{\partial\varphi^2} = 0$$

definiert wird, wo Z_1 und Z_2 Funktionen sind, die nur von z abhängen.

Sind Z_1 und Z_2 in (27) von Null verschieden, so können in H und G Glieder vorkommen, die nur von z abhängen. Dieser Fall soll später für sich betrachtet werden, dann können wir hier

$$Z_1 = Z_2 = 0$$

setzen.

Schreibt man in (27) noch, — was sich später als vorteilhaft erweisen wird, —

$$2\omega F \text{ für } F,$$

so ergiebt sich aus (27)

$$(28) \qquad \begin{cases} G = \dfrac{\partial}{\partial\varphi}\left(\varkappa F - \mu_1 \dfrac{\partial^2 F}{\partial z^2}\right) + 2\omega r \dfrac{\partial F}{\partial r}, \\ H = 2\omega \dfrac{\partial F}{\partial\varphi}. \end{cases}$$

Diese Werte für G und H genügen den Gleichungen (25) und (26), weil, wenn F ein Integral der Gleichung

$$r\frac{\partial}{\partial r} r\frac{\partial F}{\partial r} + \frac{\partial^2 F}{\partial\varphi^2} = 0$$

ist, auch $\dfrac{\partial F}{\partial\varphi}$ und $r\dfrac{\partial F}{\partial r}$ Integrale derselben Gleichung sind.

Es ist noch der vierten und fünften Gleichung (24) zu genügen, also mit Rücksicht auf (17a) den Gleichungen

$$(29) \qquad \begin{cases} \varkappa\sigma' = -\dfrac{\partial^2 G}{\partial z^2}, \\ \varkappa\theta' - \varkappa\sigma' = \mu_3 \Delta\theta'; \end{cases}$$

und ferner ist der Gleichung (24a) für $f(r,\varphi) = 0$ zu genügen, aus welcher durch den Ausdruck (19c) für P erhalten wird

$$(30) \qquad (b^2 + (\mu_1 + \mu_2)\varkappa)\sigma' + (a^2 - b^2)\theta' = -\varkappa G.$$

Aus der ersten Gleichung (29) und (30) geht

$$\theta' = -\frac{\varkappa}{a^2 - b^2} G + \frac{b^2 + (\mu_1 + \mu_2)\varkappa}{\varkappa (a^2 - b^2)} \frac{\partial^2 G}{\partial z^2} \tag{31}$$

hervor.

Durch diesen Ausdruck für θ' wird der zweiten Gleichung (29) genügt mit Rücksicht auf (17a) und den Wert für σ in der ersten Gleichung (29), wenn G als Funktion von z der folgenden Gleichung genügt:

$$\mu_3 \{b^2 + (\mu_1 + \mu_2)\varkappa\} \frac{\partial^4 G}{\partial z^4} - \varkappa \{a^2 + (\mu_1 + \mu_2 + \mu_3)\varkappa\} \frac{\partial^2 G}{\partial z^2} + \varkappa^3 G = 0. \tag{32}$$

Es ist dann noch F als Funktion von Z durch die erste Gleichung (28) und durch (32) zu bestimmen. Man genügt dieser Forderung, da die genannten Differentialgleichungen linear sind, in einfachster Weise durch die Annahme, dass F selbst der Gleichung (32) genügt.

Zur Auflösung der Gleichung (32) hat man G und F proportional e^{mz} zu setzen. Dann ergiebt sich für m die folgende Gleichung:

$$\mu_3 \{b^2 + (\mu_1 + \mu_2)\varkappa\} m^4 - \varkappa \{a^2 + (\mu_1 + \mu_2 + \mu_3)\varkappa\} m^2 + \varkappa^3 = 0. \tag{32a}$$

Mit Benützung der gewonnenen Formeln (28), (31) und des Ausdrucks für σ' in der ersten Gleichung (29) gelangen wir zu folgendem Integralsystem der Gleichungen (20):

$$\begin{cases} v_1' = \dfrac{\partial G}{\partial z}, \\ v_2' = \dfrac{\partial^2}{\partial r \partial \varphi}\left(\varkappa F - \mu_1 \dfrac{\partial^2 F}{\partial z^2}\right), \\ v_3' = \dfrac{\partial^2}{\partial \varphi^2}\left(\varkappa F - \mu_1 \dfrac{\partial^2 F}{\partial z^2}\right), \\ \sigma' = -\dfrac{1}{\varkappa} \dfrac{\partial^2 G}{\partial z^2}, \\ \theta' = -\dfrac{\varkappa}{a^2 - b^2} G + \dfrac{b^2 + (\mu_1 + \mu_2)\varkappa}{\mu (a^2 - b^2)} \dfrac{\partial^2 G}{\partial z^2}. \end{cases} \tag{33}$$

Hier ist

$$G = \frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\varkappa F - \mu_1 \frac{\partial^2 F}{\partial z^2}\right) + 2\omega r \frac{\partial F}{\partial r}, \tag{33a}$$

und F genügt der Funktion von r und φ der Gleichung

$$r \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial F}{\partial r} + \frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2} = 0, \tag{33b}$$

während G als Funktion von Z durch die Gleichung (32) bestimmt ist. Und genügt man, wie oben bemerkt, den Gleichungen (33a), (33b) und (32) durch die Annahme, dass F der Gleichung (32) genügt, dann geht das vorstehende Integralsystem in folgendes über:

$$(34)\qquad \begin{cases} v_1' = mGe^{mz} \\ v_2' = (\varkappa - \mu_1 m^2)\,\dfrac{\partial^2 F}{\partial r\,\partial\varphi}\,e^{mz}, \\ v_3' = (\varkappa - \mu_1 m^2)\,\dfrac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2}\,e^{mz}, \\ \sigma' = -\dfrac{m^2}{\varkappa} Ge^{mz}, \\ \theta' = \left\{ -\dfrac{\varkappa}{a^2 - b^2} + \dfrac{b^2 + (\mu_1 + \mu_2)\,\varkappa}{\varkappa\,(a^2 - b^2)}\, m^2 \right\} Ge^{mz}. \end{cases}$$

Hier ist

$$(34a)\qquad G = (\varkappa - \mu_1 m^2)\,F + 2\omega r\,\frac{\partial F}{\partial r},$$

und F genügt der Gleichung (33b); für m ist eine der Wurzeln der Gleichung (32a) zu setzen, so dafs durch (34) 4 Integralsysteme gegeben werden.

Es sind noch besondere Integralsysteme aufzusuchen. Denn wegen (24c) und dann wegen (27) konnten G und H Glieder enthalten, die einmal nur von r und φ und dann nur von z abhängen. Dasselbe muss dann, wie aus (23) und (24) folgt, auch hinsichtlich der gesuchten Funktionen v_i', σ', θ' der Fall sein.

Im ersteren Falle sollten die gesuchten Gröfsen nur von r und φ abhängig sein. Daher ist $\frac{\partial G}{\partial z} = 0$ und folglich wegen (23) $v_1' = 0$, und weil auch $\frac{\partial v_2'}{\partial z} = \frac{\partial v_3'}{\partial z} = 0$ ist, so ist nach (19b) auch $M_1' = M_2'$ $= M_3' = 0$. Daher lauten die Gleichungen (20)

$$(35)\qquad \begin{cases} \varkappa v_2' + \dfrac{\partial P}{\partial r} = \dfrac{2\omega v_3'}{r}, \\ \varkappa v_3' + \dfrac{\partial P}{\partial \varphi} = -2\omega r v_2', \\ \varkappa\sigma' + \dfrac{1}{r}\left\{ \dfrac{\partial (r v_2')}{\partial r} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial v_3'}{\partial \varphi} \right\} = 0, \\ \varkappa\theta' - \varkappa\sigma' = \mu_3 \Delta\theta', \end{cases}$$

wo jetzt

$$(35a)\qquad \Delta\theta' = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\, r\,\frac{\partial\theta'}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\theta'}{\partial\varphi^2}$$

ist.

Aus den ersten beiden Gleichungen (35) ergiebt sich

$$(35b)\qquad \begin{cases} (4\omega^2 + \varkappa^2)\, r v_2' = -\varkappa r\dfrac{\partial P}{\partial r} - 2\omega\dfrac{\partial P}{\partial\varphi}, \\ (4\omega^2 + \varkappa^2)\quad v_3' = 2\omega r\dfrac{\partial P}{\partial r} - \varkappa\dfrac{\partial P}{\partial\varphi}. \end{cases}$$

Hieraus und aus der dritten Gleichung (36) folgt

$$(4\omega^2 + \varkappa^2)\,\sigma' = \Delta P. \tag{35c}$$

Diese Gleichung geht durch (19c) über in die Gleichung

$$(4\omega^2 + \varkappa^2)\,\sigma' = (b^2 + (\mu_1 + \mu_2)\,\varkappa)\,\Delta\sigma' + (a^2 - b^2)\,\Delta\theta' \tag{35d}$$

und ferner durch die vierte Gleichung (35) in die folgende Gleichung für θ':

$$(4\omega^2 + \varkappa^2)\,\varkappa\theta' - \{4\omega^2\mu_3 + \varkappa\,(a^2 + (\mu_1 + \mu_2 + \mu_3)\,\varkappa)\}\,\Delta\theta' + \mu_3\,(b^2 + (\mu_1 + \mu_2)\,\varkappa)\,\Delta\Delta\theta' = 0. \tag{35e}$$

Zur Integration dieser Gleichung setze man

$$\Delta\theta' = \lambda\theta'; \tag{36}$$

λ ist eine Konstante, für welche aus (35e) die folgende Gleichung hervorgeht:

$$(4\omega^2 + \varkappa^2)\,\varkappa - \{4\omega^2\mu_3 + \varkappa\,(a^2 + (\mu_1 + \mu_2 + \mu_3)\,\varkappa)\}\,\lambda + \mu_3\,(b^2 + (\mu_1 + \mu_2)\,\varkappa)\,\lambda^2 = 0. \tag{36a}$$

Sind die Wurzeln dieser Gleichung λ_1 und λ_2 und die denselben entsprechenden Integrale von (36) θ_1 und θ_2, so ist für θ' einmal θ_1 und dann θ_2 zu setzen, und dadurch ergeben sich weiter unten zwei von einander verschiedene Integralsysteme der Gleichungen (20).

Aus der vierten Gleichung (36) und aus (19c) folgt jetzt

$$\sigma' = \frac{1}{\varkappa}\,(\varkappa - \mu_3\lambda)\,\theta' \tag{36b}$$

und

$$P = \frac{1}{\varkappa}\,\{(b^2 + (\mu_1 + \mu_2)\,\varkappa)\,(\varkappa - \mu_3\lambda) + \varkappa\,(a^2 - b^2)\}\,\theta'.$$

Der Ausdruck für P kann durch die Gleichung (36a) in der einfacheren Form

$$P = \frac{1}{\varkappa\lambda}\,(4\omega^2 + \varkappa^2)\,(\varkappa - \mu_3\lambda)\,\theta' \tag{36c}$$

geschrieben werden.

Wir erhalten dann noch aus (35b), (36b) und (36c)

$$v_1' = 0,$$

$$v_2' = -\frac{\varkappa - \mu_3\lambda}{\varkappa\lambda}\left(\varkappa\frac{\partial\theta'}{\partial r} + \frac{2\omega}{r}\frac{\partial\theta'}{\partial\varphi}\right),$$

$$v_3' = \frac{\varkappa - \mu_3\lambda}{\varkappa\lambda}\left(2\omega r\frac{\partial\theta'}{\partial r} - \varkappa\frac{\partial\theta'}{\partial\varphi}\right),$$

$$\sigma' = \frac{\varkappa - \mu_3\lambda}{\varkappa}\,\theta'.$$

Hier soll noch

$$\frac{\varkappa - \mu_3\lambda}{\varkappa\lambda}\,\theta' = F$$

gesetzt werden. Dann erhält man für die Gleichungen (20) das folgende Integralsystem, in welchem die gesuchten Funktionen von z unabhängig sind:

$$(37)\qquad \begin{cases} v_1' = 0, \\ v_2' = -\left(\varkappa \frac{\partial F}{\partial r} + \frac{2\omega}{r}\frac{\partial F}{\partial \varphi}\right), \\ v_3' = 2\omega r \frac{\partial F}{\partial r} - \varkappa \frac{\partial F}{\partial \varphi}, \\ \sigma' = \lambda F, \\ \theta' = \frac{\varkappa\lambda}{\varkappa - \mu_3 \lambda} F; \end{cases}$$

F und λ genügen den Gleichungen (37) und (37a).

Es sind nun Integralsysteme aufzusuchen, bei welchen die gesuchten Funktionen nur von z abhängen. Dieselben erhält man leicht direkt aus den Gleichungen (20).

Es ergeben sich die beiden folgenden Integralsysteme:

$$(38a)\qquad \begin{cases} v_1' = m e^{mz}, \\ v_2' = v_3' = 0, \\ \sigma' = -\frac{m^2}{\varkappa} e^{mz}, \\ \theta' = \left\{ -\frac{\varkappa}{a^2 - b^2} + \frac{b^2 + (\mu_1 + \mu_2)\varkappa}{\varkappa (a^2 - b^2)} m^2 \right\} e^{mz}, \end{cases}$$

wo m der Gleichung (32a) genügt;

$$(38b)\qquad \begin{cases} v_1' = \sigma' = \theta' = 0, \\ r v_2' = 2\omega e^{\pm \frac{\sqrt{\varkappa^2 + 4\omega^2}}{\mu_1} z}, \\ v_3' = (\varkappa + \mu_1 m)\, e^{\pm \frac{\sqrt{\varkappa^2 + 4\omega^2}}{\mu_1} z}. \end{cases}$$

Das Integralsystem (38a) ist in (34) enthalten.

4.

Integralsysteme für $\omega = 0$.

Die beiden Integralsysteme (33) (resp. 34) und (38) gelten auch für $\omega = 0$. Andererseits wurde im Anschlufs an die Ableitung der Gleichungen (22) und (21) bemerkt, dafs, wenn $\omega = 0$, das System partieller Differentialgleichungen (20) auf eine partielle Differentialgleichung mit nur einer abhängigen Gröfse durch Elimination zurückgeführt werden kann. Dieser Weg führt jetzt zu neuen Integralsystemen.

Zunächst folgt aus (21) für $\omega = 0$ die Gleichung

$$-\varkappa^2\sigma' + \Delta P = 0,$$

aus welcher durch (19c) die Gleichung

$$\varkappa^2\sigma' = (b^2 + (\mu_1 + \mu_2)\varkappa)\,\Delta\sigma' + (a^2 - b^2)\,\Delta\theta'$$

folgt, und hieraus sowie aus der vierten Gleichung (20) entsteht die Gleichung

(39) $\varkappa^3\theta' - \varkappa(a^2 + (\mu_1 + \mu_2 + \mu_3)\varkappa)\,\Delta\theta' + \mu_3(b + (\mu_1 + \mu_2)\varkappa)\,\Delta\Delta\theta' = 0,$

welche aus (36c) für $\omega = 0$ hervorgeht; nur ist hier

$$\Delta\theta' = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\,r\frac{\partial\theta'}{\partial r} + \frac{\partial^2\theta'}{\partial z^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\theta'}{\partial\varphi^2}$$

zu setzen.

Die Integration der Gleichung (39) wird auf die Integration der Gleichung

(39a) $$\Delta\theta' = \lambda\theta'$$

zurückgeführt, wo λ eine Wurzel der Gleichung

(39b) $\varkappa^3 - \varkappa(a^2 + (\mu_1 + \mu_2 + \mu_3)\varkappa)\,\lambda + \mu_3(b + (\mu_1 + \mu_2)\varkappa)\,\lambda^2 = 0$

ist.

Für θ' sind dann, wie am Ende des vorigen §., diejenigen beiden Integrale θ_1 und θ_2 der Gleichung (39a) zu setzen, welche den Wurzeln λ_1 und λ_2 entsprechen.

Aus (19c), aus der fünften Gleichung (20) und aus (39a) folgt jetzt entsprechend (37a) und (37c)

(40)
$$\begin{cases} \sigma' = \dfrac{\varkappa - \mu_3\lambda}{\varkappa}\,\theta', \\ P = \dfrac{\varkappa(\varkappa - \mu_3\lambda)}{\lambda}\,\theta'. \end{cases}$$

Es sind nun die ersten vier Gleichungen (20) für $\omega = 0$ zu erfüllen. Die ersten drei derselben ersetzen wir durch (22); und schreiben wir zur Abkürzung

(41)
$$\begin{cases} g = \varkappa - \mu_3\lambda \\ h = \dfrac{(\varkappa - \mu_1\lambda)(\varkappa - \mu_2\lambda)}{\lambda} = \dfrac{g(\varkappa - \mu_1\lambda)}{\lambda}, \end{cases}$$

so lauten die nun zu erfüllenden Gleichungen:

(42)
$$\begin{cases} \varkappa v_1' + h\dfrac{\partial\theta'}{\partial z} = \mu_1\Delta v_1', \\ \varkappa r v_2' + hr\dfrac{\partial\theta'}{\partial r} = \mu_1\Delta(r v_2') + 2\mu_1 g\theta' + 2\mu_1\dfrac{\partial v_1'}{\partial r}, \\ \varkappa v_3' + h\dfrac{\partial\theta'}{\partial\varphi} = \mu_1\Delta v_3' - \dfrac{2\mu_1}{r}\dfrac{\partial v_3'}{\partial r} + \dfrac{2\mu_1}{r}\dfrac{\partial v_2'}{\partial\varphi}, \\ g\theta' + \dfrac{1}{r}\left\{\dfrac{\partial(r v_1')}{\partial z} + \dfrac{\partial(r v_2')}{\partial r} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial v_3'}{\partial\varphi}\right\} = 0 \end{cases}$$

wo θ' durch die Gleichung (39a) bestimmt ist.

Bei der Integration der Gleichungen (42) sehen wir zunächst von den von θ' unabhängigen, in v_1', v_2' und v_3' etwa auftretenden Gliedern ab, die später für sich bestimmt werden sollen. Und was die von θ' abhängigen Werte von v_1', v_2' und v_3' anbelangt, so läfst die vierte Gleichung (42) erkennen, dafs folgender Ansatz möglich ist:

$$\text{(42a)} \qquad \begin{cases} v_1' = c\,\dfrac{\partial\theta'}{\partial z}, \\ v_2' = c\,\dfrac{\partial\theta'}{\partial r}, \\ v_3' = c\,\dfrac{\partial\theta'}{\partial\varphi}. \end{cases}$$

Hierdurch werden zunächst die erste und vierte der Gleichungen (42) mit Rücksicht auf (39a)

$$\text{(42b)} \qquad \begin{cases} (\varkappa c + h)\,\dfrac{\partial\theta'}{\partial z} = \mu_1 c\lambda\,\dfrac{\partial\theta'}{\partial z}, \\ g + c\lambda = 0. \end{cases}$$

Die erste dieser Gleichungen verlangt entweder, dafs

$$\text{(42c)} \qquad \frac{\partial\theta'}{\partial z} = 0$$

oder dafs

$$\text{(42d)} \qquad \varkappa c + h = \mu_1 c\lambda$$

sei.

Wir behandeln den letzteren Fall zuerst. Aus beiden Gleichungen (42d) und der zweiten von (42b) folgt durch Elimination von c

$$\frac{g}{\lambda} = \frac{h}{\varkappa - \mu_1\lambda}.$$

Diese Gleichung ist identisch erfüllt nach dem Ausdruck für h in (41). Es ist daher

$$\text{(43)} \qquad c = -\frac{g}{\lambda}.$$

Es ist noch zu zeigen, dafs die zweite und dritte Gleichung (42) durch die Ausdrücke (42a) für v_1', v_2' und v_3' identisch erfüllt werden. Sie gehen, weil aus (42d) und (43)

$$\varkappa c + h = -\mu_1 g$$

folgt, und jetzt der Faktor μ_1 weggelassen werden kann, in die folgenden Gleichungen über:

$$\text{(44)} \qquad \begin{cases} -gr\,\dfrac{\partial\theta'}{\partial r} = c\Delta\left(r\,\dfrac{\partial\theta'}{\partial r}\right) + 2g\theta' + 2c\,\dfrac{\partial^2\theta'}{\partial z^2}, \\ -g\,\dfrac{\partial\theta'}{\partial\varphi} = c\Delta\left(\dfrac{\partial\theta'}{\partial\varphi}\right) - \dfrac{2}{r}\,c\,\dfrac{\partial^2\theta'}{\partial r\,\partial\varphi} + \dfrac{2}{r}\,c\,\dfrac{\partial^2\theta'}{\partial r\,\partial\varphi}. \end{cases}$$

Hier ist die zweite Gleichung, weil

$$\Delta \frac{\partial \theta'}{\partial \varphi} = \frac{\partial}{\partial \varphi} \Delta \theta'$$

ist, durch (39a) und (43) identisch erfüllt.

Die erste Gleichung (44) geht durch (43) zunächst in folgende Gleichung über:

$$\lambda r \frac{\partial \theta'}{\partial r} = \Delta \left(r \frac{\partial \theta'}{\partial r} \right) - 2\lambda \theta' + 2 \frac{\partial^2 \theta'}{\partial z^2}, \tag{45}$$

welche durch die Gleichung (39a) identisch erfüllt wird. Denn die mit r^2 multiplizierte Gleichung (17a)

$$r \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial \theta'}{\partial r} + r^2 \frac{\partial^2 \theta'}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \theta'}{\partial \varphi^2} = r^2 \Delta \theta'$$

geht durch die Operation $\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}$ in die Gleichung

$$\Delta \left(r \frac{\partial \theta'}{\partial r} \right) + 2 \frac{\partial \theta'}{\partial z^2} = r \frac{\partial \Delta \theta'}{\partial r} + 2 \Delta \theta' \tag{45a}$$

über und weiter durch (39a) in die Gleichung (45).

Aus (42a), (40), (43) und (41) folgt jetzt das Integralsystem

$$\begin{aligned} v_1' &= - \frac{\varkappa - \mu_3 \lambda}{\lambda} \frac{\partial \theta'}{\partial z}, \\ v_2' &= - \frac{\varkappa - \mu_3 \lambda}{\lambda} \frac{\partial \theta'}{\partial r}, \\ v_3' &= - \frac{\varkappa - \mu_3 \lambda}{\lambda} \frac{\partial \theta'}{\partial \varphi}, \\ \sigma' &= \frac{\varkappa - \mu_3 \lambda}{\varkappa} \theta', \end{aligned}$$

welches, wenn noch

$$- \frac{\varkappa - \mu_3 \lambda}{\lambda} \theta' = F \tag{46}$$

gesetzt wird, in folgender Form geschrieben werden kann:

$$\begin{cases} v_1' = \frac{\partial F}{\partial z}, \\ v_2' = \frac{\partial F}{\partial r}, \\ v_3' = \frac{\partial F}{\partial \varphi}, \\ \sigma' = - \frac{\lambda}{\varkappa} F, \\ \theta' = - \frac{\lambda}{\varkappa - \mu_3 \lambda} F. \end{cases} \tag{47}$$

F genügt der Gleichung

$$\Delta F = \lambda F. \tag{47a}$$

Das im vorigen §. in (38) erhaltene Integralsystem geht für $\omega = 0$ und, wenn F durch $-\frac{F}{\varkappa}$ ersetzt wird, in (47) über, falls in (47) F von z unabhängig genommen wird.

Bei der Integration des Systems partieller Differentialgleichungen (42) wurden einmal diejenigen Glieder in v_1', v_2', v_3' unberücksichtigt gelassen, welche von θ' unabhängig sind. Dieselben müssen den folgenden Gleichungen, die aus (42) für $\theta' = 0$ hervorgehen, genügen:

$$(48)\qquad \begin{cases} \varkappa v_1' = \mu_1 \Delta v_1', \\ \varkappa r v_2' = \mu_1 \Delta (r v_2') + 2\mu_1 \frac{\partial v_1'}{\partial z}, \\ \varkappa v_3' = \mu_1 \Delta v_3' - \frac{2\mu_1}{r} \frac{\partial v_3'}{\partial r} + \frac{2\mu_1}{r} \frac{\partial v_2'}{\partial \varphi}, \\ 0 = \frac{\partial v_1'}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial (r v_2')}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial v_3'}{\partial \varphi}, \\ \theta' = 0. \end{cases}$$

Ferner war noch der Fall, dafs $\frac{\partial \theta'}{\partial z} = 0$ ist, zu betrachten. Dann wird der ersten Gleichung (42) wegen v_1' von θ' unabhängig, und es müssen in v_2' und v_3' auch Glieder enthalten sein, welche von v_1' abhängig und daher von θ' unabhängig sind. Alle diese Glieder von v_2' und v_3' sind aus (48) ableitbar. Und für die von θ' abhängigen und daher von v_1' unabhängigen Glieder können wir jetzt $v_1' = 0$ setzen.

Daher zerfällt (42) für

$$\frac{\partial \theta'}{\partial z} = 0$$

in folgende Gleichungensysteme

$$(49a)\qquad \begin{cases} \varkappa v_1' = \mu_1 \Delta v_1, \\ \frac{\partial r_1'}{\partial z} = 0, \\ v_2' = v_3' = \theta' = 0; \end{cases}$$

$$(49b)\qquad \begin{cases} v_1' = 0, \\ \varkappa r v_2' + hr \frac{\partial \theta'}{\partial r} = \mu_1 \Delta (r v_2') + 2\mu_1 g \theta', \\ \varkappa v_3' + h \frac{\partial \theta'}{\partial \varphi} = \mu_1 \Delta v_3' - \frac{2\mu_1}{r} \frac{\partial v_3'}{\partial r} + \frac{2\mu_1}{r} \frac{\partial v_2'}{\partial \varphi}, \\ g\theta' + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial (r v_2')}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_3'}{\partial \varphi} \right) = 0. \end{cases}$$

Was zunächst das letzte Gleichungensystem (49b) anbelangt, so kann für dasselbe kein anderes Integralsystem erhalten werden, als dasjenige, welches aus (47) für $\frac{\partial \theta'}{\partial z} = 0$ hervorgeht. Denn es handelt sich ja hier nur um solche Werte von v_1', v_2' und v_3', welche mit θ' zugleich verschwinden; und da es nur ein Integralsystem dieser Eigenschaft geben kann, so mufs das aus (47) zu bildende das verlangte sein.

Ebenso ist das Gleichungensystem (49a) in (48) enthalten. Es bleibt daher nur die Integration des Gleichungensystems (48) übrig.

Setzt man dazu

$$(50) \qquad \begin{cases} v_1' = A_1 e^{mz + \nu\varphi}, \\ z\, v_2' = A_2 e^{mz + \nu\varphi}, \\ v_3' = A_3 e^{mz + \nu\varphi}, \end{cases}$$

wo m und ν Konstanten sind und zwar ν eine rein imaginäre Konstante, so ergiebt sich aus (48)

$$(51) \qquad \begin{cases} \frac{\varkappa}{\mu_1} A_1 = \frac{1}{r}\frac{d}{dr} r \frac{dA_1}{dr} + \left(m^2 \frac{\nu^2}{r^2}\right) A_1, \\ \frac{\varkappa}{\mu_1} A_2 = \frac{1}{r}\frac{d}{dr} r \frac{dA_2}{dr} + \left(m^2 + \frac{\nu^2}{r^2}\right) A_2 + 2mA_1, \\ \frac{\varkappa}{\mu_1} A_3 = \frac{1}{r}\frac{d}{dr} r \frac{dA_3}{dr} + \left(m^2 + \frac{\nu^2}{r^2}\right) A_3 - \frac{2}{r}\frac{dA_2}{dr} + \frac{2\nu}{r^2} A_2, \\ 0 = mA_1 + \frac{1}{2}\frac{dA_2}{dr} + \frac{\nu}{r^2} A_3. \end{cases}$$

Diesen Gleichungen wird durch die beiden folgenden Wertsysteme genügt:

$$(51a) \qquad \begin{cases} A_1 = \frac{1}{m}\left(m^2 - \frac{\varkappa}{\mu_1}\right) J, \\ A_2 = r\frac{dJ}{dz}, \\ A_3 = \nu J; \end{cases}$$

$$(51b) \qquad \begin{cases} A_1 = 0, \\ A_2 = L, \\ A_3 = -\frac{r}{\nu}\frac{dL}{dr}, \end{cases}$$

wo J und L Integrale der Gleichung

$$(52) \qquad \frac{1}{r}\frac{d}{dr} r \frac{dF}{dr} + \left(m^2 - \frac{\varkappa}{\mu_1} + \frac{\nu^2}{r^2}\right) F = 0$$

sind. Denn durch (51a) werden die erste, dritte und vierte der Gleichungen (51) mit Rücksicht auf (52) identisch erfüllt. Die zweite Gleichung (51) geht durch (52) in folgende über:

$$\frac{\varkappa}{\mu_1} r \frac{dJ}{dr} = \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left\{\left(-r^2m^2 + \frac{r^2\varkappa}{\mu_1} - \nu^2\right)J\right\} + \left(m^2 + \frac{\nu^2}{r^2}\right) r \frac{dJ}{dr} + 2\left(m^2 - \frac{\varkappa}{\mu_1}\right)J;$$

hieraus folgt

$$\frac{\varkappa}{\mu_1} r \frac{dJ}{dr} = -2m^2 J + \frac{2\varkappa}{\mu_1} J - m^2 r \frac{dJ}{dr} + \frac{\varkappa}{\mu_1} r \frac{dJ}{dr} - \frac{\nu^2}{r}\frac{dJ}{dr} + \left(m^2 + \frac{\nu^2}{r^2}\right) r \frac{dJ}{dr} + 2\left(m^2 - \frac{\varkappa}{\mu_1}\right)J.$$

Dieses ist eine identische Gleichung.

In derselben Weise läfst sich zeigen, dafs (51 b) den Gleichungen (51) genügt.

Damit das Integralsystem (51 b) auch für $\nu = 0$ Geltung behalte, werde L durch νL ersetzt, so ergiebt sich aus (50), (51 a) und (51 b) das folgende Integralsystem, wo zugleich das Gleichungensystem (49 a) durch das zweite Glied in dem Ausdrucke für v_1' Berücksichtigung gefunden hat:

$$(53)\qquad \begin{cases} v_1' = \frac{1}{m}\left(m^2 - \frac{\varkappa}{\mu_1}\right) J e^{mz + \nu\varphi} + M, \\ v_2' = \left(\frac{dJ}{dr} + \nu\frac{L}{r}\right) e^{mz + \nu\varphi}, \\ v_3' = \left(\nu J - r\frac{dL}{dr}\right) e^{mz + \nu\varphi}, \\ \theta' = \sigma' = 0. \end{cases}$$

Hier sind J und L Integrale der Gleichung (52), M genügt der Gleichung

$$(53\,a)\qquad \frac{1}{r}\frac{d}{dr} r \frac{dM}{dr} + \frac{1}{r^2}\frac{d^2M}{d\varphi^2} = \frac{\varkappa}{\mu_1} M = 0.$$

5.

Anwendung für $\nu = 0$.

Die vorstehenden Resultate sollen nun für $\nu = 0$ unter der von Kirchhoff gemachten Voraussetzung angewendet werden, dafs „die Luftteilchen, welche die Röhre berühren, an dieser haften und die konstante Temperatur derselben besitzen". Dann müssen die Werte für $v_1', v_2', v_3', \theta'$ verschwinden, wenn r gleich dem Radius der Röhre gesetzt wird.

Wir schreiben in (47)

$$(54)\qquad F = A_1 F_1 + A_2 F_2,$$

wo F_1 und F_2 diejenigen Integrale der Gleichung (47 a) seien, welche den Wurzeln λ_1 und λ_2 von (39 b) entsprechen, und wo A_1 und A_2 zu bestimmende Konstante seien; ferner sei $\nu = 0$ und

$$(54\,a)\qquad \begin{cases} F_1 = \vartheta_1 e^{mz}, \\ F_2 = \vartheta_2 e^{mz}, \end{cases}$$

so dafs ϑ_1 und ϑ_2 Integrale der Gleichungen

$$\text{(54b)} \qquad \begin{cases} \frac{1}{r}\frac{d}{dr} r \frac{d\vartheta_1}{dr} + (m^2 - \lambda_1)\,\vartheta_1 = 0, \\ \frac{1}{r}\frac{d}{dr} r \frac{d\vartheta_2}{dr} + (m^2 - \lambda_2)\,\vartheta_2 = 0, \end{cases}$$

sind.

Ferner sei in (53) $\nu = 0$, $M = 0$ und es werde

$$J \text{ durch } A_3 J,$$
$$L \text{ durch } A_4 L$$

ersetzt, wo A_3 und A_4 zu bestimmende Konstante sind, so geht aus (47) und (53) folgendes Integralsystem hervor

$$\text{(55)} \qquad \begin{cases} v_1' = \left\{ m A_1 \vartheta_1 + m A_2 \vartheta_2 + \frac{1}{m}\left(m^2 - \frac{\varkappa}{\mu_1}\right) A_3 J \right\} e^{mz}, \\ v_2' = \left\{ A_1 \frac{d\vartheta_1}{dr} + A_2 \frac{d\vartheta_2}{dr} + A_3 \frac{dJ}{dr} \right\} e^{mz}, \\ v_3' = - A_4 r \frac{dL}{dr} e^{mz}, \\ \theta' = \left(\frac{A_1}{c_1}\vartheta_1 + \frac{A_2}{c_2}\vartheta_2\right) e^{mz}. \end{cases}$$

Hier ist zur Abkürzung gesetzt

$$\text{(55a)} \qquad \begin{cases} c_1 = \mu_3 - \frac{\varkappa}{\lambda_1}, \\ c_2 = \mu_3 - \frac{\varkappa}{\lambda_2}. \end{cases}$$

Sollten nun, wenn für r der Radius der Röhre gesetzt wird, v_1', v_2', v_3', θ' verschwinden, so mufs erstens

$$A_4 = 0$$

sein, und aufserdem müssen folgende Gleichungen bestehen:

$$m A_1 \vartheta_1 + m_2 A_2 \vartheta_2 + \frac{1}{m}\left(m^2 - \frac{\varkappa}{\mu_1}\right) A_3 J = 0,$$
$$A_1 \frac{d\vartheta_1}{dr} + A_2 \frac{d\vartheta_2}{dr} + A_3 \frac{dJ}{dr} = 0,$$
$$\frac{A_1}{c_1}\vartheta_1 + \frac{A_2}{c_2}\vartheta_2 = 0.$$

Die Determinante dieser Gleichungen ist

$$m\,(c_1 - c_2)\,\vartheta_1 \vartheta_2 \frac{dJ}{dr} - \left\{ c_1 \vartheta_2 \frac{d\vartheta_1}{dr} - c_2 \vartheta_1 \frac{d\vartheta_2}{dr} \right\} \frac{1}{m}\left(m^2 - \frac{\varkappa}{\mu_1}\right) J = 0.$$

Dividiert man die beiden Seiten dieser Gleichung durch

$$\frac{1}{m}\left(m^2 - \frac{\varkappa}{\mu_1}\right) \vartheta_1 \vartheta_2 J$$

und berücksichtigt (55a) und, dafs sich daraus

$$c_1 - c_2 = -\varkappa\left(\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2}\right)$$

ergiebt, so entsteht die folgende Gleichung:

$$(56)\quad \frac{m^2\varkappa}{\frac{\varkappa}{r_1} - m^2}\left(\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2}\right)\frac{d\lg J}{dr} + \left(\frac{\varkappa}{\lambda_1} - \mu_3\right)\frac{d\lg\vartheta_1}{dr} - \left(\frac{\varkappa}{\lambda_2} - \mu_3\right)\frac{d\lg\vartheta_2}{dr} = 0.$$

Diese Gleichung geht in die entsprechende, von Kirchhoff (a. a. O. S. 551) abgeleitete über, wenn m durch h und J, ϑ_1, ϑ_2 der Reihe nach durch die bei Kirchhoff denselben Differentialgleichungen genügenden Funktionen Q, Q_1, Q_2 ersetzt werden.

Aus (56) und ferner aus (55) ergeben sich dann die weiteren Resultate, welche Kirchhoff unter der oben genannten Voraussetzung, dafs die Bewegung vom Torsionswinkel φ unabhängig sei, abgeleitet hat. Diese Voraussetzung aber erscheint, weil die Reibung den Verlauf der Luftschwingungen beeinflufst, nicht einwandfrei. Und da sie zu Resultaten führt, die den Beobachtungen nicht völlig entsprechen, so empfiehlt es sich, die Luftschwingungen in Röhren mit kreisförmigem Querschnitt ohne diese beschränkende Voraussetzung zu untersuchen. Dazu sind in den oben abgeleiteten Formeln die Hilfsmittel gegeben.

Hamburg, im Dezember 1900.

Über die Funktion $y = {}^{\left[\left[x\right]^{x}\right]}x$ für ganzzahliges Argument (Abundanzen).

Von Hans Maurer.

Die im Titel genannte Funktion, zu der man durch eine Operation vierter Stufe gelangt, möge durch das Symbol $y = {}^{n}x$ (lies: x links hoch n) bezeichnet werden, wo die Zahl n angiebt, wie oft man sich im Ganzen die Zahl x in der bezeichneten Verknüpfungsweise gesetzt zu denken hat. Es würde also z. B. ${}^{3}x = x^{(x^x)}$ sein. Die Funktion $y = {}^{n}x$ heifse die $n$te Abundanz von x oder die Abundanz $n$ten Grades von x; x ist die Abundanzenbasis, n der Abundanzenexponent oder Grad der Abundanz. Die Bezeichnung: „Exponent“ allein bedeutet auch in dieser Arbeit immer einen Potenzexponenten. Nach der Definition entsteht jede Abundanz, indem man die Basis zu einer Potenz erhebt, deren Exponent die um einen Abundanzengrad nied-

rigere Abundanz ist. Es ist also allgemein: ${}^{n}x = x^{[{}^{n-1}x]}$. Läfst man diese Beziehung auch für Werte von $n < 2$ gelten, so dient sie zur Definition der Ausdrücke:

$$ {}^{0}x = 1;\ {}^{-1}x = 0;\ {}^{-2}x = -\infty $$

${}^{1}x = x$ kann auch aus derselben Beziehung ($n = 2$) gefolgert werden, wenn man dies nicht als schon in der ursprünglichen Definition liegend ansehen will. Bildet man die Beziehungsgleichung für $n = \infty$, so ergiebt sich:

$$ {}^{\infty}x = x^{({}^{\infty}x)} \text{ oder } \sqrt[({}^{\infty}x)]{{}^{\infty}x} = x $$

Der Name Abundanz rechtfertigt sich, wenn man sich vor Augen führt, in welcher überquellenden Fülle der Funktionswert mit dem Zunehmen der Basis oder des Abundanzenexponenten wächst.

Es ist: ${}^{2}2 = 2^{2} = 4$; ${}^{3}3 = 3^{27} = 7\,625\,597\,484\,987$.

Die Charakteristik des log (${}^{4}3$) würde also schon $> 3{,}6$ Billionen werden, und die Zahl ${}^{4}3$ selbst würde, 4 Ziffern auf einen Centimeter gerechnet, in einer Flucht hingeschrieben, 227 mal um den Erdäquator laufen.

Über ${}^{4}4$ bemerkt Krönig in seinem Buche: „Das Dasein Gottes und das Glück der Menschen", dafs eine Kugel, deren Radius eine Quintillion ($= 10^{30}$) Lichtjahre lang ist, nicht die Druckerschwärze zu fassen vermag, die zum Druck der Zahl ${}^{4}4$ in den kleinsten existierenden Lettern erforderlich wäre.

Wenn es so schon sehr bald unmöglich wird, auch nur die erste Stelle einer solchen Abundanz anzugeben, so erfordert es verhältnismäfsig wenig Rechnung die letzten Stellen, die Einer, Hunderter u. s. w. aller Abundanzen einer ganzen Zahl zu bestimmen. Es ergiebt sich sogar, dafs jede Abundanz von der Form ${}^{\infty}x$, deren Wert natürlich ∞ ist, eine bestimmte Zifferfolge hat, und dafs ihre Einer, Zehner etc. leicht angegeben werden können.

Es beruht dies darauf, dafs die Potenzen der ganzen Zahlen mit wachsendem Exponenten von gewissen Werten desselben an ihre letzten Stellen wiederholen.

Soll das Produkt zweier Potenzen derselben Basis $b^{e} \cdot b^{n}$ die m letzten Stellen mit b^{e} gemein haben, so mufs $(b^{e} \cdot b^{n} - b^{e})$ durch 10^{m} teilbar sein, also: $b^{e}(b^{n} - 1) = c \cdot 10^{m} \cdot (c = \text{ganze Zahl})$. Wenn b^{e} mit 10^{m} den Faktor s gemein hat, so mufs also $b^{n} \equiv 1 \pmod{\frac{10^{m}}{s}}$ sein, wenn wir e grofs genug wählen, so dafs b^{e} und $\frac{10^{m}}{s}$ relativ prim sind.

Wir unterscheiden hier drei Fälle:

I b ungerade und nicht durch 5 teilbar; $s = 1$.

II b gerade und nicht durch 5 teilbar; s ist eine Potenz von 2.

III b ungerade und durch 5 teilbar; s ist eine Potenz von 5.

Der Fall, dafs b selbst durch 10 teilbar ist, hat kein besonderes Interesse.

Fall I: b ungerade und nicht durch 5 teilbar. $b = 2z + 1$. Es ist also $s = 1$ und die zu erfüllende Bedingung lautet: $(2z + 1)^n \equiv 1 \pmod{10^m}$. Setzen wir hier zunächst $m = 1$, verlangen also $(2z + 1)^n \equiv 1 \pmod{10}$, so genügt ihr stets $n = 4$.

Beweis. Nach Fermat ist nämlich $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$, wenn p eine nicht in der sonst beliebigen Zahl a enthaltene Primzahl ist. Setzen wir $p = 5$ und wenden diesen Fermat'schen Satz auf unseren Fall an, so folgt $b^4 \equiv 1 \pmod{5}$, und da b^4 wie b eine ungerade Zahl ist, also nicht auf 6 endigen kann, so mufs b^4 auf 1 endigen. Die 4ten Potenzen aller ungeraden, nicht durch 5 teilbaren Zahlen endigen also auf **1**, und mit ihnen multipliziert, ändert eine Zahl sich in ihrer letzten Stelle nicht. Es ist also $(2z + 1)^4 = 10c + 1$. c ist wenigstens durch 2^3 teilbar; denn $(2z + 1)^4 = 2^4 \cdot z^4 + 4 \cdot 2^3 \cdot z^3 + 6 \cdot 2^2 \cdot z^2 + 4 \cdot 2z + 1 = 16 \left[z^4 + 2z^3 + z^2 + \frac{z(z+1)}{2}\right] + 1$. Der Faktor von 16 ist immer eine ganze Zahl und kann gerade oder ungerade sein. Da er nach dem Fermat'schen Satz jedenfalls den Faktor 5 enthalten mufs, folgt:

$$(2z + 1)^4 = 80c_1 + 1 \equiv 1 \pmod{10},$$

daraus:

$$(2z + 1)^{20} = (80c_1 + 1)^5 = (1 + 4 \cdot 10^2 c_1 + 64 \cdot 10^3 c_1^2 + \cdots)$$
$$= [1 + 4 \cdot 100 \cdot c_2] \equiv 1 \pmod{10^2}$$

$$(2z + 1)^{100} = (1 + 4 \cdot 10^2 c_2)^5 = (1 + 2 \cdot 10^3 c_2 + 16 \cdot 10^5 c_2^2 + \cdots)$$
$$= [1 + 2 \cdot 10^3 c_3] \equiv 1 \pmod{10^3}$$

$$(2z + 1)^{500} = (1 + 2 \cdot 10^3 c_3)^5 = 1 + 10^4 \cdot c_3 + \cdots \equiv 1 \pmod{10^4}$$

$$(2z + 1)^{500 \cdot 10^r} = (1 + 10^4 \cdot c_4)^{10^r} = 1 + 10^{(4+r)} c_4 + \cdots$$
$$\equiv 1 [\text{mod } 10^{(4+r)}], \text{ gültig von } r = 0 \text{ ab.}$$

$+ \cdots$ bedeutet hier stets höhere Potenzen von 10 als die unmittelbar vorher genannte.

Der Satz von Euler lautet: Ist, in seine Primfaktoren zerlegt, $k = l^\lambda m^\mu n^\nu$, und bezeichnet man mit

$$\varphi(k) = (l - 1) l^{\lambda-1} \cdot (m - 1) m^{\mu-1} \cdot (n - 1) n^{\nu-1} \cdots,$$

so ist $a^{\varphi(k)} \equiv 1 \pmod{k}$, wenn k und a relativ prim sind. Setzt man hier $a = 2z + 1; k = 10^{(4+r)}$, so wird $\varphi(k) = 4000 \cdot 10^r$. Es gilt also in diesem Falle schon:

$$(2z+1)^{\frac{\varphi(k)}{8}} \equiv 1 \pmod{k}.$$

Es endigt also:

	$(2z+1)^4$;	$(2z+1)^{20}$;	$(2z+1)^{100}$;	$(2z+1)^{500}$;	$(2z+1)^{500 \cdot 10^r}$
auf:	1	01	001	0001	00···[(r+3)Nullen]1

und die Multiplikation irgend einer Zahl, speziell auch einer Potenz von $(2z + 1)$, mit diesen Potenzen verändert entsprechend viele letzte Stellen des Multiplikanden nicht.

(R I)
- Die 1 letzte Stelle von $(2z+1)^e$ ist also dieselbe wie in $(2z+1)^{\text{Rest } e \pmod 4}$ und man braucht von e nur die 2 letzten Stellen zu kennen,
- die 2 letzten Stellen von $(2z+1)^e$ sind also dieselben wie in $(2z+1)^{\text{Rest } e \pmod{20}}$ und man braucht von e nur die 2 letzten Stellen zu kennen,
- die 3 letzten Stellen von $(2z+1)^e$ sind also dieselben wie in $(2z+1)^{\text{Rest } e \pmod{100}}$ und man braucht von e nur die 2 letzten Stellen zu kennen,
- die 4 letzten Stellen von $(2z+1)^e$ sind also dieselben wie in $(2z+1)^{\text{Rest } e \pmod{500}}$ und man braucht von e nur die 3 letzten Stellen zu kennen,
- allgemein: die $(4+r)$ letzten Stellen von $(2z+1)^e$ sind also dieselben wie in $(2z+1)^{\text{Rest } e \left(\text{mod } \frac{10^r+3}{2}\right)}$ und man braucht von e nur die $(r+3)$ letzten Stellen zu kennen,

gültig von $r = 0$ an.

Diese Regelmäfsigkeiten (R I) stellen das Mindestmafs des zu Erwartenden dar, sie können schon bei niedrigeren Potenzen eintreten. In der That endigen von den auf 7 und 3 endigenden Zahlen erst die vierten Potenzen auf 1, von den auf 9 endigenden die Quadrate, und die auf 1 endigenden selbst.

Abundanzen der ungeraden nicht durch 5 teilbaren Zahlen.

Da für die letzte Stelle einer Potenz einer ungeraden nicht durch 5 teilbaren Zahl der Rest ihres Exponenten (mod 4) entscheidend ist, die Zahlen selbst aber die Exponenten ihrer zweiten Abundanzen sind, zerfallen die ungeraden Zahlen in zwei Gruppen, jenachdem sie von der Form $(4m + 1)$ oder $(4m + 3)$ sind.

I A. Nicht durch 5 teilbare Zahlen von der Form $u = 4m + 1$.

Dann ist ${}^2u = u^u = (4m + 1)^{(4m+1)} = (4m + 1)^{4m} \cdot (4m + 1)$ $= (80c + 1)^m(4m + 1)$, da die 4. Potenz jeder ungeraden nicht durch 5 teilbaren Zahl die Form $(80c + 1)$ hat, wie vorher gezeigt wurde. Da $(80c + 1)^m = 80c_1 + 1$ ist, folgt

$$ {}^2u = 80c_1(4m + 1) + 4m + 1 $$

d. h. ${}^2u \equiv (4m + 1) \pmod{80}$; also erst recht ${}^2u \equiv {}^1u \pmod{20}$.

${}^2u$ und ${}^1u$ haben also die letzte Stelle miteinander gemein. Da ${}^3u = u^{({}^2u)}$ und ${}^2u = u^{({}^1u)}$ ist, ihre Exponenten ${}^2u$ und ${}^1u$ aber, durch 20 geteilt, denselben Rest lassen, so haben ${}^3u$ und ${}^2u$ selbst nach den Beziehungen (R I) die zwei letzten Stellen miteinander gemein. Also ${}^3u \equiv {}^2u \pmod{100}$. Da sie wieder die Exponenten der nächst höheren Abundanzen ${}^4u$ und ${}^3u$ sind, so haben diese die drei letzten Stellen miteinander gemein; d. h. ${}^4u \equiv {}^3u \pmod{1000}$, also erst recht ${}^4u \equiv {}^3u \pmod{500}$. Daraus folgt ${}^5u \equiv {}^4u \pmod{5000}$ u. s w. Allgemein folgt der Satz:

Die $n$te Abundanz einer nicht durch 5 teilbaren Zahl von der Form $(4m + 1)$ hat mit allen höheren Abundanzen die letzten n Stellen gemein.

Um also die letzten n Stellen einer, beliebig hohen, solchen Abundanz zu berechnen, braucht man höchstens bis zur $n$ten Abundanz vorzugehen und kann sich bei der Berechnung der nächst niedrigeren Abundanz, die als Potenzexponent in die Rechnung eintritt, auf die letzten $(n - 1)$ Stellen beschränken. Von der dieser vorausgehenden Abundanz braucht man nur $(n - 2)$ Stellen u. s. f. (Nur darf man nie weniger als zwei Stellen berechnen.)

Dies gilt für alle noch so hohen Abundanzen, und auch die Abundanz ${}^\infty(4m + 1)$ hat dieselben letzten n Stellen wie ${}^n(4m + 1)$.

Beispiel $m = 2$; $u = 9$. Abundanzen auf 10 Stellen.

$9^2 =$ 81
$9^9 =$ 387420489
$9^{10} =$ 3486784401
$9^{50} =$ 2107522001
$9^{250} =$ 5377610001
$9^{2500} =$ 8276100001
$9^{10000} =$ 3104400001

Da 9 ein Quadrat ist, endigt schon 9^2 auf 1, und an Stelle der im allgemeinen Fall angegebenen Exponenten 4, 20, 100, 500 etc. treten deren Hälften. Die letzten 10 Stellen dieser Potenzen sind neben angegeben. Man braucht höher als 9^{2500} nicht zu gehen, da es zur Auffindung der letzten 10 Stellen von $9^{2500 \cdot x}$ genügt, die vor den Nullen stehende Zahl in 9^{2500} mit x zu multiplizieren; denn die Glieder mit höheren Potenzen dieser Zahl liefern keine Beiträge zu den letzten 10 Stellen. Um also die letzten

10 Stellen von $^{s}9$ zu finden, sieht man nach, wieviel mal 2500 in $^{s}9$ enthalten ist. Den Quotienten multipliziert man mit 82761, wobei man nur die 5 letzten Stellen berechnet. Hinter diese 5 Stellen ist 00001 zu schreiben, und die so entstandene 10stellige Zahl ist mit den 10 letzten Stellen von $9^{\text{Rest } 9^s \pmod{2500}}$, also von 9^{489} zu multiplizieren. Zur Bildung von 9^{489} wird das schon gefundene 9^9 benutzt, 9^{80} endigt schon auf 01. Bei der Berechnung der höheren Abundanzen wird die Rechnung stets einfacher, da ein Teil des vorausgehenden Resultates wieder verwendet wird und bei den neu hinzukommenden Multiplikatoren immer mehr Nullen vor die schliefsende 1 treten. Die folgende Tafel giebt die so berechneten letzten 10 Stellen aller Abundanzen von 9.

$^{0}9$ 1
$^{1}9$ 9
$^{2}9$ 3874204889
$^{3}9$ 1617177289
$^{4}9$ 9743565289
$^{5}9$ 9463945289
$^{6}9$ 0984745289
$^{7}9$ 8112745289
$^{8}9$ 4592745289
$^{9}9$ 1392745289
$^{10}9$ 9392745289
∞

Die unter der Treppe stehenden Stellen sind allen folgenden Abundanzen gemein. Speziell stellen die 10 Ziffern von $^{10}9$ das Ende aller höheren Abundanzen, auch das von $^{\infty}9$ dar. Nimmt man eine rechts von einer Treppenstufe stehende (auf 9 endigende) Zahl zum Exponenten einer Potenz mit der Basis 9, so endigt die Potenz wie der Exponent. Die letzte Stelle aller Abundanzen von 9 ist 9 selbst. 9^9 liefert die zwei letzten Stellen aller Abundanzen von höherem als dem ersten Grad: 89. Dann liefert 9^{89} die 3 letzten Stellen aller Abundanzen von höherem als dem 2. Grad u. s. f. Jede unmittelbar unter einer Treppenstufe stehende Ziffer ist um 8 gröfser als die auf dieser Treppenstufe stehende. Beweis. Nach den Beziehungen (R I) mufs 3^{20}, also auch 9^{10} auf 01 endigen. Dann mufs 9^8 auf 21 endigen, damit es, mit $9^2 = 81$ multipliziert, eine mit 01 schliefsende Zahl ergeben kann. Daraus folgt, dafs 9^{80} auf 201, 9^{800} auf 2001, allgemein $9^{8 \cdot 10^m}$ auf $(2 \cdot 10^{m+1} + 1)$ endigt. Zur Bestimmung der $(n + 1)$ letzten Stellen der Potenz mufs man die n letzten Stellen des Exponenten kennen. Nehmen wir also an, es seien die n letzten Stellen von $^{n}9$ um $8 \cdot 10^n$ gröfser als die von $^{(n-1)}9$, so unterscheiden sich die $(n + 1)$ letzten Stellen der nächst höheren Abundanz $^{(n+1)}9$ von denjenigen von $^{n}9$ durch eine Multiplikation mit $9^{8 \cdot 10^n}$, d. i. mit $(2 \cdot 10^{n+1} + 1)$. Dies liefert, da die letzte Stelle jeder Abundanz eine 9 ist, in der $(n+1)$ten Stelle von hinten bei $^{(n+1)}9$ 8 mehr als bei $^{n}9$. Damit ist der Schlufs von n auf $(n + 1)$ bewiesen, die „Treppendifferenz“, die in der Tafel $= 8$ ist, ist auch bei beliebig hohen Abundanzen $= 8$.

IB. Nicht durch 5 teilbare Zahlen von der Form $u = 4m + 3$.

In diesem Fall ist ${}^2u = u^u = (4m+3)^{4m+3} = (4m+3)^{4m} \cdot (4m+3)^3$ $= (80c+1)(4m+3)^3$, da die 4. Potenz jeder ungeraden nicht durch 5 teilbaren Zahl die Form $(80c+1)$ hat, wie oben gezeigt wurde und da, wenn eine Zahl $\equiv 1 \pmod{x}$ ist, auch jede ihrer ganzzahligen Potenzen $\equiv 1 \pmod{x}$ ist. Es ist also ${}^2u \equiv 3 \pmod 4$, weil $3^3 \equiv 3 \pmod 4$ ist und alle übrigen Summanden von ${}^2u$, die bei der Ausrechnung nach der zuletzt gegebenen Form entstehen, durch 4 teilbar sind. Da auch ${}^1u = u \equiv 3 \pmod 4$ ist, so folgt nach den Beziehungen (R I), dafs die nächst höheren Abundanzen ${}^3u$ und ${}^2u$, deren Potenzexponenten ${}^2u$ und ${}^1u$ sind, die letzte Stelle miteinander gemein haben. ${}^2u$ und ${}^1u$ dagegen brauchen noch nicht die letzte Stelle gemein zu haben. Wenn z. B. m durch 10 teilbar ist, läfst ${}^2u$, wie die Form $(80c+1)(4m+3)^3$ zeigt, durch 10 dividiert denselben Rest wie 3^3, d. i. 7, während ${}^1u$ dann auf 3 endigt. Es ist also ${}^3u = u^{[(80c+1)(4m+3)^3]}$, und es hat demnach die letzten 2 Stellen wie $u^{[(4m+3)^3]}$, da

$$(80c+1)(4m+3)^3 \equiv (4m+3)^3 \pmod{20} \quad \text{ist.}$$

$$u^{[(4m+3)^3]} = [u^{[(4m+3)^2]}]^{(4m+3)} = [u^{4m_1+1}]^{(4m+3)} = [(80c_1+1)\cdot u]^{(4m+3)} =$$
$$= (80c_2+1)\cdot u^{4m+3} = (80c_2+1)\cdot {}^2u.$$

Hier wurde mehrmals von den Thatsachen Gebrauch gemacht, dafs die 4. Potenz einer jeden nicht durch 5 teilbaren ungeraden Zahl die Form $(80c+1)$ hat, und dafs, wenn eine Zahl $\equiv 1 \pmod{x}$ ist, auch jede ganzzahlige Potenz dieser Zahl $\equiv 1 \pmod{x}$ ist.

Da die Zahl $(80c_2+1)\cdot {}^2u$, die die beiden letzten Stellen mit ${}^3u$ gemein hat, $\equiv {}^2u \pmod{20}$ ist, so folgt ${}^3u \equiv {}^2u \pmod{20}$. Daraus ergiebt sich nach (R I), dafs die beiden um einen Grad höheren Abundanzen: ${}^4u$ und ${}^3u$ die beiden letzten Stellen gemein haben, also ${}^4u \equiv {}^3u \pmod{100}$. Hieraus: ${}^5u \equiv {}^4u \pmod{1000}$, und erst recht: ${}^5u \equiv {}^4u \pmod{500}$. Hieraus: ${}^6u \equiv {}^5u \pmod{10000}$ u. s. w.

Allgemein folgt der Satz:

Die $n$te Abundanz einer nicht durch 5 teilbaren Zahl von der Form $(4m+3)$ hat mit allen höheren Abundanzen die letzten $(n-1)$ Stellen gemein.

Um also die n letzten Stellen einer beliebig hohen, solchen Abundanz zu berechnen, braucht man höchstens bis zur $(n+1)$ten Abundanz vorzugehen, und kann sich bei der jedes Mal um einen Grad niedrigeren Abundanz auf die Ausrechnung einer jedes Mal um 1 kleineren Anzahl von Stellen beschränken. (Nur darf man nie weniger als 2 Stellen berechnen.) u^3 liefert die letzte Stelle aller Abundanzen von höherem als dem ersten Grade. u hoch [Rest ${}^2u \pmod{20}$] liefert

die zwei letzten Stellen α_2 aller Abundanzen von höherem als dem zweiten Grade, also auch von $^{\infty}u$. u^{α_2} liefert 3 Stellen α_3, u^{α_3} vier Stellen α_4 etc. von $^{\infty}u$. $^{\infty}u$ hat mit ^{n}u $(u-1)$ Stellen gemein.

Beispiel: $m = 0$, $u = 3$.

Die angegebenen Potenzen von 9 können mit Vorteil benutzt werden; man findet die folgende Abundanzentafel:

$^{1}3$	3
$^{2}3$	27
$^{3}3 \cdots$	55974849387
$^{4}3 \cdots$	6100739387
$^{5}3 \cdots$	966035387
$^{6}3 \cdots$	51265395387
$^{7}3 \cdots$	2700195387
$^{8}3 \cdots$	5004195387
$^{9}3 \cdots$	754195387
$^{10}3 \cdots$	5964195387
$^{11}3 \cdots$	1964195387
∞	

Die Treppe, unter der die für alle folgenden Abundanzen gemeinsamen Zahlen stehen, ist im Vergleich zur Tafel für 9 um eine Stufe nach höheren Abundanzen hin verschoben. Da $27 \equiv 7 \pmod{20}$ ist, liefert 3^7 die zwei letzten Stellen aller Abundanzen von höherem als dem zweiten Grade: 87. 3^{87} liefert die drei letzten Stellen der Abundanzen von höherem als dem dritten Grad u. s. w. Der Überschufs einer unmittelbar unter einer Treppenstufe stehenden Ziffer über die über ihr stehende Ziffer, die „Treppendifferenz", ist nicht konstant, wie es bei der Abundanzenbasis 9 der Fall war, sondern alterniert zwischen 4 und 6, wie es auch die letzte Stelle der Potenzen einer auf 4 endigenden Zahl thut. Der Beweis kann in analoger Weise wie der entsprechende im Falle der Basis 9 geführt werden unter Benutzung der Thatsachen, dafs $3^{4 \cdot 10^r}$ auf $(8 \cdot 10^{r+1} + 1)$ und $3^{6 \cdot 10^r + 1}$ auf $(2 \cdot 10^{r+2} + 1)$ endigen (gültig von $r = 0$ an).

Dafs die abgeleiteten Regelmäfsigkeiten nur eine untere Grenze darstellen und beträchtlich übertroffen werden können, zeigt das Beispiel der Abundanzenbasis 7. Es ist nämlich $7^4 = 2401$, so dafs eine Multiplikation mit 7^4 bereits die zwei letzten Stellen des Multiplikanden im Produkt wiederholt. (Das gleiche Verhalten zeigen alle Zahlen der Form $(50c \pm 7)$, wie die Ausführung der 4. Potenz sofort klarlegt.)

Da in $7^4 = 24 \cdot 100 + 1$ die Zahl 24 den Faktor 2^3 enthält, können die Ableitungen von S. 35 und 36 unmittelbar hierher übertragen werden, und die Beziehungen (R I) ändern sich nur insofern, als die Anzahlen der bestimmbaren letzten Stellen der Potenz um 1 zu vergröfsern sind. Man erhält also:

Die 2 letzten Stellen von 7^e sind dieselben wie in $7^{\text{Rest } e \pmod 4}$, und man braucht von e nur die 2 letzten Stellen zu kennen,

die 3 letzten Stellen von 7^e sind dieselben wie in $7^{\text{Rest } e \pmod{20}}$, und man braucht von e nur die 2 letzten Stellen zu kennen,

die 4 letzten Stellen von 7^e sind dieselben wie in $7^{\text{Rest}\, e \,(\text{mod}\, 100)}$, und man braucht von e nur die 2 letzten Stellen zu kennen,

allgemein: die $(5 + r)$ letzten Stellen von 7^e sind dieselben wie in $7^{\text{Rest}\, e \left(\text{mod}\, \frac{10^{r+3}}{2}\right)}$, und man braucht von e nur die $(r + 3)$ letzten Stellen zu kennen,

gültig von $r = 0$ an.

${}^{2}7 = 7^7$ hat also dieselben 2 letzten Stellen wie 7^3. Diese sind 43. Da $43 \equiv 7 \equiv 3 \pmod 4$ ist, so hat auch die nächst höhere Abundanz ${}^{3}7 = 7^{\cdots\cdots 43}$ die beiden letzten Stellen 43.

Nun ist also ${}^{3}7 \equiv {}^{2}7 \pmod{100}$, woraus folgt, daſs ${}^{4}7$ und ${}^{3}7$, die nächst höheren Abundanzen, deren Exponenten ${}^{3}7$ und ${}^{2}7$ sind, die 4 letzten Stellen mit einander gemein haben. Da also ${}^{4}7 \equiv {}^{3}7 \pmod{10^4}$ und erst recht ${}^{4}7 \equiv {}^{3}7 \left(\text{mod}\, \frac{10^4}{2}\right)$ ist, haben ${}^{5}7$ und ${}^{4}7$ die 6 letzten Stellen miteinander gemein.

Allgemein: Die n-te Abundanz von 7 hat mit allen höheren Abundanzen die $2(n - 1)$ letzten Stellen gemein.

Stellen wir also hier wieder in der früheren Form eine Abundanzentafel auf, so wird eine Treppenstufe zwei Stellen breit.

$$
\begin{array}{lr}
{}^{1}7 & 6 \\
{}^{2}7 & 823543 \\
{}^{3}7 \cdots\cdots & 2870132343 \\
{}^{4}7 \cdots\cdots & 2733172343 \\
{}^{5}7 \cdots\cdots & 5965172343 \\
{}^{6}7 \cdots\cdots & 1565172343 \\
\swarrow & \\
\infty &
\end{array}
$$

Von den nunmehr zweistelligen Treppendifferenzen entsteht jede aus der vorhergehenden durch Multiplikation mit 8 (nur empirisch gefunden). Die letzte Stelle der Treppendifferenz wiederholt sich dann in einer viergliedrigen, das Paar der beiden letzten Stellen in einer zwanziggliedrigen Periode, wie aus der unten folgenden Untersuchung der letzten Stellen der Potenzen gerader Zahlen ersichtlich. ${}^{2}7$ hat eine passende Gröſse, so daſs man, ohne allzuvielstellige Logarithmen zu Hülfe nehmen zu müssen, auch die Stellenzahl und die ersten Stellen von ${}^{3}7$ angeben kann. Man findet so:

$${}^{3}7 = 3 \cdots\cdots\cdots 2870132343,$$

wo die Punkte 695953 Stellen bedeuten, die aus Raummangel, und nicht nur deshalb, wegbleiben müssen. Die zweite Stelle von vorn ist 8 oder 9.

Fall II. Potenzen und Abundanzen gerader, nicht durch 5 teilbarer Zahlen.

In der grundlegenden Bedingung: $b^n \equiv 1 \left(\text{mod}\, \frac{10^m}{s}\right)$ dafür, daſs durch Multiplikation mit b^n die m letzten Stellen der Potenz b^e nicht geändert werden sollen, muſs s, der 10^m und b^e gemeinschaftliche

Faktor, eine Potenz von 2 sein, und da b^r wie b eine gerade Zahl sein mufs, mufs $\frac{10^m}{s}$ eine ungerade Zahl sein, was nur möglich ist, wenn $s = 2^m$ ist. Die multiplizierte Potenz b^e mufs also so hoch gewählt werden, dafs sie den Faktor 2^m enthält. Die Kombination der letzten m Stellen niedrigerer Potenzen von b kann in keiner höheren Potenz wieder vorkommen. Die obige Bedingung für b^n erhält also die Form:

$$b^n \equiv 1 \pmod{5^m}.$$

Der Euler'sche Satz (S. 35) liefert $n = \varphi(5^m) = 4 \cdot 5^{m-1}$; doch können auch hier schon kleinere Werte von n der Bedingung genügen.

Für $m = 1$ genügt $n = 4$ der Bedingung nach dem Fermat'schen Satze: $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$, wo p eine in a nicht enthaltene Primzahl ist. Da b^4 eine gerade Zahl sein mufs, also nicht auf 1 endigen kann, mufs es auf 6 endigen. Spätestens die 4. Potenzen aller geraden Zahlen endigen also auf 6, und, mit ihnen multipliziert, ändert sich eine gerade Zahl in der letzten Stelle nicht. Bei Zahlen, die auf 2 oder 8 endigen, mufs man in der That bis zur vierten Potenz gehen, um eine auf 6 endigende Zahl zu erhalten; bei auf 4 schliefsenden genügt das Quadrat, bei auf 6 endigenden die erste Potenz. Dafs eine gerade Zahl durch Multiplikation mit einer auf 6 endigenden Zahl in der letzten Stelle nicht geändert wird, ist auch direkt einzusehen, da $2m(10c+6) = 2m(5c_1+1) = 10c_1 m + 2m \equiv 2m \pmod{10}$ ist. Endige also b^r auf 6, wo $r = 4$, 2 oder 1 sein kann, und sei mithin $b^r = (5c+1)$, so ist die Bedingung dafür, dafs durch Multiplikation mit einer Potenz von b^r eine Potenz b^e in ihren m letzten Stellen nicht verändert werde:

$$b^{rq} \equiv 1 \pmod{5}.$$

Dieser Bedingung genügt $q = 5^{m-1}$; denn $(1+5c)^{[5^{m-1}]} = 1 + c \cdot 5^m + \binom{5^{m-1}}{2} 5^2 c^2 + \cdots + \binom{5^{m-1}}{k} 5^k c^k + \cdots$ dies ist $\equiv 1 \pmod{5^m}$, da in den Binomialkoeffizienten $\binom{5^{m-1}}{k}$ die Faktoren 5 viel langsamer abnehmen, als sie in den Potenzen 5^k neu hinzutreten.

(*R*II) Multipliziert man also eine Potenz b^r, die den Faktor 2^m enthält, mit $b^{(r \cdot 5^{m-1})}$, so werden dadurch die m letzten Stellen nicht verändert; dabei ist $r = 1$ für Zahlen von der Form $(10c+6)$, $r = 2$ für Zahlen von der Form $(10c+4)$ und $r = 4$ für Zahlen von der Form $(10c \pm 2)$. Und umgekehrt hat eine Potenz b^E dieselben m letzten Stellen wie $b^R = b^{\text{Rest } E \,[\text{mod } (r \cdot 5^{m-1})]}$, wenn diese den Faktor 2^m besitzt.

Ist diese Bedingung nicht erfüllt, so ist b^R so oft mit $b^{(r \cdot 5^{m-1})}$ zu multiplizieren, bis es der Fall ist. Man braucht also, um m Stellen der Potenz finden zu können, μ Stellen des Exponenten zu kennen; und zwar sind zusammengehörige Werte von m und μ

A; im Fall: $b = 10c + 6$: $m = 1$, $\mu = 0$; $m = 2$, $\mu = 1$ ...
$m = n$, $\mu = n - 1$, gültig von $n = 1$ an

B; im Fall: $b = 10c + 4$: $m = 1$, $\mu = 1$; $m = 2$, $\mu = 1$ ...
$m = n$ $\mu = n - 1$, gültig von $n = 2$ an

C; im Fall: $b = 10c \pm 2$: $m = 1$, $\mu = 2$; $m = 2$, $\mu = 2$; $m = 3$, $\mu = 2$;
$m = n$ $\mu = n - 1$, gültig von $n = 3$ an.

Die Abundanzen.

II A. Zahlen von der Form $b = 10c + 6$.

In den Beziehungen [RII] ist $r = 1$. Alle Abundanzen endigen wie alle Potenzen auf 6. Da demnach ${}^2b \equiv {}^1b \equiv 6 \pmod{10}$, also erst recht ${}^2b \equiv {}^1b \equiv 1 \pmod{5^1}$ ist, folgt nach (RII), dafs ${}^3b$ und ${}^2b$ wenigstens die zwei letzten Stellen gemein haben. Diese zwei Stellen liefert ${}^2b = (10c+6)^{(10c+6)}$, aber auch schon $(10c+6)^6$, da $10c + 6 \equiv 6 \pmod{5^1}$ und $(10c + 6)^6$ sicher den Faktor 2^2 enthält. Ist c ungerade, so enthält schon $(10c+6)^1$ den Faktor 2^2 und da auch $10c+6 \equiv 1 \pmod{5^1}$, so hat in diesem Falle schon die Basis $(10c + 6)$ selbst die zwei letzten Stellen mit allen höheren Abundanzen gemein; dann ist also ${}^2b \equiv {}^1b \pmod{100}$ und erst recht ${}^3b \equiv {}^1b \pmod{5^2}$, so dafs ${}^3b$ und ${}^2b$ die 3 letzten Stellen gemein haben u. s. w. Für c ungerade, also für $b = (20c_1 + 16)$ folgt mithin: Die $n$te Abundanz hat mit jeder höheren wenigstens $(n + 1)$ Stellen gemein. Für c gerade, also für $b = (20c + 6)$ dagegen folgt zunächst: Die $n$te Abundanz hat mit jeder höheren n Stellen gemein. Das bleibt auch für $n = 1$ in der That allgemein gültig. Für höhere Werte von n treten aber auch hier höhere Regelmäfsigkeiten auf, wie leicht nachzuweisen. ${}^2b$ hat bereits 3 Stellen mit ${}^3b$ gemein. Um dies zu erkennen, mufs man die beiden letzten Stellen von ${}^2b$ und ${}^1b$ kennen. Diejenigen von ${}^2b$ liefert b^6. Da $b^5 \equiv 1 \pmod{5^2}$ nach (R) sein und als höhere Potenz einer geraden Zahl durch 4 teilbar sein mufs, so kann b^5 nur auf 76 endigen. Da aber $(10c + 6) \cdot 76 \equiv (10c + 6) \pmod{25}$ ist, so folgt, dafs das Produkt $b \cdot 76$ (das mit b^6, also auch mit ${}^2b$, die beiden letzten Stellen gemein hat) $\equiv b \pmod{5^2}$ ist. Da also ${}^2b \equiv {}^1b \pmod{5^2}$ ist, haben nach (RII) ${}^3b$ und ${}^2b$ die drei letzten Stellen gemein. Hieraus folgt wieder, dafs ${}^4b$ und ${}^3b$ die vier letzten Stellen gemein haben u. s. f. Es gilt also allgemein:

Die $n$te Abundanz einer Zahl von der Form $(20c+6)$ hat mit allen höheren Abundanzen $(n+1)$ Stellen gemein (gültig von $n=2$ ab), wie es für die Zahlen von der Form $b=(20c+16)$ schon von $n=1$ ab gilt. Ein Beispiel für den Fall $b=(20c+6)$ bietet die kleinste Zahl der Gruppe, die Zahl 6 selbst, deren Abundanzentafel nebenstehenden Beginn zeigt. Die Rechnung ist hier viel unbequemer als bei den ungeraden Zahlen, die die an Nullen reichen Multiplikatoren aufweisen. Die „Treppendifferenz" scheint auch hier wie die letzten Stellen der Potenzen von 8 fortzuschreiten.

$$\begin{array}{lr}
{}^{1}6 & \overline{6} \\
{}^{2}6 & 46\boxed{6}56 \\
{}^{3}6 \ldots\ldots & 47\boxed{8}656 \\
{}^{4}6 \ldots\ldots & 0\boxed{3}8656 \\
{}^{5}6 \ldots\ldots & \boxed{8}38656 \\
 & \infty
\end{array}$$

II B. Zahlen von der Form $b=10c+4$.

Hier ist $r=2$. Da alle geraden Potenzen dieser Zahlen auf 6 endigen, jede Abundanz aufser der ersten aber eine geradzahlige Potenz der Basis ist, so endigen alle Abundanzen von höherem als dem ersten Grad auf 6, sie sind also wenigstens $\equiv [\mathrm{mod}\,(2\cdot 5^1)]$, woraus nach ($R$II) folgt, dafs alle um einen Grad höheren Abundanzen (weil sie die vorher genannten zu Potenzexponenten haben) die letzten 2 Stellen gemein haben. Setzt man denselben Beweisgang fort, so folgt: Die $n$te Abundanz einer Zahl von der Form $(10c+4)$ hat $(n-1)$ Stellen mit jeder höheren Abundanz gemein. Hier sind höhere Regelmäfsigkeiten ausgeschlossen. Sollte z. B. ${}^{2}b$ schon zwei Stellen mit ${}^{3}b$ gemein haben, so müfste (siehe (RII)) ${}^{2}b \equiv {}^{1}b \pmod{10}$ sein, was unmöglich ist, da ${}^{1}b$ auf 4, ${}^{2}b$ auf 6 endigt. Auch ${}^{3}b$ kann nicht 3 Stellen mit ${}^{4}b$ gemein haben; denn hierzu müfste nach (RII) ${}^{3}b \equiv {}^{2}b \pmod{50}$ sein, dies ist aber unmöglich, weil nicht ${}^{3}b \equiv {}^{2}b \pmod{100}$ sein kann, wie wir soeben sahen, und die vorletzte Stelle in ${}^{3}b$ sowohl wie in ${}^{2}b$ ungerade sein mufs; denn sie endigen beide auf 6 und müssen als höhere Potenzen einer geraden Zahl durch 4 teilbar sein. Analog folgt, dafs ${}^{4}b$ nicht mit ${}^{5}b$ 4 Stellen gemein haben kann, weil nicht ${}^{3}b \equiv {}^{4}b \pmod{250}$ sein kann, wie es nach (R) gefordert werden müfste; denn sie können nicht $\equiv \mathrm{mod}\,(1000)$ sein, wie wir eben sahen; sie selbst wie ihre Differenz müssen aber, als hohe Potenzen einer geraden Zahl, durch 8 teilbar sein ... u. s. w. Die Regelmäfsigkeiten dieser Gruppe entsprechen also denjenigen der ungeraden nicht durch 5 teilbaren Zahlen im ungünstigsten Falle $(b=4m+3)$. Als Beispiel diene $b=4$. Man erhält die neben stehende Abundanzentafel.

$$\begin{array}{lr}
{}^{1}4 & 4 \\
{}^{2}4 & 25\boxed{6} \\
{}^{3}4 \ldots & 0840\boxed{9}6 \\
{}^{4}4 \ldots & 392\boxed{8}96 \\
{}^{5}4 \ldots & 20\boxed{8}896 \\
{}^{6}4 \ldots & 3\boxed{2}8896 \\
{}^{7}4 \ldots & \boxed{7}28896 \\
 & \infty
\end{array}$$

Die Treppendifferenz schreitet fort wie die letzte Stelle der Potenzen von 2.

II C. Zahlen von der Form $b = 10c \pm 2$.

Hier ist $r = 4$. Hier liefert erst die 4te Potenz von b eine auf 6 endigende Zahl, und wenn b nicht durch 4 teilbar ist, was für c = gerade Zahl eintritt, so endigt auch die zweite Abundanz noch nicht auf 6. Erst die dritte und mit ihr alle höheren, endigen auf 6, weil die zweite und alle höheren $\equiv 0 \pmod 4$ sind. Da nun die dritte und vierte Abundanz, weil auf 6 endigend und durch 4 teilbar, $\equiv$ (mod 20) sind, folgt aus (RII), dafs die vierte und fünfte Abundanz die zwei letzten Stellen gemein haben, also $\equiv$ (mod 100) sind. Danach haben die 5te uud 6te Abundanz die drei letzten Stellen gemein u. s. f. Allgemein folgt: Bei den Zahlen von der Form $(20c \pm 2)$ hat die $n$te Abundanz mit jeder höheren $(n-2)$ Stellen gemein. Bei den Zahlen von der Form $(20c + 10 \pm 2)$ hat die $n$te Abundanz mit jeder höheren $(n-1)$ Stellen gemein. Beispiele zu beiden Gruppen liefert 2 und 8.

$^{1}2$	2
$^{2}2$	4
$^{3}2$	16
$^{4}2$	6556
$^{5}2$	156736
$^{6}2$	4256736
$^{7}2$	748736
$^{8}2$	9948736

Treppendifferenz = 2.

$^{1}8$	6
$^{2}8$	777216
$^{3}3$	1266556
$^{4}8$	4498856
$^{5}8$	945856
$^{6}8$	825856
$^{7}8$	225856

Die Treppendifferenz schreitet wie die letzte Stelle der Potenzen von 8 fort.

Fall III. Potenzen und Abundanzen ungerader durch 5 teilbarer Zahlen.

$b = 10c + 5$. In der grundlegenden Bedingung $b^n \equiv 1 \left(\text{mod } \frac{10^m}{s}\right)$ dafür, dafs durch Multiplikation mit b^n die m letzten Stellen der Potenz b^e nicht geändert werden sollen, mufs s, der b^e und 10^m gemeinschaftliche Faktor, eine Potenz von 5 sein, und da b^n wie b durch 5 teilbar ist, darf $\frac{10^m}{s}$ den Faktor 5 nicht mehr enthalten. Es mufs also $s = 5^m$ sein. Die multiplizierte Potenz b^e mufs also so hoch gewählt werden, dafs sie den Faktor 5^m enthält. Dann erhält obige Bedingung für b^n die Form

$$b^n \equiv 1 \pmod{2^m}.$$

Schreiben wir b in der Form $b = 2c_1 + 1$, so ist ersichtlich, dafs auch im ungünstigsten Falle, wenn nämlich c_1 den Faktor 2 gar

nicht enthält, $b^{[2^m-1]} \equiv 1 \pmod{2^m}$ ist, da in der Binominalentwicklung

$$(2c_1+1)^{(2^m-1)} = 1 + 2^{m-1} \cdot 2c_1 + \binom{2^m-1}{2}(2c_1)^2 + \cdots \binom{2^m-1}{k}(2c_1)^k \cdots$$

in den aufeinanderfolgenden Summanden die Faktoren 2 aus dem einen Faktor $\binom{2^m-1}{k}$ langsamer ausscheiden, als sie in dem Faktor $(2c_1)^k$ neu hinzukommen. Auch nach dem Eulerschen Satz (S. 35) erhält man $n = 2^{m-1}$.

Im ungünstigsten Falle auch werden durch Multiplikation mit $b^{(2^{m-1})}$ die letzten m Glieder einer Potenz b^e von b nicht verändert, falls b^e den Faktor 5^m enthält. Besitzt in der Darstellung $b = 2c_1 + 1$ c_1 den Faktor 2^r, so wird $b^{(2^{m-1})} \equiv 1 \pmod{2^{m+r}}$ und eine Multiplikation von b^e mit $b^{(2^{m-1})}$ läfst nun die $(m+r)$ letzten Glieder des Multiplikanden uuverändert, wenn b^e durch $5^{(m+r)}$ teilbar ist. Die Unterschiede, die die einzelnen auf 5 endigenden Zahlen in der Wiederholung der letzten Stellen der Abundanzen zeigen, sind, wie nach dem soeben Gesagten zu erwarten, sehr grofs. Selbstverständlich endigen alle diese Abundanzen auf 5, so dafs sie die letzte Stelle immer gemein haben. Dagegen kann die zweite Abundanz sich schon in der vorletzten Stelle von der ersten unterscheiden, wie schon die Zahl 5 selbst zeigt, deren sämtlichen Potenzen und Abundanzen aufser der ersten in der vorletzten Stelle eine 2 zeigen. Die zweite Abundanz aber hat mit der dritten stets wenigstens 4 Stellen gemein. Denn, bilden wir ${}^2b = (10c+5)^{10c+5}$, so genügt es zur Bestimmung der 4 letzten Stellen statt des Exponenten seinen Rest (modulo 8), also $(2c+5)$ zu nehmen. ${}^2b$ hat dieselben 4 letzten Stellen wie $[5(2c+1)]^{(2c+5)}$. Hiervon brauchen wir wieder den Rest (mod 8), um die 4 letzten Stellen von ${}^3b$ bestimmen zu können. ${}^3b$ hat dann dieselben 4 letzten Stellen wie ${}^2b$, wenn sich zeigen läfst, dafs $[5(2c+1)]^{(2c+5)} \equiv (2c+5) \pmod 8$ ist.

Es ist

$$5^{(2c+5)} = (1+4)^{2c+5} = 1 + 4(2c+5) + \cdots = 5 + 8A.$$

$$(2c+1)^{2c+5} = 1 + (2c+5)\,2c + (2c+5)(c+2)\cdot 4c^2 + \cdots$$
$$= 1 + 2c + 4c^2 + 4c^3 + 8B.$$

Also unter Weglassung der Glieder, die offenbar den Faktor 8 enthalten, bleibt im Produkt beider Ausdrücke $5[1 + 2c + 4c^2(1+c)]$ $\equiv (5 + 2c) \pmod 8$, da $4c(1+c)$ stets durch 8 teilbar ist. Danach hat also auch ${}^3b$, wie ${}^2b$, dieselben letzten vier Stellen wie $b^{(5+2c)}$. Die fünftletzte Stelle von ${}^3b$ kann von der in ${}^2b$ verschieden ausfallen. Auch sie wäre gleich derjenigen von ${}^2b$, wenn $(10c+5)^{(10c+5)}$

$\equiv (10c + 5) \pmod{16}$ wäre. Dies ist nun z. B. für $c = 3$ nicht der Fall; denn $35^{35} \equiv 3^{35} \pmod{16}$. Und da $3^4 \equiv 1 \pmod{16}$ ist, folgt $35^{35} \equiv 3^3 \equiv 11 \pmod{16}$, während 35 selbst $\equiv 3 \pmod{16}$ ist. Bei Zahlen von der Form $(40c + 35)$ hat also die zweite Abundanz mit den höheren nur die 4 letzten Stellen gemein. Bei Zahlen von der Form $(80c + 15)$ dagegen stimmt die zweite Abundanz mit den höheren wenigstens in den 6 letzten Stellen überein.

Anhang.

Beziehungen der Potenzen und Abundanzen bei anderer Wahl des Zahlensystemes.[1]

Es ist zu erwarten, dafs ähnliche Beziehungen, wie wir sie hier für die letzten Stellen der Potenzen und Abundanzen im Zehnersystem, d. h. also für ihre Reste $[\mathrm{mod}\,(2^m \cdot 5^n)]$, abgeleitet haben, auch bezüglich anderer Teiler bestehen werden, die in entsprechenden Beziehungen der letzten Stellen zum Ausdruck kämen, wenn man statt des Zehnersystemes ein anderes Zahlensystem zu Grunde legte.

Sei die Basis des Zahlensystemes z und die Basis der Potenzen, bezw. Abundanzen a. z lasse sich als ein Produkt $k \cdot \zeta$ darstellen, wo ζ die gröfste Zahl ist, die mit a keinen Faktor mehr gemein hat, so dafs also k keinen Primfaktor besitzt, der nicht auch in a enthalten wäre. Soll nun eine Potenz a^n gesucht werden von der Art, dafs mit ihr multipliziert die letzten m Stellen der Potenz a^e, — alles in dem betreffenden Zahlensystem mit der Basis z geschrieben — sich nicht ändern, so mufs $a^n \cdot a^e - a^e = c \cdot z^m = c \cdot k^m \cdot \zeta^m$ sein. Da alle Primfaktoren von k in a enthalten sind, kann die Zahl e immer so grofs gewählt werden, dafs k^m in a^e enthalten ist. Dann braucht nur noch a^n so bestimmt zu werden, dafs $a^n \equiv 1 \pmod{\zeta^m}$ ist. Hat ζ, in seine Primfaktoren zerlegt, die Form $\zeta = l^\lambda \cdot r^\varrho \cdot n^\nu \cdots$, so ist nach dem Euler'schen Satz (siehe S. 35) die Potenz

$$a^{\varphi(\zeta)} = a^{(l-1)\,l^{\lambda-1}\cdot(r-1)\,r^{\varrho-1}\cdot(n-1)\,n^{\nu-1}\cdots} \equiv 1 \pmod{\zeta}$$

und hat die Eigenschaft, dafs, mit ihr multipliziert, eine Potenz a^e, die den Faktor k enthält, in der letzten Stelle nicht verändert wird. Es ist also

$$a^{\varphi(\zeta)} = c_1 \zeta + 1.$$

Hieraus folgt:

$$a^{\varphi(\zeta)\zeta^{m-1}} = c_2 \zeta^m + 1 \equiv 1 \pmod{\zeta^m}$$

$$\varphi(\zeta)\,\zeta^{m-1} = (l-1)\,l^{m\lambda-1}\cdot(r-1)\,r^{m\varrho-1}\cdot(n-1)\,n^{m\nu-1}\cdots$$

1) Die Behandlung dieser Frage schlug mir Herr Schubert vor, als ich die vorhergehenden Resultate in der mathematischen Gesellschaft in Hamburg mitgeteilt hatte.

Mit $a^{\varphi(\zeta)\zeta^{m-1}}$ multipliziert, ändert sich also eine Potenz a^e, die den Faktor k^m enthält, in den letzten m Stellen nicht.

Natürlich stellt die Potenz $a^{\varphi(\zeta)\zeta^{m-1}}$ eine obere Grenze für den geforderten Multiplikator dar, und es können schon beträchtlich niedrigere Potenzen die Aufgabe lösen.

Beispiel: $z = 12$, $a = 7$, $m = 2$.

Man findet

$$k = 1,\ \zeta = 2^2 \cdot 3;\ l = 2,\ \lambda = 2,\ r = 3,\ \varrho = 1.$$

$$\varphi(\zeta)\zeta^{m-1} = 2^3 \cdot 2 \cdot 3 = 48.$$

Also

$$7^{48} \equiv 1 \pmod{12^2}.$$

In der That ist ja $7^4 = 2401 = (1 + 200 \cdot 12)$, so dafs $7^{48} = (1 + 200 \cdot 12)^1 \equiv 1 \pmod{12^2}$. Indessen würde bereits 7^6 ausreichen, da $7^2 = 49 = 1 + 4 \cdot 12$ und $7^6 = (1 + 4 \,.\, 12)^3 \equiv 1 \pmod{12^2}$.

Einen Teil der möglichen Vereinfachungen erreicht man dadurch, dafs man für $\varphi(\zeta)$ an Stelle des Produktes der Faktoren $[(l-1)\,l^{\lambda-1}] \cdot [(r-1)\,r^{\varrho-1}]$ etc. ihren kleinsten gemeinschaftlichen Dividenden setzt; denn auch dieser erfüllt das Verlangte, da die Potenz von a, deren Exponent er ist, sowohl als Potenz von $a^{(l-1)l^{\lambda-1}}$, als auch von $a^{(r-1)r^{\varrho-1}}$ aufgefafst werden kann, mithin $\equiv 1$ sowohl mod l^λ als auch mod r^ϱ u. s. w. und damit auch mod $[l^\lambda \cdot r^\varrho \cdots]$ ist, weil ja l^λ und r^ϱ u. s. w. keine gemeinschaftlichen Teiler haben.

Damit lautet das Resultat, kurz zusammengefafst, so:

Ist die beliebige Zahl $z = k \cdot \zeta$, wo ζ, in seine Primfaktoren zerlegt $\zeta = l^\lambda \cdot r^\varrho \cdot n^\nu \cdots$, der gröfste Teiler von z ist, der keinen Primfaktor mit einer sonst beliebigen Zahl a gemein hat, so bestimme man $\psi(\zeta)$, den kleinsten gemeinschaftlichen Dividenden der Gröfsen

$$[(l-1)\,l^{\lambda-1}]\ [(r-1)\,r^{\varrho-1}]\ [(n-1)\,n^{\nu-1}] \text{ etc.:}$$

dann ist

$$a^e \cdot a^{\psi(\zeta)\zeta^{(m-1)}} \equiv a^e \pmod{z^m},$$

wenn nur e hoch genug gewählt ist, so dafs a^e den Faktor l^m enthält.

Macht man speziell z zur Basis des Zahlensystems, so haben a^e und $a^e \cdot a^{\psi(\zeta)\zeta^{(m-1)}}$ die letzten m Stellen gemein.

Der Satz wird zum Euler'schen für $k = 1$, $e = 0$, $m = 1$, wenn man statt des kleinsten gemeinschaftlichen Dividenden $\psi(\zeta)$ das Produkt $\varphi(\zeta)$ der Gröfsen $[(l-1)\,l^{\lambda-1}]$ etc. einführt.

Eine andere Thatsache, die erhebliche Vereinfachungen veranlafst, ist die folgende:

Enthält die Basis des Zahlensystems aufser den ungeraden Primfaktoren lr etc. irgend wieviel mal den Faktor 2, so ist, wenn a eine ungerade Potenzbasis ist, die den Faktor l nicht enthält, nach Fermat $a^{l-1} \equiv 1 \pmod{l}$; diese selbe Potenz ist bereits aber auch $\equiv 1 \pmod{2^3}$, da $(l-1)$ eine gerade Zahl ist, und schon das Quadrat jeder ungeraden Zahl $(2c+1)^2 = 4c(c+1)+1 \equiv 1 \pmod{8}$ ist. Eine Erhöhung dieser Potenz a^x, um die Faktoren 2 der Zahlenbasis in $(a^x - 1)$ unterzubringen, ist also nur dann nötig, wenn die betreffende Potenz der Zahlenbasis den Faktor 2^e enthält, wo $e > 3$ ist.

Die Untersuchung des Verhaltens der letzten Stellen der Potenzen war für die Lehre von den Abundanzen deshalb von Bedeutung, weil es uns im Zehnersystem dadurch möglich war, aus den letzten Stellen einer Abundanz, ohne ihre vorhergehenden Stellen zu kennen, auf die letzten Stellen der nächst höheren Abundanz zu schliefsen. Um solche Schlüsse durchzuführen, brauchten wir nur den Rest einer Abundanz bezüglich gewisser Teiler zu kennen, und hierzu wiederum war nur die Kenntnis einer beschränkten Stellenanzahl nötig, weil diese Teiler in einer gewissen Potenz von 10 ohne Rest enthalten waren. Dergleichen findet aber nicht in allen Zahlensystemen statt. Ist die Basis des Zahlensystemes $z = l^\lambda \cdot r^\varrho \cdot n^\nu \cdots$, wo l, r und $n \cdots$ Primfaktoren sind, so enthalten die Divisoren, bezüglich deren die Reste der Exponenten zu bilden sind, die Faktoren $(l-1)$, $(r-1)$, $(n-1)$ u. s. w. Soll also eine beschränkte Stellenzahl zur Bestimmung des Restes ausreichen, so müssen $(l-1)$, $(r-1)$, $(n-1)$ u. s. w. in einer Potenz von z ohne Rest enthalten sein. Da $(l-1)$ (aufser für $l=2$) in keiner Potenz von l enthalten sein kann, so müssen die anderen Faktoren der Zahlenbasis dies ermöglichen. Enthält also eine Zahlenbasis irgend einen ungeraden Primfaktor l, so mufs sie wenigstens auch den Faktor 2 enthalten, wenn solche Regelmäfsigkeiten der letzten Stellen der Abundanzen, wie die im Zehnersystem abgeleiteten, benutzbar sein sollen, da dann $(l-1)$ den Faktor 2 enthält. Im Zahlensystem mit der Basis 15 z. B. sind solche Regelmäfsigkeiten nicht wie im Zehnersystem verwendbar, da weder $(3-1)$ in einer Potenz von 5 noch $(5-1)$ in einer Potenz von 3 enthalten ist. Das Zwölfersystem $(12 = 2 \cdot 2 \cdot 3)$ wird solche Regelmäfsigkeiten zeigen, da sowohl $(3-1)$ in 2, also auch $(2-1)$ in 3 enthalten ist. Beim Vierzehnersystem versagt die Methode wieder, da $7 - 1 = 2 \cdot 3$ nicht in einer Potenz von 2 enthalten ist. (Es würde freilich auch hier nach Fermat $a^6 \equiv 1 \pmod{14}$ sein, wenn a ungerade und nicht durch 7 teilbar ist; um

aber den Rest einer solchen Zahl e (mod 6) zu erkennen, reichte, im Vierzehnersystem geschrieben, nicht eine beschränkte Zahl von Stellen aus, sondern man müfste die ganze Zahl e kennen.) Fügen wir aber der Zahlenbasis $(7 \cdot 2)$ noch den fehlenden Faktor 3 hinzu, nehmen also 42 als Basis des Zahlensystems, so wird wiederum die Berechnung der letzten Stellen der höheren Abundanzen, in diesem Zahlensystem geschrieben, möglich.

Ist die Basis eines Zahlensystems eine ungerade Primzahl p oder eine Potenz einer solchen, so müssen zur Berechnung des Restes einer Zahl e (mod $(p-1)$) bereits alle Stellen von e bekannt sein. Also schon in einem Zahlensystem mit der Basis 3 würde die Berechnung der letzten Stellen einer höheren Abundanz von 2 nach der am Zehnersystem gezeigten Methode auf unüberwindliche technische Schwierigkeiten stofsen.

Drücken wir die Thatsache, dafs zwei Zahlen, in einem Zahlensystem mit der Basis z geschrieben, die c letzten Stellen gemein haben, so aus: sie lassen denselben Rest (mod z^c), so können wir das Vorstehende in folgender Weise zusammenfassen: Die Reste einer beliebig hohen Abundanz einer Basis a (modulo z^c) [c eine ganze, nicht allzu grofse Zahl] können nach der dargelegten Methode gefunden werden, wenn bei der Zerlegung von z in ein Produkt zweier ganzer Zahlen $z = k \cdot \zeta$ in der Art, dafs ζ die gröfste Zahl ist, die keinen Faktor mit a gemein hat, ζ die Eigenschaft besitzt, dafs jeder seiner Primfaktoren, um 1 vermindert, in einer Potenz von z ohne Rest enthalten ist.

Hamburg, Juni 1900.

Die Anzahl von Punkten, Geraden, Ebenen, u. s. w. in den linearen Räumen höherer Ordnung.

Von P. H. Schoute in Groningen.

In der vierten Auflage der ersten Abteilung seiner „Geometrie der Lage“ hat Dr. Th. Reye, von der Voraussetzung, die Anzahl der Punkte einer Geraden sei $n+1$, ausgehend, die Anzahl der Punkte, Geraden und Ebenen des Raumes bestimmt. In den folgenden Zeilen will ich seine Resultate auf den m-dimensionalen Raum R_m ausdehnen.

Von der nämlichen Voraussetzung aus komme ich ganz allgemein für die Anzahl A_p^m der linearen Räume R_p von p Dimensionen, ent-

halten in einem gegebenen linearen Raum R_m von m Dimensionen, wobei selbstverständlich $p \leqq m$ ist, zu dem Ausdrucke:

$$(1) \cdots\cdots A_p^m = \frac{(n^{m+1}-1)(n^m-1)(n^{m-1}-1)\cdots(n^{m-p+1}-1)}{(n^{p+1}-1)(n^p-1)(n^{p-1}-1)\cdots(n-1)}.$$

Der Beweis wird leicht mittels einer Rekursionsformel erbracht, welche aus drei Hilfssätzen hervorgeht.

Erster Hilfssatz: Der Raum R_q enthält $\frac{n^{q+1}-1}{n-1}$ Punkte.

Ist der Raum R_{q-1} gegeben und P irgend ein aufserhalb R_{q-1} liegender Punkt, so findet man die Anzahl der in dem von R_{q-1} und P bestimmten Raume R_q liegenden Punkte, indem man die Punkte von allen in R_q liegenden und durch P gehenden Geraden zählt. Da jede dieser Geraden mit R_{q-1} einen Punkt gemein hat, ist ihre Anzahl der Anzahl der in R_{q-1} enthaltenen Punkte gleich. Weil jede dieser Geraden aufser P noch n Punkte zählt, findet man die Beziehung $A_0^q = nA_0^{q-1} + 1$. Und diese führt, da der Voraussetzung nach $A_0^1 = n + 1$ ist, zum Resultate

$$A_0^q = n^q + n^{q-1} + \cdots + n + 1 = \frac{n^{q+1}-1}{n-1}.$$

Zweiter Hilfssatz: Der Raum R_q enthält ebenso $\frac{n^{q+1}-1}{n-1}$ Räume R_{q-1}.

Denn nach den Gesetzen der Dualität ist $A^q{}_{q-1} = A^q{}_0$.

Dritter Hilfssatz: Der Raum R_q enthält n^q nicht durch einen gegebenen Punkt P von R_q hindurch gehende Räume R_{q-1}.

Jeder durch P gehende Raum R_{q-1} von R_q schneidet irgend einen willkürlich in R_q angenommenen, nicht durch P hindurch gehenden R_{q-1} in einem R_{q-2}; also ist die Anzahl der durch P gehenden Räume R_{q-1} von R_q gleich A_{q-2}^{q-1}, d. h. nach dem zweiten Hilfssatze gleich A_0^{q-1}. Also ergiebt sich dnrch Subtraktion für die gefragte Anzahl:

$$A_0^q - A_0^{q-1} = \frac{n^{q+1}-1}{n-1} - \frac{n^q-1}{n-1} = \frac{n^{q+1}-n^q}{n-1} = n^q.$$

Allgemeine Rekursionsformel. Man hat die Beziehung

$$(2) \cdots\cdots A_r^q = A_{r-1}^{q-1} + n^{r+1} A_r^{q-1}.$$

Diese Gleichnng wird gefunden, indem man die Gruppe der in R_q enthaltenen R_r in zwei ungleichwertige Gruppen zerlegt. Ist nämlich P irgend ein Punkt von R_q, so kann man nach einander die durch P und die nicht durch P hindurch gehenden R_r von R_q betrachten. Die durch P gehenden R_r von R_q schneiden irgend einen nicht durch P hindurch gehenden R_{q-1} von R_q in einem R_{r-1}; also ist die An-

zahl der durch P gehenden R_r von R_q gleich A_{r-1}^{q-1}. Und jeder nicht durch P hindurch gehende R_r von R_q bestimmt mit P einen R_{r+1} von R_q, welcher nach dem dritten Hilfssatze n^{r+1} nicht durch P hindurch gehende R_r von R_q enthält und den oben angenommenen nicht durch P hindurch gehenden R_{q-1} von R_q in einem R_r schneidet. Deshalb ist die Anzahl dieser R_{r+1} gleich A_r^{q-1} und also die Anzahl der nicht durch P hindurch gehenden R_r von R_q gleich $n^{r+1} A_r^{q-1}$.

Allgemeines Resultat. Die Rekursionsformel (2) gestattet alle A_r^q zu berechnen, wenn alle $A^q{}_{r-1}$ gefunden sind; denn es ist $A_r^r = 1$. Da nun A_0^q bekannt ist, kann man A_p^m berechnen.

Man sieht aber unmittelbar, dafs die Formel (1) der Rekursionsformel (2) Genüge leistet und obendrein für A_r^r und A_0^q die gefundenen Werte liefert. Deshalb u. s. w.

Notiz zur Geschichte der Logarithmentafeln.

Von Edm. Hoppe.

Dem Lehrer wird, auch wenn er nicht die Neigung zu historischen Bemerkungen hat, schon durch die Fragen der Schüler nach der Bedeutung der Namen die Aufgabe erwachsen, mindestens eine sachliche Erklärung zu geben. Gegenwärtig wird in den deutschen Tafeln und Lehrbüchern, so viel ich weifs, ganz allgemein der Logarithmus in die beiden Bestandteile Charakteristik und Mantisse zerlegt. Während nun die Bedeutung des Namens Charakteristik sehr einfach zu erklären ist, habe ich für „Mantisse“ keine gedruckte Erklärung in irgend einem Lehrbuche gefunden. Aus meiner eigenen Schülerzeit erinnere ich mich, dafs der vortreffliche Professor Helmes unsere Frage dahin beantwortete, dafs Mantisse von dem Verbum *μαντίζειν* komme, was anzeigen heifsen solle. Später habe ich auch durch mündliche Bemerkung von anderer Seite gehört, Mantisse komme aus dem Italienischen und heifse Dezimalbruch. Andere Erklärungen sind mir nicht bekannt. Nun giebt es aber 1. kein griechisches Verbum *μαντίζειν*, also kann auch Mantisse nicht davon hergeleitet werden, und 2. giebt es im Italienischen nicht die Bezeichnung Mantissa, also kann es auch nicht Dezimalbruch heifsen. Das war für mich die Veranlassung, einmal genauer diesen beiden Bezeichnungen nachzuforschen.

Was zunächst die Worterklärung angeht, so kommt im klassischen Latein auch kein Wort, welches ähnlich wie Mantisse lautete, vor.

gegen im späteren Latein findet sich mantisa, z. B. als ein overbium Lucilii: Mantisa obsonia vincit = das Unnütze ist stärker s das Gute. Da Mantisa die Bedeutung des „minderwertigen Zutzes“ hat,[1]) wollte mich diese Worterklärung auch nicht recht bedigen, da die Mantisse für den Logarithmus ja durchaus nicht das inderwertige bedeutet. Nun findet sich zu der Zeit der Einführung r Logarithmen ein terminus technicus, der dem „Mantisse“ recht nlich sieht, und zunächst der Vermutung Raum giebt, dafs Manse aus ihm entstanden sei. In der Astrologie[2]) bezeichnete man it Mantice die durch den Lauf eines Kometen gegebene sachliche deutung seiner Erscheinung, ob er Krieg, oder Brand, oder Seuche etc. deute, während die persönlichen Beziehungen dieser „Bedeutung“ f bestimmte Fürsten oder Völker durch die significatores gegeben aren. Hier ist Mantice offenbar aus *μαντική* entstanden. Ich glaubte hon den Beweis für diese Entstehung des Wortes Mantisse in änden zu haben, als ich in den Keplerschen Tafeln[3]) in dem Unterht über die Logarithmen häufiger die Bezeichnung significatio oder meri significantes fand für die Ziffern vor dem Komma, also für s, was wir Charakteristik nennen, allein vergebens sucht man nach ner Bezeichnung für die Stellen hinter dem Komma. Kepler spricht nur von scrupula, aber hat nie ein eigenes Wort dafür. So ist ese Fährte also aufzugeben.

Die älteren Tafeln sind ja ausnahmslos mit vollen Logarithmen, so mit Charakteristik gedruckt. Das hat sich speziell bei den in eutschland erschienenen Tafeln bis tief in das 18te Jahrhundert nein erhalten; so z. B. bei Chr. Wolf.[4]) Ja es finden sich da noch afeln[5]), welche ohne Komma die Logarithmen mit 10^7 multiplieren, also in gewisser Weise die Art der alten Napierschen Tafeln ieder aufleben lassen. Dafs diese Tafeln keine Veranlassung haben, harakteristik und Mantisse zu unterscheiden, ist selbstverständlich. zwischen war nun aber das Wort Charakteristik bereits eingeführt die Wissenschaft durch keinen Geringeren als den Vater der natür-

1) Totius Latinitatis Lexicon. Ae. Forcellini. Tom IV, p. 46.

2) J. Kepler, Opera omnia. ed. Frisch 1858—71. Bd. VII, p. 25 oder auch: ausführlicher Bericht von dem newlich im Monat Sept. u. Oktob. des 1607. hrs erschienenen Haarstern etc. Gestellet durch J. Kepplern, Hall in chsen 1608.

3) J. Keppler, Chilias logar. Marb. 1624.

4) Chr. Wolf. Anfangsgründe aller mathematischen Wissenschaften. 1710/11, and 2.

5) Wiedeburg, J. B. Einleitung zu den mathemat. Wissenschaften. Jena 35. p. 305.

lichen Logarithmen, N. Mercator.[1]) In seiner berühmten Logarithmotechnica begründet er ausführlich, warum die Stelle vor dem Komma diesen Namen verdient, aber für den Dezimalbruch hat er keine Bezeichnung. Bisweilen redet er wohl von einer mensura für die Dezimalstellen, aber eine feste Nomenclatur findet sich dafür nicht. Von Mercator eingeführt fand die Charakteristik bald allgemeine Annahme, sowohl in England, wie in Deutschland und Frankreich, und auch jene eben erwähnten Herausgeber von Tafeln ohne Komma kennen doch den Wert der Charakteristik und gebrauchen in der Einleitung zu den Tafeln diese Bezeichnung. Wolf giebt sogar die richtigen Vorschriften zum Rechnen mit den Tafeln, als ob er die Charakteristik nicht mit gedruckt hätte.

Fast alle diese Logarithmen-Tafeln waren Abdrücke aus der Vlackschen Tafel von 1633, und unterschieden sich von dieser 10stelligen eigentlich nur dadurch, dass 2 oder 3 Stellen fortgelassen wurden, oft sogar ohne die entsprechenden Erhöhungen der letzten Ziffer. Nebenbei sei bemerkt, dafs dies erste vollständige Logarithmenwerk von Vlack in Europa keine neue Auflage erlebte, dagegen erschien von demselben eine neue Ausgabe 1721 in China (!) in drei stattlichen Foliobänden.[2])

Da im 17ten und 18ten Jahrhundert das Lateinische noch nicht als eine tote Sprache zu betrachten ist, da es von der gelehrten Welt nicht nur geschrieben, sondern auch gesprochen wurde, ist es nicht wunderbar, dafs lateinische Worte damals noch ihre Bedeutung änderten und auch die Schreibweise. Das Wort mantisa hat allmählich den Nebensinn des Minderwertigen, Nebensächlichen und Unnützen verloren, es bedeutet einfach „Anhang" und wird mantissa geschrieben. So steht es in gleicher Bedeutung wie Appendix bei Sturm und anderen.[3]) Jedoch wird es auch bei deutschen Schriftstellern nur selten gebraucht, wenigstens soweit ich die damalige Litteratur kenne. Während nun in England, Frankreich, Italien, soviel mir bekannt ist, bis auf die Gegenwart wohl die Charakteristik, (bisweilen in Abwechslung mit Index, integer numbre) in die logarithmischen Lehrbücher und Tabellenwerke Aufnahme gefunden hat, aber nicht die Mantisse, taucht in Deutschland dies Wort um die Mitte des 18ten Jahrhunderts auf. Soweit ich nach den Schätzen der Ham-

1) N. Mercator. Logarithmo-technica, London 1668. p. 4.

2) Magnus Canon Logarithmorum, tum pro Sinibus ac Tangentibus, ad singula decem secunda, tum pro Numeris absolutis ab unitate ad 100 000. Typis sinensibus in Aula Pekinensi jussu Imperatoris excusus. 1721.

3) J. C. Sturm. Mathesis juvenilis p. 851. Tomus posterior. 1701.

burger Stadtbibliothek feststellen kann, ist Euler der Vater dieser Bezeichnung.[1]) Er führt diesen Namen im § 112 des bezeichneten Werkes mit folgenden Worten ein: Constat ergo Logarithmus quisque ex numero integro et Fractione decimali; et ille numerus integer vocari solet Characteristica; fractio decimalis autem Mantissa — — und in § 113 — — Sola ergo Mantissa indicabit figuras numerum componentes, quibus inventis, ex characteristica patebit, quot figurae a sinistra ad integra referri debeant. — — Die Ausdrucksweise läfst zunächst vermuten, dafs Euler nicht der Erfinder dieser Bezeichnung sei, und inbezug auf Charakteristik ist das ja auch richtig, allein da Euler vier Jahre früher in seiner Theoria motuum planetarum et cometarum wohl von der Charakteristik spricht, aber nicht von der Mantisse, sondern für diese stets Logarithmus oder Decimales numeri gebraucht, so ist das solet wohl nur auf den ersten Teil des Satzes begrifflich zu beziehen und nur formal ist auch die Bezeichnung Mantissa von dem vocari solet abhängig.

So wenig Euler 1744 die Bezeichnung Mantisse gebrauchte, so wenig that er es nach 1748 mit Beharrlichkeit. Freilich ist in dem deutschen Lehrbuche Eulers[2]), welches von Grüson 1796 zurückübersetzt wurde aus der französischen Ausgabe in § 248 die Mantisse mit folgenden Worten eingeführt: . . der andere Teil (hinter dem Komma) aber zeigt die Dezimalbrüche an, die zu dem Ganzen nachgesetzt werden müssen und wird Mantisse genannt. Da Grüson zahlreiche Zusätze gemacht hat und in der französischen Mathematik die Mantisse nicht vorkommt, so vermutete ich in den Worten „und wird Mantisse genannt" einen Grüsonschen Zusatz. Da das Original in unserer Bibliothek nicht vorhanden ist, wandte ich mich nach Leipzig, wo Herr stud. chem. Jaffé die Freundlichkeit hatte, die Ausgabe von 1770, die von der Kays. Akad. in Petersburg herausgegeben ist, einzusehen und zu konstatieren, dafs Mantisse in dieser Ausgabe nicht vorkommt.

Dafs sich das Wort Mantisse nur sehr langsam Eingang verschaffte, geht auch aus der Kästnerschen Geschichte der Mathematik hervor, der wohl die „Kennziffer" aber nicht die Mantisse erwähnt. Es scheint, als ob Vega[3]) zur Verbreitung dieser Bezeichnung am meisten beigetragen hat, denn obgleich er Mantisse mit den schüchternen Worten einführt: „Die darauf (dem Komma) folgenden Ziffern aber

1) L. Euler. Introductio in analysin infinitorum. Lausanne 1748. p. 85.

2) L. Euler. Vollständige Anleitung zur niederen und höheren Analysis. A. d. Französ. übersetzt v. Grüson 1796/97. Bd. I. p. 121.

3) v. Vega. Thesaurus Logarithmorum 1794. Einleitung III, p. 9.

heissen Dezimalziffern; zuweilen auch die „Mantisse“, gebraucht er bei der weiteren Auseinandersetzung der folgenden Seiten doch fortgesetzt die Bezeichnung Mantisse. Daraus erklärt sich denn auch, dafs nur in der deutschen Mathematik dieses Wort Mantisse vorkommt und in keinem anderen Lande. Freilich hat kein geringerer als Gaufs den Versuch gemacht, dem Worte Mantisse eine allgemeinere Bedeutung zu geben; wenn er schreibt[1]): Si fractio communis in decimalem convertitur, seriem figurarum decimalium, sive finita sit, sive in infinitum excurrat, fractionis mantissam vocamus, expressionem, alias tantum modo apud logarithmos usitatam, in significatione latiori accipientes. Aber dieser Versuch ist ohne Erfolg geblieben und später von Gaufs selbst fallen gelassen, und es möchte sich die Frage empfehlen, ob es nicht wünschenswert wäre, dafs auch die deutschen Mathematiker wieder zu der alten Bezeichnung „Dezimalstellen“ für die Logarithmen zurückkehren, da sich die Mantisse über Deutschlands Grenzen hinaus keine Anerkennung erworben hat.

Bericht über das Gesellschaftsjahr 1900/1901.

(Zusammengestellt vom Adjunkten Dr. J. Schröder.)

Versammlung am 10. Februar 1900.

(Nachtrag zum vorigen Jahresberichte.)

Herr Dr. Messerschmitt, Assistent an der Deutschen Seewarte, wird als ordentliches einheimisches Mitglied in die Gesellschaft aufgenommen. Herr Dr. Bolte trägt vor über: „Ortsbestimmung auf See nach der Standlinienmethode“.

Hauptversammlung am 26. Februar 1900.

Der Jahrverwalter Herr Dr. Repsold erstattet den Bericht über das 210. Gesellschaftsjahr. Darnach besteht die Gesellschaft aus 12 Ehrenmitgliedern, 17 auswärtigen und 56 einheimischen Mitgliedern. — Zu dem vom Mitjahrwalter Herrn Dr. Bohnert erstatteten Kassenberichte wird Herr Prof. H. Ahlborn als Revisor gewählt. — Bei der satzungsgemäfs vorzunehmenden Wahl eines Jahrverwalters für die Jahre 1900—1903 wird der bisherige Jahrverwalter

1) Gaufs. Disquis. arithm. Werke I, p. 382.

Herr Dr. Repsold wiedergewählt. Der Vorstand der Gesellschaft besteht daher im Geschäftsjahre 1900/1901 aus den Herren Dr. J. A. Repsold, Jahrverwalter, Dr. F. Bohnert, Mitjahrverwalter, und Dr. J. Schröder, Adjunkt. Zum Bibliothekar erwählt die Gesellschaft an Stelle des die Wiederwahl ablehnenden Herrn Dr. P. Jaerisch für die Jahre 1900—1905 Herrn Dr. O. Pund. — Nach der Hauptversammlung findet das herkömmliche Stiftungsfestessen statt, an welchem sich auch mehrere Freunde der Gesellschaft beteiligen.

Versammlung am 10. März 1900.

Vor Eintritt in die Tagesordnung gedenkt der Vorsitzende, Herr Dr. Repsold, des verstorbenen Herrn Direktors Prof. G. C. W. Rümker, welcher seit 1856 der Gesellschaft als Mitglied angehört hat. Kränklichkeit hielt ihn leider in den letzten Jahren von den Versammlungen fern. Das Andenken des Verblichenen ehren die Anwesenden durch Erheben von den Sitzen. — Dem bisherigen Bibliothekar, Herrn Dr. P. Jaerisch, spricht der Vorsitzende für die bei seiner Amtsführung bewiesene Umsicht und Hingabe den Dank der Gesellschaft aus. — Herr Dr. Hans Maurer wird als ordentliches einheimisches Mitglied in die Gesellschaft aufgenommen. — Herr Dr. Busche trägt vor über „eine Verallgemeinerung einer Gauſs'schen Formel der Zahlentheorie". Herr Prof. Dr. Hoppe macht eine Mitteilung über „den Betrieb von Straſsenbahnen mit Accumulatorenlokomotiven".

Versammlung am 7. April 1900.

Herr Prof. Dr. Schubert hält den angekündigten Vortrag über „neue Resultate zum Schlick'schen Problem der Ausgleichung der Schiffsvibrationen". Herr Prof. Dr. Hoppe spricht über „neue Beobachtungen mit dem Wehnelinterruptor".

Versammlung am 12. Mai 1900.

Herr Dr. H. Maurer hält einen Vortrag über „die Funktion

$$y = x^{x^{\cdot^{\cdot^{x}}}}$$

für ganzzahliges Argument". Herr Dr. Busche fragt an, ob es einen rein geometrischen Beweis giebt für den Satz: „Wählt man in einer Ebene auf zwei parallelen Geraden l_1 und l_2 je eine Gruppe von m_1 bezw. m_2 äquidistanten Punkten, wobei die gegenseitige Entfernung zweier Nachbarpunkte auf l_1 eine andere sein kann als auf l_2, so wird die Ebene durch Verbindung der Teilpunkte auf l_1 mit denjenigen auf l_2 in lauter Dreiecke und Vierecke geteilt".

Versammlung am 9. Juni 1900.

Der Vorsitzende, Herr Dr. Repsold, teilt mit, dafs das Ehrenmitglied der Gesellschaft, Herr Ingenieur William Lindley, am 22. Mai 1900 in London im Alter von 92 Jahren verstorben ist. Herr Dr. Repsold entwirft in kurzen Zügen ein Bild von der für Hamburg so bedeutsamen Thätigkeit des Heimgegangenen. Die Anwesenden ehren das Andenken des Verstorbenen durch Erheben von den Sitzen. — Herr Dr. F. Glage trägt vor über „das Galois'sche Kriterium für die Auflösbarkeit algebraischer Gleichungen".

Versammlung am 8. September 1900.

Herr Dr. H. Teege (Kiel) wird als auswärtiges Mitglied in die Gesellschaft aufgenommen. — Herr Dr. F. Glage spricht über: „Auflösbare irreduzible Gleichungen vom 6. Grade". Herr G. Lony macht eine Bemerkung über den Kreis durch vier Punkte.

Versammlung am 13. Oktober 1900.

Vor Eintritt in die Tagesordnung entwirft der Vorsitzende, Herr Dr. Bohnert, ein Bild der Wirksamkeit des am 22. September 1900 verstorbenen Mitgliedes der Gesellschaft Herrn J. H. Kühl. Die Anwesenden ehren das Andenken des Verstorbenen durch Erheben von den Sitzen. — Herr Prof. Dr. Schubert trägt vor über „den Beweis des Euler'schen Satzes durch die Zahl der zur Bestimmung eines beliebigen Polyeders erforderlichen einfachen Bedingungen". — Herr Dr. Pund berichtet über „einige neuere zahlentheoretische und algebraische Arbeiten".

Versammlung am 10. November 1900.

Der Vorsitzende, Herr Dr. Repsold, gedenkt vor Eintritt in die Tagesordnung des am 27. Oktober 1900 verstorbenen Mitgliedes Herrn H. Eylert, welcher der Gesellschaft seit 1878 angehörte. Zu Ehren des Verstorbenen erheben sich die Anwesenden von den Sitzen. — Herr Benno Messow, wissenschaftlicher Hilfsarbeiter an der hiesigen Sternwarte, wird als ordentliches einheimisches Mitglied in die Gesellschaft aufgenommen. — Herr Prof. Dr. Hoppe spricht zunächst über „den Ursprung der Bezeichnungen „Charakteristik" und „Mantisse" bei den Logarithmen", sodann über „den Anteil Wilcke's an der Begründung der Theorie der dielektrischen Polarisation". — Herr Dr. Schröder zeigt einen von Herrn Dorn, Zeichenlehrer an

der Oberrealschule vor dem Holstenthor, angefertigten sehr handlichen Ellipsenzirkel für den Wandtafelgebrauch vor. — Herr Dr. Bohnert referiert an der Hand einer gröfseren Zahl von Modellen „über einen Abschnitt des Leitfadens der Stereometrie von Lucke".

Versammlung am 8. Dezember 1900.

Herr Dr. H. Lemcke, wissenschaftlicher Hilfslehrer an der Realschule in Eimsbüttel, wird als ordentliches einheimisches Mitglied in die Gesellschaft aufgenommen. — Herr Wirkl. Geh. Admiralitätsrat Prof. Dr. von Neumayer trägt vor über „die Ergebnisse der neuesten erdmagnetischen Beobachtungen in der Polarregion".

Versammlung am 12. Januar 1901.

Der Vorsitzende, Herr Dr. Repsold, teilt mit, dafs das bisherige auswärtige Mitglied Herr Oberlehrer E. Grimsehl in Folge seiner Übersiedelung nach Hamburg wieder in die Zahl der ordentlichen einheimischen Mitglieder eingetreten ist. — Herr Dr. A. Köpcke spricht über den „Entwurf einer Theorie der brauchbaren Funktionen".

Wertvolle Zuwendungen verdankt die Gesellschaft den Herren: Amodeo, Archenhold, Bachmann, Bolte, Bubendey, Busche, M. Cantor, Feder, Ganter, Heidze, Heinrichs, A. Hurwitz, Kiepert, Maack, Messerschmitt, Netto, Oster, Pulfrich, Rudio, Schrader, Schubert, Thaer, Thomas, sowie allen Gesellschaften und Vereinen, mit welchen sie in Schriftenaustausch steht.

Die Adresse der Gesellschaft lautet:

Mathematische Gesellschaft, Hamburg,
Patriotisches Gebäude.

Mitgliederverzeichnis.

Bestand der Mathematischen Gesellschaft in Hamburg am 1. Februar 1901.

I. Ehrenmitglieder.

Bruns, H., Dr. phil., Geh.-Hofrat, Professor, Direktor der Sternwarte in Leipzig.

Bubendey, J. F., Professor an der techn. Hochschule in Charlottenburg.

Cantor, M., Dr. phil., Hofrat, Professor der Mathematik in Heidelberg.
Günther, S., Dr. phil., Professor der Geographie in München.
Hübbe, H. W. C., Stadtbaumeister in Schwerin.
Hurwitz, A., Dr. phil., Professor der Mathematik in Zürich.
Netto, E., Dr. phil., Geh.-Hofrat, Professor der Mathematik in Gieſsen.
Reye, Th., Dr. phil., Professor der Mathematik in Straſsburg.
Schuback, D. A., Deich- und Grenzinspektor in Hamburg.
Stammann, J. O., Dr. jur., Senator in Hamburg.
Sturm, R., Dr. phil., Geh. Reg.-Rat, Professor der Mathematik in Breslau.

II. Auswärtige Mitglieder.

Ambronn, F. A. L., Dr. phil., Professor, Observator der Sternwarte in Göttingen.
Bibliothek, Königliche, Berlin.
Blater, J., Baden-Baden.
Harzer, P., Dr. phil., Professor, Direktor der Sternwarte in Kiel.
Hübner, A., Stadtbaumeister in Bielefeld.
Lentz, H., Wasserbauinspektor in Cuxhaven.
Ludendorff, O., Dr. phil., Assistent am astrophysikal. Observatorium in Potsdam.
Lukas, F. C., Rechnungsoffizial in Wien.
Mahlke, A., Dr. phil., Magdeburg.
Meyn, H. W., Direktor der Karlshütte in Rendsburg.
Mügge, O., Dr. phil., Professor der Mineralogie in Königsberg..
Oppenheimer, H., Dr. phil., Reallehrer in Neustadt a. H. (Pfalz).
Schrader, C. W. O., Geh. Reg.-Rat, Dr. phil., Reichsprüfungsinspektor in Berlin.
Schur, A. C. W., Dr. phil., Professor, Direktor der Sternwarte in Göttingen.
Servus, H., Dr. phil., Oberlehrer am Friedrichs-Realgymnasium in Berlin und Privatdozent an der techn. Hochschule in Charlottenburg.
Sprung, A., Dr. phil., Professor, Sektionschef am metereol. Institut in Berlin.
Teege, H., Dr. phil., Kiel.

III. Einheimische Mitglieder.

Ahlborn, F. H. H., Professor am Realgymnasium des Johanneums.
Banning, F., Dr. phil., Oberlehrer an der Gelehrtenschule des Johanneums.
Bauch, F., Lehrer an der Realschule von Dr. Bieber.

Bensberg, E., Staatsbaumeister.
Böger, R., Dr. phil., Professor am Realgymnasium des Johanneums.
Bohnert, E. F. Ph., Dr. phil., Oberlehrer an der Oberrealschule und Realschule vor dem Holstenthor.
Bolte, F. G., Dr. phil., Direktor der Navigationsschule.
Buchheister, M. J., Wasserbaudirektor.
Busche, E., Dr. phil., Oberlehrer an der Hansaschule in Bergedorf.
Classen, J., Dr. phil., Assistent am physikal. Staatslaboratorium.
Dencker, F., Chronometermacher.
Detels, F., Dr. phil., Oberlehrer an der Realschule in Eilbeck.
Eichler, K., Dr. phil., Professor am Christianeum in Altona.
Fischer, F., Assecuradeur.
Glage, F. E. A., Dr. phil., cand. prob. an der Gelehrtenschule des Johanneums.
Grimpen, A., Dr. phil., Lehrer.
Grimsehl, E., Oberlehrer an der Oberrealschule und Realschule auf der Uhlenhorst.
Grosscurth, F., Dr. phil., Oberlehrer an den Unterichtsanstalten des Klosters St. Johannis.
Haassengier, E., Oberlehrer an der Oberrealschule und Realschule vor dem Holstenthor.
Hadenfeldt, E., Direktor der Hafen-Dampfschiffahrts-Gesellschaft.
Hoppe, E., Dr. phil., Professor am Wilhelmgymnasium.
Jaerisch, P. G. M., Dr. phil., Professor an der Realschule in Eilbeck.
Keferstein, H. J., Dr. phil., Professor an der Oberrealschule und Realschule auf der Uhlenhorst.
Köpcke, H. A., Dr. phil., Oberlehrer an der Realschule in Altona-Ottensen.
Koldewey, C. C., Admiralitätsrat, Abteilungsvorsteher an der Seewarte.
Krüss, H., Dr. phil.
Lemke, H., Dr. phil., wissenschaftl. Hilfslehrer an der Realschule in Eimsbüttel.
Löwer, G. F., Staatsbaumeister.
Lony, G. F. C., cand. prob. an der Oberrealschule und Realschule vor dem Holstenthor.
Maurer, H., Dr. phil., Assistent an der Seewarte.
Messerschmitt, J. B., Dr. phil., Assistent an der Seewarte.
Messow, B., wissenschaftl. Hilfsarbeiter an der Sternwarte.
Meyer, F. A., Oberingenieur.
Michaelsen, A., Dr. phil., Oberlehrer am Christianeum in Altona.

Nagel, A. C., Civilingenieur.
von Neumayer, G., Dr. phil., Professor, Wirkl. Geh. Admiraltätsrat, Direktor der Seewarte.
Niebour, C. T. B., Dr. phil., Direktor der Navigationsschule.
Oeltjen, H., Dr. phil., Oberlehrer an der Realschule in Eimsbüttel.
Pflaumbaum, G., Dr. phil., Oberlehrer an der Realschule in St. Pauli.
Reinmüller, P., Dr. phil., Professor, Direktor der Realschule in St. Pauli.
Repsold J. A., Dr. phil.
Schader, F., Dr. phil., Professor am Wilhelmgymnasium.
Scheller, A., Assistent an der Sternwarte.
Schönwiese, A., Versicherungsmathematiker.
Schorr, R., Dr. phil., Observator an der Sternwarte.
Schröder, J. C. A., Dr. phil., Oberlehrer an der Oberrealschule und Realschule vor dem Holstenthor.
Schubert, H. C. H., Dr. phil., Professor an der Gelehrtenschule des Johanneums.
Sieveking, J. H., Assistent an der Seewarte.
Thaer, A., Dr. phil., Professor, Direktor an der Oberrealschule und Realschule vor dem Holstenthor.
Timm, J. J. A., Schiffbauingenieur.
Tuch, Th. Dr. phil.
Voller, A., Dr. phil., Professor, Direktor des physikal. Staatslaboratoriums.
Wagner, H. A., Dr. phil., Professor, Direktor der Realschule an der Alfredstraſse.

MITTHEILUNGEN
DER MATHEMATISCHEN GESELLSCHAFT
IN HAMBURG.

BAND IV. № 2. AUSGEGEBEN IM FEBRUAR 1902.

Über eine identische Gleichung.

Von E. Busche in Bergedorf.

I.

In den Arbeiten „Généralisation d'une formule de Gauss“ (Comptes Rendus der Pariser Akad. Bd. CXXIX. S. 952) und „Ein Beitrag zur Differenzenrechnung und zur Zahlentheorie“ (Math. Ann. Bd. 53. S. 243) habe ich Symbole $a_x(b)$ und $a_x(b)'$ benutzt, die folgendermafsen definiert werden: Sind irgend welche der Gröfse nach geordnete reelle Zahlen $a_0, a_1 \ldots a_x \ldots, b_0, b_1 \ldots b_y \ldots$ gegeben, so bezeichnet $a_x(b)$ den Index y der Zahl b_y, die die Bedingungen

$$b_y \overline{\leqq} a_x < b_{y+1}$$

erfüllt, $a_x(b)'$ den Index y der Zahl b_y, die den Beziehungen

$$b_y < a_x \overline{\leqq} b_{y+1}$$

genügt. In den folgenden Zeilen, die von einer Verallgemeinerung der a. a. O. aufgestellten Formel handeln, möge die Bedeutung der Symbole dahin abgeändert werden, dafs $a_x(b)$ diejenige Zahl b_y selbst angiebt, die in der aus den Zahlen a und b gebildeten Reihe vor der Zahl a_x liegt oder mit a_x zusammenfällt, so dafs zwischen b_y und a_x keine weitere Zahl b, wohl aber vielleicht noch andere Zahlen a liegen. Dagegen bezeichnet $a_x(b)'$ zwar im allgemeinen dieselbe Zahl b_y, wie $a_x(b)$, aber wenn b_y mit a_x zusammenfällt, die nächstvorhergehende Zahl b. Die Zahlen a und b sollen jetzt nach irgend einer Vorschrift angeordnet sein, also nicht gerade der Gröfse nach

auf einander folgen; auch ist es nicht notwendig, dafs die Zahlen a und b in der Reihenfolge angeordnet sind, die durch ihre Indices angegeben wird. Endlich brauchen a und b auch nicht mehr als reelle Zahlen vorausgesetzt zu werden. Wenn irgend ein Gesetz über die Anordnung der a und b gegeben ist, so kann es natürlich vorkommen, dafs es zweifelhaft ist, ob eine bestimmte Zahl b vor einer bestimmten Zahl a liegt oder nicht. Bei dieser Sachlage, die soeben als Zusammenfallen einer Zahl a mit einer Zahl b bezeichnet wurde, möge festgesetzt werden, dafs die Zahl b als vor der Zahl a liegend angesehen werde. Wenn aufser den Zahlen a und b noch andere mit c_z, d_u ... bezeichnete Zahlen auftreten, so soll jede Zahl c als vor einer etwa mit ihr zusammenfallenden Zahl a oder b liegend betrachtet werden, u. s. w. In Folge dieser Festsetzung kommen in der unten anzugebenden Formel (I) gestrichelte Symbole immer dann vor, wenn der vor der Klammer stehende Buchstabe im Alphabet auf den eingeklammerten Buchstaben folgt. Falls mehrere mit demselben Buchstaben bezeichnete Zahlen zusammenfallen sollten, möge ebenfalls in irgend einer Weise der Zweifel darüber beseitigt werden, welche von zwei solchen Zahlen vor der anderen liegt. Das Zeichen $a_x(a)$ bedeutet die Zahl a_x selbst, das Zeichen $a_x(a)'$ die vor a_x liegende Zahl a, ist also immer von $a_x(a)$ verschieden, während z. B. $b_y(a)'$ im allgemeinen dieselbe Bedeutung wie $b_y(a)$ hat. Nachdem nötigenfalls auf diese Weise die Anordnung der Zahlen a, b, c etc. zu einer „eindeutigen Anordnung“ gemacht worden ist, braucht bei dem Beweise der Formel auf ein Zusammenfallen verschiedener Zahlen keine Rücksicht mehr genommen zu werden.

Der kürzeren Schreibweise wegen will ich mich bei der erwähnten Formel auf drei Gruppen von Zahlen a_x, b_y, c_z beschränken, da man sofort sieht, wie die Formel für mehr als drei Systeme von Zahlen lauten würde, und da der Beweis für den allgemeinen Fall genau ebenso geführt wird wie für diesen besonderen Fall. Die ersten Zahlen der ganzen Reihe mögen mit a_0, b_0, c_0 bezeichnet werden, und zwar sollen vor keiner dieser Zahlen solche mit von Null verschiedenem Index liegen; die letzten Zahlen seien a_{n_a}, b_{n_b}, c_{n_c}, aber auf a_{n_a} z. B. können noch Zahlen b und c folgen, deren Index von n_b oder n_c verschieden ist, auch braucht z. B. n_a nicht der gröfste bei einer Zahl a vorkommende Index zu sein. Ist dann $F(x, y, z)$ eine ganz beliebige Funktion von drei Argumenten, so besteht die folgende identische Gleichung:

$$
\begin{aligned}
&\sum_x \Big(F(a_x(a),\ a_x(b),\ a_x(c)) - F(a_x(a)',\ a_x(b),\ a_x(c))\Big) \\
&+ \sum_y \Big(F(b_y(a)',\ b_y(b),\ b_y(c)) - F(b_y(a)',\ b_y(b)',\ b_y(c))\Big) \\
&+ \sum_z \Big(F(c_z(a)',\ c_z(b)',\ c_z(c)) - F(c_z(a)',\ c_z(b)',\ c_z(c)')\Big) \\
&= F(a_{n_a},\ b_{n_b},\ c_{n_c}) - F(a_0,\ b_0,\ c_0).
\end{aligned}
\tag{I}
$$

Die erste Summe bezieht sich auf alle Zahlen a, die zweite auf alle Zahlen b, die dritte auf alle Zahlen c, ausgenommen die Zahlen a_0, b_0, c_0.

Diese Formel ist gewissermafsen einfach der analytische Ausdruck dafür, dafs in einer eindeutigen Anordnung von Zahlen, jeder Zahl, ausgenommen die mit dem Index Null versehenen, eine bestimmte Zahl a, eine bestimmte Zahl b und eine bestimmte Zahl c vorangeht, und dafs auf jede Zahl, ausgenommen a_{n_a}, b_{n_b}, c_{n_c} eine bestimmte mit demselben Buchstaben bezeichnete Zahl folgt. Denn ist z. B. $F(a_x, b_y, c_z)$ ein Minuend der ersten Summe, und ist a_x von a_{n_a} verschieden, so folgt auf a_x entweder eine Zahl a oder eine Zahl b oder eine Zahl c. Je nachdem der erste oder zweite oder dritte Fall eintritt, ist ein Subtrahend der ersten, zweiten oder dritten Summe ebenfalls gleich $F(a_x, b_y, c_z)$. Zu demselben Ergebnis käme man, wenn b_y oder c_z die letzte der drei Zahlen a_x, b_y, c_z, also $F(a_x, b_y, c_z)$ ein Minuend der zweiten oder dritten Summe wäre. Nur der Minuend $F(a_{n_a}, b_{n_b}, c_{n_c})$, der zu der ersten, zweiten oder dritten Summe gehört, je nachdem die letzte aller vorkommenden Zahlen a_{n_a} oder b_{n_b} oder c_{n_c} ist, hebt sich nicht weg, und ebenso bleibt der Subtrahend $F(a_0, b_0, c_0)$ übrig, der zu der ersten, zweiten oder dritten Summe gehört, je nachdem die erste Zahl mit von Null verschiedenem Index eine Zahl a oder b oder c ist. Damit ist die Gleichung bewiesen.

Die Formel (I) ist nicht deswegen allgemeiner als die in der zuerst zitierten Arbeit angegebene, weil dort die Argumente der Funktion F die Indices der Zahlen a, b, c waren, denn das ist wegen der unbeschränkten Allgemeinheit der Funktion F gleichgültig, sondern namentlich deswegen, weil jetzt die Indices nicht der Gröfse nach auf einander zu folgen brauchen. Wegen dieser Beschränkung war die dort benutzte Formel z. B. weniger geeignet, eine gewisse Beziehung über die Funktion $[x]$ abzuleiten, falls in ihr wachsende und abnehmende Funktionen zugleich vorkommen, so dafs ich mich a. a. O.

auf wachsende Funktionen beschränkt habe. Diese allgemeinere Gleichung über die Funktion $[x]$ will ich jetzt aufstellen.

II.

Es mögen die reellen Zahlen durch die Punkte einer geraden Linie dargestellt und das Intervall der Zahlen, die $> \alpha$ und $\overline{\leq} \beta$ sind, ins Auge gefafst werden. Ferner seien $a(x)$, $b(y)$, $c(z)$ drei in dem Intervall von α bis β monotone Funktionen, und zwar möge etwa $a(x)$ in dem Intervall beständig wachsen, $b(y)$, $c(z)$ beständig abnehmen. Die Zahlen a_x, b_y, c_z seien die zu ganzzahligen Argumentwerten gehörigen Werte dieser Funktionen in dem Intervalle, $a_{\nu_a} = a(\nu_a) < \alpha$, $a_{\nu_a+1} > \alpha$, $a_{n_a} \overline{\leq} \beta$, $a_{n_a+1} > \beta$; a_{ν_a} tritt hier also an die Stelle von a_0 in der Formel (I). Ferner möge $b_{n_b+1} = b(n_b+1) \overline{\leq} \alpha$, $b_{n_b} > \alpha$, $b_{\nu_b+1} \overline{\leq} \beta$, $b_{\nu_b} > \beta$ sein und ganz analoge Bedeutung die extremen Indices der Zahlen c haben. An die Stelle von b_0 und c_0 treten b_{n_b+1}, c_{n_c+1}. Die Summation über a_x reicht also von $x = \nu_a + 1$ bis $x = n_a$, die über b_y und c_z von $y = n_b$ bis $y = \nu_b + 1$, bezw. $z = n_c$ bis $z = \nu_c + 1$.

Ist nun

$$b(y) < a(x) < b(y-1),$$

und bezeichnet man die inverse Funktion jedesmal mit dem entsprechenden grofsen Buchstaben, so ist

$$y \overline{\geq} Ba(x) > y - 1,$$

wo $Ba(x)$ statt $B(a(x))$ geschrieben ist, und also

$$y = [Ba(x)]' + 1,$$

wo ich wieder, wie in früheren Arbeiten, durch den an die eckige Klammer gesetzten Strich angedeutet habe, dafs, falls die eingeschlossene Gröfse eine ganze Zahl ist, die nächst kleinere ganze Zahl durch die Klammer bezeichnet wird. Es ist folglich

$$a_x(b) = b(y) = b([Ba(x)]' + 1).$$

Ist ferner

$$a(x) < b(y) < a(x+1),$$
$$x < Ab(y) < x + 1,$$
$$x = [Ab(y)]',$$

so ist

$$b_y(a)' = a(x) = a([Ab(y)]').$$

Aus

$$c(z) < b(y) < c(z-1),$$
$$z > Cb(y) > z - 1,$$
$$z = [Cb(y)]' + 1$$

folgt

$$b_y(c) = c(z) = c([Cb(y)]' + 1).$$

Ebenso erhält man aus den Beziehungen

$$b(y) < c(z) \leqq b(y-1),$$
$$y > Bc(z) \geqq y - 1,$$
$$y = [Bc(z)] + 1$$

die Gleichung

$$c_z(b)' = b(y) = b([Bc(z)] + 1).$$

Die Zeichen $a_x(c)$ und $c_z(a)'$ werden gerade so bestimmt wie $a_x(b)$ und $b_y(a)'$.

Da man endlich noch leicht findet, dafs

$$\nu_a = [A(\alpha)], \quad n_a = [A(\beta)],$$
$$n_b = [B(\alpha)]', \quad \nu_b = [B(\beta)]',$$
$$n_c = [C(\alpha)]', \quad \nu_c = [C(\beta)]'$$

ist, so ist nach (I)

$$\begin{aligned}
&\sum_{[A(\alpha)]+1}^{[A(\beta)]} (F(x, [Ba(x)]'+1, [Ca(x)]'+1) - F(x-1, [Ba(x)]'+1, [Ca(x)]'+1)) \\
&+ \sum_{[B(\beta)]'+1}^{[B(\alpha)]'} (F([Ab(y)]', \quad y, \quad [Cb(y)]'+1) - F([Ab(y)]', \quad y+1, [Cb(y)]'+1)) \\
&+ \sum_{[C(\beta)]'+1}^{[C(\alpha)]'} (F([Ac(z)]', \quad [Bc(z)]+1, \quad z) - F([Ac(z)]', \quad [Bc(z)]+1, \quad z+1)) \\
&= F([A(\beta)], [B(\beta)]'+1, [C(\beta)]'+1) - F([A(\alpha)], [B(\alpha)]'+1, [C(\alpha)]'+1).
\end{aligned} \tag{II}$$

Dabei ist noch statt $F(a(x), b(y), c(z))$ einfach $F(x, y, z)$ geschrieben, was ja wegen der Willkürlichkeit von F erlaubt ist, und die Summation über y und z auch von kleineren zu gröfseren Werten dieser Zahlen erstreckt.

Setzt man z. B. $F(x, y, z) = x \cdot y \cdot z$, so erhält man

$$\begin{aligned}
&\sum_{[A(\alpha)]+1}^{[A(\beta)]} ([Ba(x)]' + 1)([Ca(x)]' + 1) - \sum_{[B(\beta)]'+1}^{[B(\alpha)]'} [Ab(y)]'([Cb(y)]' + 1) \\
&\qquad - \sum_{[C(\beta)]'+1}^{[C(\alpha)]'} [Ac(z)]' \cdot ([Bc(z)] + 1) \\
&= [A(\beta)] \cdot ([B(\beta)]' + 1)([C(\beta)]' + 1) - [A(\alpha)] \cdot ([B(\alpha)]' + 1)([C(\alpha)]' + 1).
\end{aligned}$$

Nun ist

$$\sum_{[A(\alpha)]+1}^{[A(\beta)]}[Ba(x)]' - \sum_{[B(\beta)]'+1}^{[B(\alpha)]'}[Ab(y)]' = [A(\beta)][B(\beta)]' - [A(\alpha)][B(\alpha)]',$$

$$\sum_{[A(\alpha)]+1}^{[A(\beta)]}[Ca(x)]' - \sum_{[C(\beta)]'+1}^{[C(\alpha)]'}[Ac(z)]' = [A(\beta)]\cdot[C(\beta)]' - [A(\alpha)][C(\alpha)]',$$

wie aus der Formel (II) mit Leichtigkeit folgt, wenn man sie für zwei Argumente und für $F(x, y) = xy$ schreibt. Hebt man noch den links aus der ersten Summe abzutrennenden Ausdruck

$$[A(\beta)] - [A(\alpha)]$$

auf beiden Seiten weg, so erhält man

$$(1)\quad \sum_{[A(\alpha)]+1}^{[A(\beta)]}[Ba(x)]'[Ca(x)]' - \sum_{[B(\beta)]'+1}^{[B(\alpha)]'}[Ab(y)]'[Cb(y)]' - \sum_{[C(\beta)]'+1}^{[C(\alpha)]'}[Ac(z)]'[Bc(z)]$$
$$= [A(\beta)]\cdot[B(\beta)]'[C(\beta)]' - [A(\alpha)]\cdot[B(\alpha)]'\cdot[C(\alpha)]'.$$

Man kann nun leicht, indem man, wie es eben auch geschehen ist, die Formel (1) für die nächst geringere Anzahl von Funktionen $a, b, c \ldots$ schon als bewiesen annimmt, eine entsprechende Gleichung herleiten, in der beliebig viele wachsende und abnehmende Funktionen $a, b, c, d \ldots$ vorkommen. Für lauter wachsende Funktionen erhält man links lauter positive Zeichen, jeder abnehmenden Funktion entspricht ein Minuszeichen vor der auf sie bezüglichen Summe. Die Striche an den eckigen Klammern hängen von den Festsetzungen darüber ab, ob α und β mit zum Intervall gerechnet werden sollen oder nicht, sowie davon, in welcher Reihenfolge zusammenfallende Werte der Funktionen $a, b, \ldots$ genommen werden sollen. Man kann durch andere derartige Bestimmungen Gleichungen mit weniger Strichen erzielen.

Um noch ein einfaches Beispiel für eine andere Funktion F zu geben, will ich eine Formel des Herrn Cesàro (Vergl. Encykl. d. Math. I. C. 3. S. 653) aus der für zwei Funktionen a, b geschriebenen Formel (II) ableiten. Zu dem Zwecke werde $a(x) = x$, $b(y) = \frac{n}{y}$, $\alpha = \varepsilon$, $\beta = n$, $F(x, y) = x\cdot y^2$ gesetzt, wo n eine positive ganze Zahl und ε ein echter positiver Bruch ist. Dann ist

$$\sum_{1}^{n}\left(\left[\frac{n}{x}\right]' + 1\right)^2\cdot(x - (x-1)) + \sum_{1}^{\left[\frac{n}{\varepsilon}\right]'}\left[\frac{n}{y}\right]'\cdot(y^2 - (y+1)^2) = n.$$

Die zweite Summe braucht man nur bis $y = n$ zu nehmen, da die höheren Glieder gleich Null werden. Es ist also

$$\sum_1^n \left[\frac{n}{x}\right]'^2 + \sum_1^n 2\left[\frac{n}{x}\right]' + n - \sum_1^n \left[\frac{n}{y}\right]' \cdot (2y+1) = n$$

oder

$$\sum_1^n \left[\frac{n}{x}\right]'^2 = \sum_1^n \left[\frac{n}{y}\right]' \cdot (2y-1).$$

Die Striche an den Klammern dürfen hier, wie es auch in der Formel des Herrn Cesàro der Fall ist, weggelassen werden, da sich beide Seiten der Gleichung um $\sum(2\delta_n - 1)$ vergröfsern, wo die Summe sich auf die Teiler von n bezieht, wenn man diese Veränderung vornimmt. Übrigens hätte man die Formel ohne Striche auch direkt aus (II) finden können, wenn man dafür gesorgt hätte, dafs in dieser Gleichung weniger Striche aufgetreten wären.

III.

In der oben erwähnten Abhandlung in den Math. Ann. habe ich eine mit III^a bezeichnete Formel abgeleitet, die als ein Analogon einer bekannten, dem Taylorschen Lehrsatz nahe verwandten, Bernoullischen Formel angesehen werden kann. Man kann aber auch eine dem Taylorschen Satze selbst entsprechende Gleichung aus der Formel (I) finden, was ich hier nachholen will. Dabei will ich der Kürze wegen nur eine wachsende Funktion betrachten, und das Intervall von vornherein so wählen, wie es für die meisten Anwendungen zweckmäfsig ist. Man setze $a_x = x$, $b_y = g(y) =$ einer in dem Intervall von 0 bis zu der ganzen Zahl n beständig wachsenden Funktion, $F(x, y) = x \cdot f(h - G(y))$, wo f wieder eine beliebige Funktion und h eine beliebige Zahl ist. Dann ist $a(x) - a(x)' = 1$, $a_x(b) = g[G(x)]$, also

$$F(a_x(a), a_x(b)) - F(a_x(a)', a_x(b)) = f(h - G(g([G(x)]))) = f(h - [G(x)]).$$

Ferner ist $b_y(a)' = [g(y)]'$, $b_y(b) = g(y)$, $b_y(b)' = g(y-1)$,

$$F(b_y(a)', b_y(b)) - F(b_y(a)', b_y(b)') = [g(y)]' \cdot (f(h-y) - f(h-y+1)).$$

Da die erste innerhalb des Intervalles liegende Zahl b_y den Index $y = [G(0)] + 1$, die letzte den Index $[G(n)]$ hat, und da $a_0 = 0$ ist, so ist also

$$(1)\quad \sum_1^n f(h - [G(x)]) - \sum_{[G(0)]+1}^{[G(n)]} [g(y)]' \cdot f_1(h-y) = n \cdot f(h - [G(n)]),$$

wenn

$$f(x+1) - f(x) = f_1(x)$$

gesetzt wird. A. a. O. habe ich $f(x) - f(x-1) = f^{(1)}(x)$ gesetzt; hier ist die angegebene Bezeichnung vorteilhafter. Allgemein ist

$$f_m(x+1) - f_m(x) = f_{m+1}(x).$$

Um auf das zweite Glied von (1) wieder die Formel (I) anzuwenden, will ich zunächst eine Hilfsgleichung herleiten. Setzt man in (I) $F(x, y) = \varphi(x) \cdot f(y)$, $a_x = x$, $b_y = y$, so ist

$$a_x(a) = x, \quad a_x(a)' = x - 1, \quad a_x(b) = x, \quad b_y(a)' = y - 1, \quad b_y(b) = y,$$
$$b_y(b)' = y - 1,$$

also

$$\sum_{p+1}^{q} f(x) \cdot (\varphi(x) - \varphi(x-1)) + \sum_{p+1}^{q} \varphi(y-1) \cdot (f(y) - f(y-1))$$
$$= f(q) \cdot \varphi(q) - f(p) \cdot \varphi(p).$$

Damit

$$\varphi(x) - \varphi(x-1) = [g(x)]'$$

sei, kann man

$$\varphi(x) = \sum_{t=r+1}^{x} {}^{(1)}[g(t)]'$$

setzen, wo r eine beliebige ganze Zahl ist, die nur kleiner als die kleinste der vorkommenden Zahlen x sein mufs. Diese und die im Folgenden auftretenden mehrfachen Summen $S^{(\nu)}$ mögen gleich Null gesetzt werden, wenn die untere Grenze die obere übertrifft. Nimmt man $r = [G(0)]$, so folgt, wenn man noch statt $f(x)$ in der Hilfsformel $f_1(h-x)$ setzt,

$$(2) \quad \sum_{[G(0)]+1}^{[G(n)]} f_1(h-x) \cdot [g(x)]' - \sum_{[G(0)]+1}^{[G(n)]} \sum_{[G(0)]+1}^{y-1} {}^{(1)}[g(t)]' \cdot f_2(h-y)$$
$$= \sum_{[G(0)]+1}^{[G(n)]} {}^{(1)}[g(t)]' \cdot f_1(h - [G(n)]).$$

Der Subtrahend auf der rechten Seite verschwindet wegen der über die Summen $S^{(\nu)}$ getroffenen Festsetzung.

Nun ist es leicht einzusehen, wie die nächste Gleichung

$$(3) \quad \sum_{[G(0)]+1}^{[G(n)]} \sum_{[G(0)]+1}^{x-1} {}^{(1)}[g(t)]' \cdot f_2(h-x) - \sum_{[G(0)]+1}^{[G(n)]} \sum_{[G(0)]+1}^{y-2} {}^{(2)}[g(t)]' \cdot f_3(h-y)$$
$$= \sum_{[G(0)]+1}^{[G(n)]-1} {}^{(2)}[g(t)]' \cdot f_2(h - [G(n)])$$

mittelst der Hilfsgleichung abgeleitet wird. Denn wenn

$$\varphi(x) - \varphi(x-1) = \sum_{[G(0)]+1}^{x-1} {}^{(1)}[g(t)]'$$

sein soll, so kann man

$$\varphi(x) = \sum_{v=[G(0)]+1}^{x-1} \sum_{[G(0)]+1}^{v} [g(t)]' = \sum_{[G(0)]+1}^{x-1} {}^{(2)}[g(t)]'$$

annehmen.

Die Reihe der Gleichungen (1), (2), (3) kann man in derselben Weise fortsetzen. Addiert man darauf alle diese Gleichungen, so erhält man

$$\sum_{1}^{n} f(h - [G(x)]) = n \cdot f(h - [G(n)]) + S_1 \cdot f_1(h - [G(n)]) + S_2 \cdot f_2(h - [G(n)]) + \cdots,$$

wo

$$\sum_{[G(0)]+1}^{[G(n)]-v+1} {}^{(v)}[g(t)]' = S_v$$

gesetzt worden ist. Ersetzt man nun noch h durch $k + [G(n)]$, so folgt

$$\text{(III)} \quad \sum_{1}^{n} f(k + [G(n)] - [G(x)]) = n \cdot f(k) + S_1 \cdot f_1(k) + S_2 \cdot f_2(k) + \cdots.$$

Die Reihe bricht ab, wenn man sie so weit fortsetzt, dafs die obere Grenze der S, die beständig kleiner wird, gleich $[G(0)]$ geworden ist. Man kann die Entwickelung aber auch nach dem Gliede

$$\sum_{[G(0)]+1}^{[G(n)]-v+1} {}^{(v)}[g(t)]' \cdot f_v(k)$$

mit dem Restgliede

$$\sum_{[G(0)]+1}^{[G(n)]} \sum_{[G(0)]+1}^{y-v} {}^{(v)}[g(t)]' \cdot f_{v+1}(k + [G(n)] - y)$$

abschliefsen.

Die Koefficienten S_v sind mehrfache Summen; um einen einfacheren Ausdruck für sie, die ja von der Funktion f unabhängig sind, abzuleiten, setze man

$$f(x) = (1 + l)^x.$$

Dann ist bekanntlich

$$f_v(k) = (1 + l)^k \cdot l^v,$$

und wenn man das in (III) einsetzt und durch $(1+l)^k$ dividiert, folgt

$$\sum_1^n (1+l)^{[G(n)]-[G(x)]} = n + S_1 \cdot l + S_2 \cdot l^2 + \cdots$$

Durch Vergleichung gleich hoher Potenzen von l auf beiden Seiten dieser Gleichung erhält man S_ν als eine Summe von Binomialkoeffizienten, nämlich

$$S_\nu = \sum_1^n \binom{[G(n)] - [G(x)]}{\nu}. \tag{4}$$

Wendet man auf diese Summe die Formel (III) für $k = 0$ an, setzt man also

$$f(x) = \binom{x}{\nu},$$

so ist, wie man leicht findet,

$$f_m(x) = \binom{x}{\nu - m},$$

also

$$f(0) = f_1(0) = f_2(0) = \cdots = f_{\nu-1}(0) = f_{\nu+1}(0) = \cdots = 0,\ f_\nu(0) = \binom{0}{0} = 1.$$

Die Formel (III) wird also auf diese Weise bestätigt, da die rechte Seite einfach gleich S_ν wird. Bricht man dagegen die Entwickelung schon nach dem ersten Gliede ab, so wird S_ν gleich dem Restgliede, nämlich

$$S_\nu = \sum_{[G(0)]+1}^{[G(n)]} [g(y)]' \cdot \binom{[G(n)] - y}{\nu - 1}. \tag{5}$$

Andere Ausdrücke für S_ν kann man dadurch erhalten, dafs man die Entwickelung weiter fortsetzt.

Die den Gleichungen (4) und (5) entsprechenden Formeln habe ich a. a. O. (Math. Ann.) auf umständlichere Weise durch vollständige Induktion bewiesen, weshalb die hier gegebene viel kürzere Herleitung wohl nicht überflüssig erscheint.

Über Transformationsgruppen, deren sämtliche Untergruppen invariant sind.

Von W. Ahrens in Magdeburg.

Unter „kontinuierlichen Gruppen vom Range Null“ versteht Herr Killing[1]) bekanntlich solche, deren sämtliche zweigliedrige Unter-

1) Mathem. Annal. 31, pag. 266.

gruppen aus Transformationen bestehen, die mit einander vertauschbar sind. Auf diese Gruppen wurde ich geführt, als ich mir die Frage vorlegte: bei welchen Gruppen nehmen die successiven adjungierten Gruppen[1]) bis zur Identität ab? Es zeigte sich, daſs alle Gruppen vom Range Null und nur diese die verlangte Eigenschaft besitzen.[2]) Auch für diskontinuierliche Gruppen untersuchte ich die Beschaffenheit derjenigen, für welche die successiven adjungierten Gruppen oder, wie man hier nach Herrn Hölder sagt[3]), die „Gruppen der kogredienten Isomorphismen der Gruppe mit sich selbst" bis zur Identität abnehmen, und fand als notwendige und hinreichende Bedingung eine Zusammensetzung, welche z. B. die Gruppen von Primzahlpotenzordnung stets besitzen. Diese Bedingung besteht nämlich darin, daſs sich für die Gruppe G_0 eine Reihe von Gruppen G_0, G_1, G_2 . . G_{n-1}, $G_n(=1)$, von denen jede in den vorhergehenden als invariante[4]) Untergruppe enthalten ist, so angeben läſst, daſs irgend ein Element von G_i $(i=1, 2 \ldots n-1)$ und eins von G_0 mit einander einen Kommutator[5]) besitzen, welcher jedenfalls auch noch der auf G_i folgenden Gruppe angehört[6]), oder was dasselbe ist, daſs jedes Element der Gruppe $\frac{G_i}{G_{i+1}}$ mit jedem von $\frac{G_0}{G_{i+1}}$ vertauschbar ist. Aus diesem Resultat zusammen mit einem Satze von Herrn Burnside[7]) ergiebt sich, wie Herr Loewy kürzlich bemerkt hat[8]), folgender Satz: „Diejenigen Gruppen, welche in das direkte Produkt von Gruppen, deren Ordnungen Prim-

1) Wegen dieses Begriffs s. Lie, Archiv for Mathem. og Naturvid. I, 1876, sowie Lie, Transformationsgr., herausgeg. v. Engel, I, Kap. 16.

2) „Zur Theorie der adjungirten Gruppe". Ber. d. Kgl. Sächs. Ges. d. Wissensch. 1897, p. 358—368.

3) Hölder, „Die Gruppen der Ordnungen p^3, pq^2, pqr, p^4." Math. Ann. 43 p. 314.

4) Eine „invariante Untergruppe" ist bei Lie (Archiv for Math. og Naturv. III, 1878, p. 457 und VIII, 1883, p. 390) eine Untergruppe, welche bei allen Transpositionen durch beliebige Transformationen der ganzen Gruppe stets in sich übergeht. Nach W. Dyck, Math. Ann. XX, p. 12 könnte es scheinen, als ob Lie auch die in der Substitutionentheorie gebrauchte Bezeichnung „ausgezeichnet" in diesem Sinne angewandt hätte. So viel wir wissen, ist dies nie der Fall gewesen, vielmehr heiſst bei Lie (s. Lie-Engel I, p. 276) „ausgezeichnet" eine Transformation, welche nicht nur „invariant" in der Gruppe, sondern auch mit allen Transformationen der Gruppe vertauschbar ist.

5) Wegen dieser Bezeichnung s. R. Dedekind, Math. Annal. 48, p. 553.

6) „Über eine besondere Klasse von Substitutionengruppen". Ber. d. Kgl. Sächs. Ges. d. Wissensch. 1897, p. 616—626.

7) s. Burnside, Theory of groups, 1897, p. 115, Theorem VIII.

8) A. Loewy, Math. Annal. 55, p. 69.

zahlpotenzen sind, zerfallen, sind die einzigen Gruppen, bei welchen die successiven adjungierten Gruppen (kogredienten Isomorphismengruppen) schliefslich mit der Identität enden."

Zu diesen Gruppen gehören u. a. auch die von Herrn Dedekind[1]) betrachteten sogenannten Hamiltonschen Gruppen, deren sämtliche Untergruppen invariant sind. Bezüglich der analogen Gattung kontinuierlicher Gruppen hatte ich bereits in der oben (Anm. 6 der vorigen S.) zitierten Arbeit (l. c. p. 626) bemerkt, dafs der Forderung, dafs alle Untergruppen, einschliefslich der eingliedrigen, invariant sind, natürlich nur die Abelschen Gruppen genügen, und dafs, wenn man von den eingliedrigen Untergruppen absieht, zu den Abelschen Gruppen nur noch die einzige dreigliedrige Gruppe vom Range Null, welche nicht eine Abelsche Gruppe ist, hinzutritt. Für diese Behauptung, welche ich a. a. O. ohne Beweis aussprach, mag hier, nachdem kürzlich wieder die Aufmerksamkeit auf diese Dinge gelenkt worden ist, im folgenden der Beweis gegeben werden.

Sieht man also bezüglich der Forderung, dafs alle Untergruppen einer kontinuierlichen Gruppe in dieser Gruppe invariant sind, von den eingliedrigen Untergruppen ab, wie schon oben bemerkt, und stellt diese Bedingung nur für die zwei- und mehrgliedrigen, so wird eine solche unserer Bedingung genügende Gruppe auch weiter der gestellten Bedingung genügen, wenn wir sie in der Weise verändern, dafs wir ihren Transformationen beliebig viele „aufserwesentliche" ausgezeichnete Transformationen hinzufügen.[2]) Umgekehrt dürfen wir aber ebensogut die in der Gruppe etwa enthaltenen „aufserwesentlichen" ausgezeichneten Transformationen streichen, ohne dafs die Gruppe aufhörte, unserer Bedingung zu genügen, und wir dürfen daher von vornherein annehmen, dafs solche Transformationen nicht in unserer Gruppe vorhanden sind.

Wir nehmen zunächst an, dafs die Gruppe nicht vom Range Null ist; alsdann giebt es in ihr jedenfalls eine zweigliedrige Unter-

1) s. R. Dedekind, „Über Gruppen, deren sämtliche Teiler Normalteiler sind". Math. Ann. 48, 1897, p. 548—561.

2) Über den Begriff „ausgezeichnete Transformation" s. Anm. 4 auf vor. Seite; unter „aufserwesentlichen" ausgezeichneten Transformationen verstehe ich hier, wie auch Leipziger Ber. 1897, p. 359 solche, welche in der „derivierten Gruppe" der Gruppe nicht vorkommen, die also beliebig der Gruppe zugefügt oder in ihr gestrichen werden können, ohne dafs sich die für die Zusammensetzung der Gruppe charakteristischen Lieschen Konstanten c_{iks} um eine von Null verschiedene Gröfse ändern.

gruppe von der Form $(X_1, X_2) = X_1$; diese mufs dann unserer Forderung nach invariant sein, d. h. bei beliebigem X_i mufs

$$\begin{aligned}(X_1, X_i) &= a_{i1} X_1 + a_{i2} X_2 \\ (X_2, X_i) &= b_{i1} X_1 + b_{i2} X_2\end{aligned} \qquad (i = 3, 4 \ldots)$$

sein. Aus der Jacobischen Identität

$$((X_1, X_2) X_i) + ((X_2, X_i), X_1) + ((X_i, X_1) X_2) = 0$$

folgt dann aber $(X_1, X_i) = c_i X_1$; $i = 3, 4 \cdots$ Es bildet also X_1 nicht nur mit X_2, sondern auch mit jeder anderen Transformation eine zweigliedrige Untergruppe; da diese alle invariant sein sollen, so mufs (X_i, X_k) sich sowohl durch X_1 und X_i als auch durch X_1 und X_k, mithin durch X_1 allein ausdrücken lassen, d. h. also

$$(X_i, X_k) = c_{ik} X_1$$

bei beliebigen Transformationen X_i und X_k. Die derivierte Gruppe unserer Gruppe besteht also aus X_1 allein. Von den Gröfsen c_{ik} ($i \neq k$ und beide > 1) ist keine $= 0$; denn wenn eine derselben verschwände, so bildeten X_i und X_k eine zweigliedrige Gruppe, die also invariant sein müfste, was nur dann der Fall sein könnte, wenn X_i und X_k in der Gruppe ausgezeichnet wären, da ja nur X_1 in der derivierten Gruppe vorkommt. Dann wären X_i und X_k aber aufserwesentliche ausgezeichnete Transformationen, und deren Vorhandensein hatten wir ja ausdrücklich ausgenommen. Infolge der Jacobischen Identität ist nun offenbar

$$c_{ik} c_l + c_{kl} c_i + c_{li} c_k = 0 \qquad (i, k, l > 1;\ c_2 = 1),$$

und da die c_{ik} alle von 0 verschieden sind, so würde aus dem Verschwinden von 2 der c_i das aller c_i folgen; da nun aber $c_2 = 1$ bestimmt ist, so kann dies nicht sein und daher nur höchstens eins der c_i verschwinden; die übrigen dürfen wir, indem wir $X_i' = \frac{X_i}{c_i}$ statt X_i einführen, alle $= 1$ annehmen. Die zweigliedrige Untergruppe X_1, X_2, von der wir ausgingen, ist nun stets in einer dreigliedrigen enthalten[1]), und zwar ist letztere integrabel, weil die ganze Gruppe es ist, und daher ist die dreigliedrige Untergruppe wieder in einer viergliedrigen enthalten.[1]) Nach den obigen Ausführungen müfste nun diese viergliedrige Gruppe folgende Zusammensetzung haben:

$$(X_1, X_2) = X_1; \quad (X_1, X_3) = X_1; \quad (X_1, X_4) = c X_1 \quad (c = 0 \text{ oder } 1) \text{ etc.}$$

---

1) s. Lie-Engel, Trfgr. III, pg. 681, Satz 8.

Dann kann man aber durch andere Normierung — indem man

$$X_3' = X_3 - X_2;\ X_4' = X_4 - cX_2$$

setzt — erreichen, dafs

$$(X_1,\ X_3') = (X_1,\ X_4') = 0$$

wird, mithin 2 der $c_i = 0$ werden, was wir oben nach der Jacobi'schen Identität als unverträglich mit $(X_1,\ X_2) = X_1$ erkannten. Die Gruppe kann also überhaupt nicht viergliedrig, sondern höchstens dreigliedrig sein und mufs alsdann die Zusammensetzung

$$(X_1,\ X_2) = X_1;\ (X_1,\ X_3) = cX_1;\ (X_2,\ X_3) = c_{23}X_1$$

haben, wo $c = 0$ oder 1 und $c_{23} \gtrless 0$ ist. Es ist ersichtlich, dafs sich diese Zusammensetzung stets auf die Form

$$(X_1,\ X_2) = X_1;\ (X_1,\ X_3) = 0;\ (X_2,\ X_3) = X_1$$

bringen läfst. Dann sieht man aber, dafs die Transformation $X_1 + X_3$ aufserwesentlich ausgezeichnet ist, so dafs wir also auch von diesem Fall absehen können und nur die zweigliedrige Gruppe $(X_1,\ X_2) = X_1$ bleibt, welche natürlich in sich selbst invariant ist.

Nehmen wir nun zweitens an, unsere Gruppe sei vom Range Null, so gehen wir von einer zweigliedrigen Untergruppe $(X_1,\ X_2) = 0$ aus, und es mufs dann wegen deren Invarianz bei beliebiger Transformation X_3

$$(X_1,\ X_3) = a_{11}X_1 + a_{12}X_2$$
$$(X_2,\ X_3) = a_{21}X_1 + a_{22}X_2$$

sein. Ist nun

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \gtrless 0,$$

so lassen sich 3 Gröfsen $a,\ b,\ \varrho$ so bestimmen, dafs

$$(1)\qquad \begin{aligned} a_{11}\,a + a_{21}\,b &= \varrho\,a \\ a_{12}\,a + a_{22}\,b &= \varrho\,b \end{aligned}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \varrho & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} - \varrho \end{vmatrix} = 0,$$

also $\varrho \neq 0$, und dann ist:

$$(aX_1 + bX_2,\ X_3) = \varrho(aX_1 + bX_2).$$

Dann wäre aber unsere Gruppe nicht vom Range Null, es mufs also

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = 0$$

sein. Das Gleichungssystem (1) ist alsdann mit $\varrho = 0$ auch auflösbar und zwar sind a, b jedenfalls nicht beide $= 0$; setzen wir also für X_1 [resp. für X_2, falls $a = 0$ sein sollte] $aX_1 + bX_2$, so erhalten wir, in den alten Bezeichnungen geschrieben, offenbar eine Zusammensetzung von der Form:

$$(X_1, X_2) = 0, \quad (X_1, X_3) = 0, \quad (X_2, X_3) = \alpha X_1 + \beta X_2.$$

Da nun X_1, X_3 eine Untergruppe bilden, so muſs wegen deren Invarianz $\beta = 0$ sein. Da X_1 den invarianten Untergruppen X_1, X_2 und X_1, X_3 angehört, so muſs offenbar $(X_1, X_i) = c_i X_1$ sein und zwar, da unsere Gruppe vom Range Null ist, $c_i = 0$, also $(X_1, X_i) = 0$, $i = 2, 3 \ldots$; während (X_i, X_k) sich sowohl durch X_1 und X_i als auch durch X_1 und X_k ausdrücken, mithin $(X_i, X_k) = c_{ik} X_1$; $i, k > 1$ sein muſs. Diese c_{ik} müssen alle von 0 verschieden sein, was hier, ebenso wie oben an der analogen Stelle, sich ergiebt. Sind aber c_{ik} und c_{il} von 0 verschieden, so ist $(X_i, c_{il} X_k - c_{ik} X_l) = 0$, und die Transformation $X_k' = c_{il} X_k - c_{ik} X_l$ wäre dann mit X_i vertauschbar, d. h. bei einer neuen Normierung wäre $c_{ik}' = 0$ im Widerspruch mit oben. Es darf daher überhaupt nur ein c_{ik} vorkommen, d. h. die Gruppe nur dreigliedrig sein. Es genügt unserer Forderung also nur die Gruppe

$$(X_1, X_2) = 0, \quad (X_1, X_3) = 0, \quad (X_2, X_3) = \alpha X_1$$

und zwar dürfen wir α, das von 0 verschieden ist, da wir sonst den schon oben ausgenommenen trivialen Fall einer Abelschen Gruppe hätten, $= 1$ annehmen und erhalten also schlieſslich:

$$(2) \qquad (X_1, X_2) = 0, \quad (X_1, X_3) = 0, \quad (X_2, X_3) = X_1,$$

die einzige dreigliedrige Gruppe vom Range Null, die nicht eine Abelsche Gruppe ist.[1])

Dazu könnten dann vielleicht noch einige auſserwesentliche ausgezeichnete Transformationen X_4, X_5 ... treten. Ist X_4 eine solche Transformation, so ist also $(X_2, X_4) = 0$; diese Gruppe X_2, X_4 wäre aber dann wegen $(X_2, X_3) = X_1$ nicht invariant, und es ist also auch dies nicht möglich. — Für den ersten Fall der zweigliedrigen Gruppe (s. S. 76) ergiebt sich dasselbe ganz entsprechend.

Bei diesen Entwickelungen habe ich Gewicht darauf gelegt, nur von der Forderung, daſs alle zweigliedrigen Untergruppen invariant seien, Gebrauch zu machen, und man sieht also, daſs man auch bei dieser weiteren Fragestellung nur zu den erhaltenen Gruppen gelangen würde.

---

1) s. Umlauf, „Über die Zusammensetzung der endlichen kontinuierlichen Transformationsgruppen". Leipziger Dissert. 1891, pg. 47.

Wir können das Schlufsresultat also so aussprechen:

„Die Abelschen Gruppen und diejenige dreigliedrige Gruppe vom Range Null, deren Transformationen nicht sämtlich vertauschbar sind, und auch nur diese haben die Eigenschaft, dafs alle ihre Untergruppen (die eingliedrigen im zweiten Falle ausgenommen) invariant sind; diese Gruppen sind zugleich die einzigen Gruppen, deren sämtliche zweigliedrige Untergruppen invariant sind."

Rostock, den 26. Dezember 1901.

Zur Invariantentheorie.

Von O. Pund in Altona.

Wenn man die Variabeln einer Form einer linearen homogenen Transformation unterwirft, so erhält man eine neue Form, deren Koeffizienten linear und homogen aus den Koeffizienten der ursprünglichen Form zusammengesetzt sind. Daher kann man jeder linearen Transformation der Variabeln eindeutig eine lineare Transformation der Koeffizienten zuordnen, und bei dieser Zuordnung gilt das allgemeine Gesetz, dafs, wenn zwei Transformationen α und β der Variabeln die Transformationen A und B der Koeffizienten entsprechen, der zusammengesetzten Transformation $\alpha\beta$ der Variabeln auch die Transformation AB der Koeffizienten entspricht. Die Gesamtheit der linearen Transformationen der Variabeln bildet eine kontinuierliche Gruppe, ihr entspricht also in der ebenfalls eine kontinuierliche Gruppe konstituierenden Gesamtheit aller linearen Transformationen der Koeffizienten, die von höherer, nur bei linearen Formen von derselben Mannigfaltigkeit ist, eine Untergruppe. Diese Untergruppe ist nun gerade in der Invariantentheorie von Bedeutung, da die invarianten Gebilde einer Form oder eines Formensystems nicht so sehr von den Variabeln als von den Koeffizienten abhängen, und daher ist es möglich, eine Invariante eines Formensystems vollständig dadurch zu charakterisieren, dafs sie ungeändert bleibt bis auf einen rational von den Transformationen abhängigen Faktor, wenn sie den Transformationen der erwähnten Untergruppe unterworfen wird. Da die besprochenen Verhältnisse auch dann noch in etwas veränderter Form wiederkehren, wenn die vorgelegten Formen von mehr Reihen von Variabeln abhängig sind, ob diese nun kogredienten, kontragredienten oder auch von einander unabhängigen Transformationen unterliegen, da ferner die invarianten Bildungen, bei denen gewisse aus den Reihen der

Veränderlichen zu bildenden Determinanten auftreten, sich immer als Invarianten des um geeignete Formen erweiterten Systems der ursprünglich vorhandenen Grundformen auffassen lassen, so ergiebt sich die Möglichkeit, die gesamte gewöhnliche Invariantentheorie von dem hier angedeuteten Gesichtspunkt zu behandeln.

Indem ich mir eine ausführliche Bearbeitung dieser Gesichtspunkte für eine weitere Veröffentlichung vorbehalte, will ich sie vorläufig nur in ihrer Anwendung auf eine binäre Forme entwickeln und daraus einige grundlegende Sätze herleiten, deren Beweis sonst auf völlig verschiedenem Wege erbracht wird.

§ 1. Charakteristische Eigenschaften der Invarianten einer binären Form.

Alle linearen und homogenen Transformationen zweier Variabeln lassen sich aus drei fundamentalen Transformationen zusammensetzen, und zwar können als solche die durch die folgenden Matrizen dargestellten angesehen werden

$$\pi_t = \begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \varrho = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

wo in der ersten t einen beliebigen Parameter bedeutet.

Eine Invariante einer binären Form ist nun als eine solche rationale Funktion der Koeffizienten der Form definiert, dafs sie, wenn die Variabeln einer linearen Transformation unterliegen, und die neuen Koeffizienten, die dadurch aus denen der ursprünglichen binären Form hervorgehen, an Stelle dieser gesetzt werden, sich nur um einen von den Transformationskoeffizienten ganz und rational abhängenden Faktor ändern. Diese Faktoren lassen sich für die obigen fundamentalen Transformationen und infolgedessen überhaupt für jede beliebige lineare Transformation bestimmen. Die rationale Funktion $\varphi(t)$, mit der sich die Invariante bei der Transformation mit π_t multipliziert, ergiebt sich leicht daraus, dafs sie wegen der Kompositionsgleichung

$$\pi_t \pi_{t'} = \pi_{tt'}$$

der Funktionalgleichung

$$\varphi(t)\,\varphi(t') = \varphi(tt')$$

genügen mufs. Sie mufs daher eine Potenz von t sein

$$\varphi(t) = t^p,$$

wo p eine ganze rationale Zahl bedeutet, das Gewicht der Invariante. Für den Faktor ε, der bei der Transformation σ auftritt, erhält man aus der Relation

$$\sigma^2 = \pi_2 \sigma \pi_{\frac{1}{2}}$$

leicht die Gleichung $\varepsilon^2 = \varepsilon$, woraus, da $\varepsilon \neq 0$ angenommen werden darf, $\varepsilon = 1$ folgt. Endlich zeigt sich bei der Transformation ϱ auf Grund der Beziehung

$$\varrho\pi_{-1}\sigma\pi_{-1}\varrho\pi_{-1}\sigma\varrho\,\sigma\pi_{-1} = 1,$$

dafs der Faktor δ, um den sich die Invariante hierbei ändert, der Gleichung $\delta^3 = 1$ genügt, also, da er eine rationale Zahl sein mufs, gleich der Einheit ist.

Aus diesen Bestimmungen ist nun leicht zu schliefsen, dafs der Faktor, um den sich die Invariante bei einer beliebigen linearen Transformation ändert, gleich der $p$ten Potenz der Transformationsdeterminante ist.

Um nun die den Transformationen π_t, σ, ϱ der Variabeln entsprechenden Transformationen P_t, S, R der Koeffizienten aufzustellen, legen wir die Grundform vom $n$ten Grade in der mit Binomialkoeffizienten versehenen Gestalt zu Grunde

$$F(x_1, x_2) = a_0 x_1^n + n a_1 x_1^{n-1} x_2 + \cdots + n a_{n-1} x_1 x_2^{n-1} + a_n x_2^n.$$

Wir erhalten dann

$$P_t = \begin{Vmatrix} t^n & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & t^{n-1} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & & \\ 0 & 0 & \cdots & t & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{Vmatrix}$$

$$S = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & n-1 & \frac{(n-1)(n-2)}{2} & \cdots & 1 & 0 \\ 1 & n & \frac{n(n-1)}{2} & \cdots & n & 1 \end{Vmatrix}$$

$$R = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & (-1)^n \\ 0 & 0 & \cdots & (-1)^{n-1} & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \\ 0 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{Vmatrix}$$

und gelangen dadurch zu dem Satze: Jede Invariante der binären Form ist völlig dadurch charakterisiert, dafs sie sich durch

Transformation mit P_t um den Faktor t^p ändert, aber bei Anwendung von S und R ihren Wert behält.

Hieraus läfst sich sofort ableiten, dafs die Invariante eine homogene Funktion der Koeffizienten ist. Aus der aus der Relation

$$(\pi_t \varrho \pi_1)^2 = \begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix}$$

leicht hervorgehenden isomorphen

$$(P_t R P_{-1})^2 = G_t{}^n = G_t^n,$$

wo

$$G_t = \begin{Vmatrix} t & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & t & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & \cdots & t & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & t \end{Vmatrix}$$

gesetzt ist, ergiebt sich nämlich, da die linksseitig stehende Transformation die Gesamtänderung t^{2p} hervorbringt, dafs $G_t{}^n$ die Invariante um t^{2p}, also wegen der Unbestimmtheit von t, G_t sie um $t^{\frac{2p}{n}}$ ändert. Das besagt aber nichts andres, als dafs die Invariante eine homogene Funktion vom Grade $g = \frac{2p}{n}$ ist, der natürlich eine ganze Zahl in Folge unserer Voraussetzungen sein mufs.

Nimmt man die Homogeneität in die Charakteristik der Invariante auf, so kann man ihre Eigenschaft in Bezug auf die Transformation P_t ersetzen durch die Eigenschaft, durch die Transformation

$$Q_t = P_t^2 G_t^{-n} = \begin{Vmatrix} t^n & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & t^{n-2} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & \cdots & t^{-n+2} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & t^{-n} \end{Vmatrix}$$

ungeändert zu bleiben. Denn ist sie eine homogene Funktion der Koeffizienten vom Grade g, so folgt dann rückwärts aus

$$P_t^2 = Q_t G_t^n$$

dafs sie sich bei der Transformation $P_t^2 = P_{t'}$ um den Faktor $t'^g = t^{2p}$, also wegen der Unbestimmtheit von t bei der Transformation G_t um den Faktor t^p ändert. Wir können also die Invariante auch durch den folgenden Satz charakterisieren:

Jede Invariante ist eine homogene Funktion der Koef-

fizienten, die ihren Wert nicht ändert, wenn diese den Transformationen Q_t, S, R unterworfen werden.

§ 2. Kovarianten einer binären Form.

Ähnlich wie die Invarianten lassen sich auch die Kovarianten charakterisieren, nur daſs hier noch die Variabeln mit zu berücksichtigen sind.

Eine Funktion der Koeffizienten und Variabeln ist eine Kovariante dann und nur dann, wenn sie sich bei der Transformation mit P_t resp. $\bar{\pi}_t = \pi\frac{1}{t}$ um den Faktor t^p ändert, dagegen ihren Wert beibehält bei Anwendung von S bezw. $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ und R bezw. $\bar{\varrho} = \varrho^3$.

Ähnlich wie früher ergiebt sich hieraus, daſs ein Glied der Kovariante, das in den Variabeln die Ordnung m hat, eine homogene Funktion der Koeffizienten vom Grade $g = \frac{2p+m}{n}$ ist, und dann weiter, daſs jede Kovariante, die nicht homogen in den Koeffizienten einerseits und den Variabeln andrerseits ist, sich in eine Summe von Funktionen zerlegen läſst, die diese Eigenschaft der Homogeneität besitzen und selbst wieder Kovarianten sind. Kovarianten der letzteren Art, die allein in Betracht gezogen zu werden brauchen, lassen sich aber in besonders einfacher Weise darstellen.

Wenden wir auf eine solche Kovariante

$$K(a_0, a_1, \ldots, a_n; x_1, x_2),$$

eine gewisse Transformation[1] an, so finden wir, daſs sie folgender Funktionalgleichung genügt:

$$K(a_0, a_1, \ldots, a_n; x_1, x_2) = K(f_0(t), f_1(t), \ldots, f_n(t); x_2, -x_1 + tx_2),$$

wo $f_0(t)$ die zur Form $F(x_1, x_2)$ zugeordnete ganze rationale Funktion

$$f(t) = a_0 t^n + n a_1 t^{n-1} + \cdots + n a_{n-1} t + a_n$$

bedeutet, und

$$f_i(t) = (-1)^i (a_0 t^{n-i} + (n-i) a_1 t^{n-i-1} + \cdots + (n-i) a_{n-i-1} t + a_{n-i})$$
$$= (-1)^i \frac{(n-i)!}{n!} f^{(i)}(t)$$

mit deren Ableitungen $f^{(i)}(t)$ in einfachem Zusammenhang steht. Setzt

[1] nämlich auf die Koeffizienten $R^3 P_t^n S P$, auf die Variabeln $\varrho\pi_t\sigma\pi\frac{1}{t}$.

man in die Funktionalgleichung $t = \frac{x_1}{x_2} = x$ ein, so ergiebt sich die Darstellung

$$K(a_0, a_1, \ldots, a_n; x_1, x_2) = K(f_0(x), f_1(x), \ldots, f_n(x); x_2, 0)$$
$$= K(f_0(x), f_1(x), \ldots, f_n(x); 1, 0)x_2^m,$$

wo m die Ordnung der Kovariante bedeutet. Bezeichnet man ferner mit $L(a_0, a_1, \ldots, a_n)$ das Leitglied der Kovariante, d. h. die Koeffizienten von x_1^m, so hat man also

$$K(a_0, a_1, \ldots, a_n; x_1, x_2) = L(f_0(x), f_1(x), \ldots, f_n(x))x_2^m.$$

Das Leitglied ist eine homogene Funktion der Koeffizienten vom Grade $g = \frac{2p + m}{n}$ und nimmt, wie die Anwendung der gleichzeitig auf die Kovariante ausgeübten Transformationen P_t, $\pi \frac{1}{t}$ zeigt, die sich dadurch um t^p ändert, bei der Transformation P_t den Faktor $t^{p+m} = t^{ng-p}$ an. Hieraus folgt, dafs man

$$K(a_0, a_1, \ldots a_n; x_1, x_2) = \frac{1}{x_1^p x_2^p} L(f_0 x_2^n, f_1 x_1 x_2^{n-1}, \ldots, f_n x_1^n)$$

hat, wobei

$$f_0 x_2^n = F(x_1, x_2) = F_0(x_1, x_2)$$
$$f_i x_1^i x_2^{n-i} = F_i(x_1, x_2) = (-1)^i \frac{(n-i)!}{n!} x_1^i \frac{\partial^i F}{\partial x_1^i}$$

ist. Aus dieser letzten Gestalt der Kovariante läfst sich eine weitere Eigenschaft des Leitgliedes entwickeln, die erfüllt sein mufs, damit die Kovariante auch der letzten Bedingung, durch die Transformationen R, ϱ^3 ungeändert zu bleiben, genügt. Wir bezeichnen die Funktionen, in die $F_0, F_1, \ldots, F_n$ dadurch übergehen, mit $G_0, G_1, \ldots, G_n$, wobei

$$G_i = (-1)^i \frac{(n-i)!}{n!} x_2^i \frac{\partial^i G_0}{\partial x_2^i}.$$

Da aber identisch

$$G_0(x_1, x_2) = F(x_1, x_2)$$

ist, so folgt durch Differenzieren

$$\frac{\partial^i G_0}{\partial x_2^i} = \frac{\partial^i F}{\partial x_2^i}.$$

Nun lassen sich die Ableitungen von F nach x_2 durch die nach x_1 ausdrücken, was man dadurch zeigen kann, dafs man die identische Gleichung

$$F(x_1, tx_2) = t^n F\left(\frac{x_1}{t}, x_2\right)$$

mehrmals differenziert und darauf $t = 1$ setzt. Hierdurch erhält man die Formel

$$\frac{(n-i)!}{n!} x_2^i \frac{\partial^i F}{\partial x_2^i} = \sum_{k=0}^{k=i} (-1)^k i_k \frac{(n-k)!}{n!} x_1^k \frac{\partial^k F}{\partial x_1^k}$$

und daraus

$$(-1)^i G_i = \sum_{k=0}^{k=i} i_k F_k .$$

Da nun die Unveränderlichkeit der Kovariante der letzten Transformation gegenüber auch durch die Gleichung

$$L(G_0, -G_1, \ldots, (-1)^n G_n) = L(F_0, F_1, \ldots, F_n)$$

ausgedrückt werden kann, so ergiebt sich die Eigenschaft von $L(a_0, a_1 \ldots, a_n)$, durch die Transformation S ungeändert zu bleiben.

Fassen wir alles zusammen, so erhalten wir den Satz:

Jede homogene Kovariante ist völlig durch ihr Leitglied bestimmt, das eine homogene isobare Funktion des Koeffizienten ist, die durch die Transformation S ungeändert gelassen wird. Einer jeden solchen Funktion vom Gewichte p und dem Grade g entspricht umgekehrt auch eine Kovariante von der Ordnung $m = ng - 2p$.

§ 3. Rationale Darstellung aller Kovarianten.

Die Aufgabe, von einer Form alle Kovarianten aufzustellen, ist dem letzten Satze zufolge darauf zurückgeführt, alle isobaren Formen $L(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ zu bestimmen, die die Transformation S zulassen. Die Eigenschaft der Isobarität läfst sich ausdrücken durch die Gleichung

$$L(x_0, tx_1, \ldots, t^n x_n) = t^p L(x_0, x_1, \ldots, x_n),$$

wo p das Gewicht der genannten Funktion ist. Das Problem der invarianten Formen, wie wir solche kurz nennen wollen, wird dadurch erleichtert, dafs wir zunächst nach allen solchen Funktionen fragen, die nur von x_0 abhängig, darauf solche in Betracht ziehen, die auch noch von x_1 abhängen, dann die aufsuchen, die aufser x_0 und x_1 auch noch x_2 enthalten, u. s. f. Da ist zunächst ersichtlich, dafs x_0 selbst eine invariante Form darstellt, und dafs jede andere nur von x_0 abhängige Form eine Potenz von x_0 ist. Eine invariante Form, die x_0 und x_1 enthält, giebt es aber nicht; wir können sogar noch weiter behaupten, dafs es auch keine ganze invariante Funktion von x_1 giebt, deren Koeffizienten zugleich auch invariant sind. Eine solche müfste, da

die Anwendung der Transformation S die Koeffizienten ungeändert läfst, die Funktionalgleichung

$$\varphi(x_1 + tx_0) = \varphi(x_1)$$

befriedigen, wo t eine unbestimmte Gröfse ist, und diese sagt aus, dafs $\varphi(x_1)$ unabhängig von x_1 ist. Dagegen giebt es invariante Formen, die von x_0, x_1 und x_2 abhängig sind, und zwar sogar eine solche, die in x_2 linear ist. Wir erhalten sie, wenn wir uns die Frage vorlegen, ob es möglich ist, x_2 als ganze rationale Funktion $\psi_2(x_1)$ von x_1 mit invarianten Koeffizienten darzustellen. Wenden wir die Transformation S an, so ergiebt sich aus

$$x_2 = \psi_2(x_1)$$

noch

$$x_2 + 2x_1 + x_0 = \psi_2(x_1 + x_0)$$

und deshalb ist

$$\psi_2(x_1 + x_0) - \psi_2(x_1) = 2x_1 + x_0.$$

Da wir erkennen, dafs die linke Seite durch x_0 teilbar ist, so setzen wir

$$\frac{\psi_2(x_1)}{x_0} = \varphi_2(x_1)$$

und erhalten dann

$$\varphi_2(x_1 + x_0) - \varphi_2(x_1) = 2x_0x_1 + x_0^2$$

oder

$$\varphi_2(x_1 + x_0) - \varphi_2(x_1) = (x_1 + x_0)^2 - x_1^2.$$

Hierdurch wird ausgedrückt, dafs die Funktion

$$\Phi_2(x_1) = \varphi_2(x_1) - x_1^2$$

der Bedingung

$$\Phi_2(x_1 + x_0) = \Phi_2(x_1)$$

genügt, also eine Invariante y_2 darstellt. Wir haben also

$$x_0x_2 = x_1^2 + y_2 \quad \text{oder} \quad y_2 = x_0x_2 - x_1^2,$$

und da y_2 homogen und isobar vom Gewichte 2 ist, so ist es die gesuchte invariante Form.

Suchen wir jetzt ebenso x_3 als rationale Funktion von x_1 mit invarianten Koeffizienten darzustellen, so gelangen wir auf Grund des Ansatzes

$$x_0^2x_3 = \varphi_3(x_1)$$

durch Anwendung von S zu der Gleichung

$$\varphi_3(x_1 + x_0) - \varphi_3(x_1) = 3x_0^2x_2 + 3x_0^2x_1 + x_0^3,$$

und wenn wir hierin

$$x_0 x_2 = \varphi_2(x_1), \quad x_1 = \frac{\varphi_2'(x_1)}{2}$$

setzen und zu x_0^3 den Koeffizienten $\frac{\varphi_2''(x_1)}{2} = 1$ hinzufügen, so ergiebt sich

$$\varphi_3(x_1 + x_0) - \varphi_3(x_1) = 3\Big[x_0\varphi_2(x_1) + \frac{x_0^2}{2}\varphi_2'(x_1) + \frac{x_0^3}{3!}\varphi_2''(x_1)\Big].$$

Führen wir jetzt eine Funktion $\psi_3(x_1)$ ein, deren Derivierte

$$\psi_3'(x_1) = \varphi_2(x_1)$$

ist, so wird die rechte Seite der vorletzten Gleichung gleich $3(\psi_3(x_1 + x_0) - \psi_3(x_1))$, und daraus schliefsen wir wieder, dafs die Differenz $\varphi_3(x_1) - 3\psi_3(x_1)$ eine invariante Funktion y_3 ist. So ergiebt sich $\varphi_3'(x_1) = 3\varphi_2(x_1)$ und

$$x_0^2 x_3 = x_1^3 + 3y_2 x_1 + y_3, \quad y_3 = x_0^2 x_3 - 3x_0 x_1 x_2 + 2x_1^3.$$

Wir wollen nun beweisen, dafs das hierbei hervortretende Gesetz allgemein gilt und nehmen dazu an, dafs

$$x_0^{k-1} x_k = \varphi_k(x_1)$$

als Funktion von x_1 mit invarianten Koeffizienten dargestellt sei, und dafs für $i < k$ immer

$$x_0^{i-1} x_i = \varphi_i(x_1) = \frac{1}{i+1}\varphi_{i+1}'(x_1)$$

sei, so dafs also auch

$$x_0^{i-1} x_i = \frac{i!}{k!}\varphi_k^{(k-i)}(x_1)$$

sein mufs. Dann erhalten wir zur Bestimmung der Funktion $x_0^k x_{k+1} = \varphi_{k+1}(x_1)$ die Gleichung

$$\varphi_{k+1}(x_1 + x_0) - \varphi_{k+1}(x_1)$$

$$= x_0^k\Big[(k+1)x_k + \frac{(k+1)k}{2}x_{k-1} + \cdots + (k+1)x_1 + x_0\Big]$$

$$= (k+1)\Big[x_0\varphi_k(x_1) + \frac{x_0^2}{2!}\varphi_k'(x_1) + \cdots + \frac{x_0^k}{k!}\varphi^{(k-1)}(x_1) + \frac{x_0^{k+1}}{(k+1)!}\varphi^{(k)}(x_1)\Big].$$

Bestimmen wir nun $\psi_{k+1}(x_1)$ durch die Bedingung

$$\psi_{k+1}'(x_1) = \varphi_k(x_1),$$

so folgt, dafs die rechte Seite gleich $(k+1)(\psi_{k+1}(x_1 + x_0) - \psi_{k+1}(x_0))$ und weiter, dafs die Differenz

$$\varphi_{k+1}(x_1) - (k+1)\psi_{k+1}(x_1) = y_{k+1}$$

eine invariante Funktion ist. Es ist also

$$\varphi'_{k+1}(x_1) = (k+1)\varphi_k(x_1).$$

Die allgemeinen Formeln, zu denen wir auf die Weise gelangen, lauten

$$x_0^{k-1}x_k = x_1^k + k_2 y_2 x_1^{k-2} + \cdots + k_2 y_{k-2} x_1^2 + k y_{k-1} x_1 + y_k$$

und

$$y_k = \sum_{h=0}^{h=k-1} (-1)^h k_h x_0^{k-h-1} x_1^h x_{k-h} + (-1)^k x_1^k.$$

Bezeichnet man die Summe in der letzten Formel durch $\Phi_k(x_1)$, so ist allgemein

$$\Phi'_k(x_1) = -k\Phi_{k-1}.$$

Mit Hilfe der aufgestellten invarianten Formen $x_0, y_2, y_3, \ldots, y_n$, die man als invariante Grundformen bezeichnen kann, läfst sich nun jede beliebige invariante Form darstellen, indem man der Reihe nach $x_n, x_{n-1}, \ldots, x_2$ entfernt und dafür schrittweise $y_n, y_{n-1}, \ldots, y_2$ einführt. Jede ganze Funktion von $x_0, x_1, \ldots, x_n$ geht auf diese Weise in eine Funktion über, die ganz in $x_1, y_2, \ldots, y_n$ ist, wogegen x_0 in einer Potenz als Nenner auftreten kann. Denkt man sich die im Zähler stehende ganze Funktion nach Potenzen von x_1 entwickelt, so müssen, wenn die Funktion invariant sein soll, da alle Koeffizienten invariant sind, die Koeffizienten der ersten und höheren Potenzen verschwinden, so dafs die Funktion völlig frei von x_1 wird. Da ferner die invariante Form homogen und isobar sein mufs, so erhalten wir mit Rücksicht darauf, dafs $y_2, y_3, \ldots, y_n$ die Grade und Gewichte $2, 3, \ldots, n$ haben, wenn g und p Grad und Gewicht der invarianten Formen sind, die beiden Funktionalgleichungen

$$F(tx_0, t^2y_2, \ldots, t^ny_n) = t^gF(x_0, y_2, \ldots, y_n)$$
$$F(x_0, t^2y_2, \ldots, t^ny_n) = t^pF(x_0, y_2, \ldots, y_n).$$

Aus diesen folgt weiter

$$F(tx_0, t^2y_2, \ldots, t^ny_n) = t^{p-g}F(x_0, t^2y_2, \ldots, t^ny_n)$$

und daraus auch

$$F(tx_0, y_2, \ldots, y_n) = t^{p-g}F(x_0, y_2, \ldots, y_n).$$

Es ist also $F(x_0, y_2, \ldots, y_n)$ darstellbar in der Form des Produktes

$$F(x_0, y_2, \ldots, y_n) = x_0^r G(y_2, y_3, \ldots, y_n),$$

dessen einer Faktor eine Potenz von x_0 mit positivem oder negativem ganzzahligem Exponenten $r = p - g$ ist, während der andere nur von $y_2, y_3, \ldots, y_n$ *abhängt* und zwar derartig, dafs die Gleichung

$$G(t^2 y_2,\ t^3 y_3,\ \ldots\ t^n y_n) = t^p G(y_2,\ \ldots\ y_n)$$

besteht. Umgekehrt ist eine Funktion $G(y_2, \ldots y_n)$ von der angegebenen Eigenschaft auch eine invariante Form von $x_0, x_1, \ldots x_n$ und bleibt es, wenn man sie mit einer ganzzahligen positiven Potenz von x_0 multipliziert; das Gleiche gilt, wenn man sie durch eine Potenz von x_0 dividiert, aber nur, wenn sie dadurch teilbar ist.

§ 4. Endlichkeit des Formensystems.

Die Aufgabe der Invariantentheorie, die sämtlichen invarianten Formen zu charakterisieren, kommt darauf hinaus, alle Funktionen $G(y_2, y_3, \ldots, y_n)$ von den im Vorhergehenden definierten Eigenschaften zu bestimmen, die durch irgend welche Potenzen von x_0 teilbar sind, wenn darin an Stelle von $y_2, y_3, \ldots, y_n$ die Werte in $x_0, x_1, \ldots, x_n$ eingesetzt werden, die im vorigen Paragraphen aufgestellt sind. Alle die Funktionen lassen sich nun ganz und rational durch eine endliche Anzahl von ihnen ausdrücken, die als das System der Grundformen bezeichnet werden. Den Beweis dafür, dafs es ein solches System giebt, führen wir mit Hülfe eines ganz allgemeinen Satzes über algebraische Formen, der von Hilbert aufgestellt und in etwas anderer Weise zu demselben Zweck verwandt worden ist[1]):

Aus den Formen eines beliebigen unendlichen Formensystems lassen sich immer eine endliche Anzahl von Formen derart auswählen, dafs jede andere Form des Systems linear und homogen durch sie ausgedrückt werden kann und zwar mit Koeffizienten, die ganze Formen der Veränderlichen sind.

Wenn diese Formen des Systems invariante sind, so handelt es sich nur noch darum, nachzuweisen, dafs auch die bei der linearhomogenen Darstellung auftretenden Koeffizienten selbst wieder invariante Formen sind oder wenigstens durch solche ersetzt werden können. Denn wenn dies der Fall ist, also die Koeffizienten wieder dem unendlichen Formensystem angehören, so führt die fortgesetzte linearhomogene Darstellung durch die in endlicher Zahl auftretenden Fundamentalformen schliefslich zu einem ganzen und rationalen Ausdruck jeder Form durch die letzteren. Die Richtigkeit des hierzu nötigen Hülfssatzes läfst sich aber auf Grund der Betrachtungen des vorigen Paragraphen leicht darthun. Es seien $f_1, f_2, \ldots, f_m$ die invarianten Formen, durch die sich jede andere f in der Gestalt

[1]) Math. Ann. 33, 58 S. 473.

$$i = a_1 i_1 + a_2 i_2 + \cdots + a_m i_m$$

ausdrücken läfst, wo $a_1, a_2, \ldots, a_m$ Formen von $x_0, x_1, \ldots, x_n$ sind. Denken wir uns in diesen die Variabeln $x_2, \ldots, x_n$ durch $y_2, \ldots, y_n$ ersetzt und ordnen nach Potenzen von x_1, so mag sich

$$a_k = \frac{a_{k0}}{x_0^{r_{k0}}} + \frac{a_{k1}}{x_0^{r_{k1}}} x_1 + \frac{a_{k2}}{x_0^{r_{k2}}} x_1^2 + \cdots$$

ergeben, wo $a_{k0}, a_{k1}, a_{k2}, \ldots$ ganze rationale Funktionen von $x_0, y_2, \ldots y_n$, dagegen $r_{k0}, r_{k1}, r_{k2} \ldots$ ganze rationale Zahlen sind. Setzt man diese Ausdrücke ein, so ergiebt sich aus einer in § 3 angestellten Betrachtung, dafs auch

$$i = \frac{a_{10}}{x_0^{r_{10}}} i_1 + \frac{a_{20}}{x_0^{r_{20}}} i_2 + \cdots + \frac{a_{n0}}{x_0^{r_{n0}}} i_m.$$

Die jetzt auftretenden Koeffizienten $\frac{a_{k0}}{x_0^{r_{k0}}}$ müssen aber, wenn an Stelle von $y_2, y_3 \ldots, y_n$ ihre Ausdrücke in $x_0, x_1 \ldots, x_n$ eingetragen werden, ganz werden, weil sonst a_k nicht ganz sein kann, entgegen der Voraussetzung. Da überdies ihre Homogeneität und Isobarität daraus erkannt wird, dafs $i, i_1, \ldots, i_m$ diese Eigenschaft haben, so folgt, dafs sie invariante Formen sind. Damit ist der Hilfssatz bewiesen.

Eine allgemeine Methode zu finden, um das arithmetische Problem, auf das die Aufstellung des vollen Formensystems hinauskommt, zu lösen, ist mir bisher nicht gelungen. In den einfachsten Fällen dagegen kommt man sehr leicht zum Ziel, wie ich das schliefslich noch an den Beispielen der kubischen und biquadratischen Form zeigen will.

Bei den kubischen Formen sind die invarianten Grundformen

$$x_0, \quad y_2 = x_0 x_2 - x_1^2, \quad y_3 = x_0^2 x_3 - 3 x_0 x_1 x_2 + 2 x_1^3,$$

von denen die beiden letzten der quadratischen und kubischen Kovariante entsprechen.

Jeder Funktion von y_2 und y_3, die durch x_0 teilbar sein soll, mufs nun, weil y_2 und y_3 für $x_0 = 0$, von numerischen Faktoren abgesehen in das Quadrat und den Kubus der Gröfse x_1 übergehen, eine identische Relation zwischen diesen entsprechen. Da aber jede derartige Relation sich aus der folgenden $(x_1^2)^3 = (x_1^3)^2$ ableiten lassen mufs, so erkennt man die Existenz einer weiteren Grundform aus der Bildung der Funktion $4y_2^3 + y_3^2$, die sich durch x_0^2 teilbar erweist und zur invarianten Form

$$x_0^2 x_3^2 + 4 x_0 x_2^3 - 6 x_0 x_1 x_2 x_3 + 4 x_1^3 x_3 - 3 x_1^2 x_2^2$$

Veranlassung giebt, die der Diskriminante der kubischen Form entspricht, und mit der das Formensystem abgeschlossen ist. Bei der biquadratischen Form kommt zu dem Vorigen noch

$$y_4 = x_0^3 x_4 - 4x_0^2 x_1 x_3 + 6x_0 x_1^2 x_2 - 3x_1^4$$

hinzu. Es erweist sich $3y_2^2 + y_4$ durch x_0^2 teilbar und ergiebt sich daher die Invariante

$$x_0 x_4 - 4x_1 x_3 + 3x_2^2;$$

zugleich aber fällt y_4 fort, weil es durch diese Invariante und y_2 ausdrückbar ist. Da man jede Funktion von y_2, y_3, y_4 nach dem Modulsystem $(4y_2^3 + y_3^2,\ 3y_2^2 + y_4)$ auf die Form $\varphi(y_2) + y_3\psi(y_2)$ reduzieren kann, wo φ und ψ Zeichen von rationalen Funktionen sind, für $x_0 = 0$ $\varphi(y_2)$ in eine gerade, $y_3\psi(y_2)$ in eine ungerade Funktion von x_1 übergeht, so kann $\varphi(y_2) + y_3\psi(y_2)$ nur dann verschwinden, wenn φ und ψ identisch gleich Null sind. Demnach ist jede durch x_0 teilbare Funktion von y_2, y_3, y_4 linear aus den Elementen des Modulsystems zusammensetzbar, die durch x_0^2 teilbar sind, und eine durch x_0^3 teilbare Funktion wird erhalten aus der Bildung von

$$\frac{3y_2^2 + y_4}{x_0^2} \cdot y_2 - \frac{4y_2^3 + y_3^2}{x_0^2} = (x_0 x_4 - 4x_1 x_3 + 3x_2^2)(x_0 x_2 - x_1^2)$$
$$- (x_0^2 x_3^2 + 4x_0 x_2^3 - 6x_0 x_1 x_2 x_3) + 4x_1^3 x_3 - 3x_1^2 x_2^2,$$

woraus durch Division mit x_0 die neue Invariante

$$x_0 x_2 x_4 - x_0 x_3^2 - x_1^2 x_4 + 2x_1 x_2 x_3 - x_2^3,$$

entsteht, die $\frac{4y_2^2 + y_3^2}{x_0^2}$ ersetzt. Mit dieser ist, wie sich durch einige weitere Betrachtungen zeigen läfst, das Formensystem dann abgeschlossen.

Bericht über das Gesellschaftsjahr 1901/02.

(Zusammengestellt vom Adjunkten Dr. F. Bolte.)

Hauptversammlung am 18. Februar 1901.

Nachdem der Jahrverwalter, Herr Dr. Repsold, den in einer aufserordentlichen Versammlung am 26. Januar zur Inbetrachtnahme bestimmten, durch schriftliche Umfrage herbeigeführten einstimmigen Beschlufs der Gesellschaft verkündet hat, Herrn wirklichen Geheimen Admiralitätsrat Dr. von Neumayer zum Ehrenmitgliede zu ernennen,

erstattet er den Bericht über die Thätigkeit der Gesellschaft während des 211. Jahres ihres Bestehens. Die Gesellschaft zählt zur Zeit 11 Ehrenmitglieder, 17 auswärtige Mitglieder und 53 ordentliche Mitglieder; der Besuch der Sitzungen gegen das Vorjahr hat zugenommen. Der Kassenbericht mufste wegen Erkrankung des Mitjahrverwalters verschoben werden. Nachdem der Vorsitzende dem satzungsmäfsig ausscheidenden Adjunkten, Herrn Dr. Schröder, den Dank der Gesellschaft für seine Geschäftsführung zum Ausdruck gebracht, wird Herr Direktor Dr. Bolte für die nächsten 3 Jahre zum Adjunkten gewählt.

Hieran schlofs sich das übliche Stiftungsfestessen, an welchem mehrere Freunde der mathematischen Gesellschaft teilnahmen.

Versammlung am 9. März 1901.

(Dieselbe wird unter dem Vorsitze des Mitjahrverwalters abgehalten).

Herr Navigationslehrer Dr. Wirtz wird als ordentliches einheimisches Mitglied aufgenommen. Auf Anfrage von Herrn Dr. Schorr, ob die mathematische Gesellschaft als solche geneigt sei, der Anregung des Herrn Dr. Schwassmann, einem von ihm entdeckten Planeten den Namen „Mathesis“ zu geben, beizutreten, wird diesem Wunsche bereitwillig Folge gegeben.

Herr Dr. Busche trägt vor über „Fareysche Reihen“. Die Haupteigenschaften derselben, ihre Anwendung auf die Auflösung der diophantischen Gleichungen 1. Grades, ihre Beziehung zur natürlichen Kettenbruchentwickelung wird entwickelt. Hierauf spricht Herr Professor Dr. Hoppe über die Herkunft der Bezeichnung „Mantisse“ in der Logarithmenlehre. Dieselbe ist nicht, wie Cantor angiebt, zuerst von Sturm (1700) als synonym mit „appendix“ gebraucht, sondern schon 1693 von Wallis in seiner Algebra im Kapitel über Kettenbruchentwickelung angewandt worden; später wird Euler diesen Ausdruck dann auf die Logarithmen übertragen haben.

Versammlung am 13. April 1901.

Der Jahresverwalter gedenkt des verstorbenen Mitgliedes, Herrn Oberingenieur Meyer und hebt dessen Bedeutung und Verdienste um Hamburgs bauliche Entwickelung hervor. Nach einem Bericht des Herrn Professor Dr. Ahlborn über die Revision der Kasse wird der Kasseführung Decharge erteilt. Die Versammlung genehmigt den Schriftenaustausch mit den „Annals of Mathematics“ in Cambridge

Mass. Als ordentliche einheimische Mitglieder werden die Herren A. Schumpelick und Dr. Hillers aufgenommen.

Hierauf hält Herr Dr. Classen einen Vortrag über „Thiesens Theorie der Bilderzeugung durch zentrierte optische Systeme". Es wird gezeigt, dafs für den Durchgang des Lichtes durch ein optisches System aus der Richtung des eintretenden Lichtstrahls und der Charakteristik die Richtung nach Verlassen des Systems berechnet werden kann. Die Beschränkung in der Charakteristik auf die 2ten Potenzen führt zu einer ersten Annäherung für die optische Bilderzeugung, während die Hinzufügung der 4ten Potenzen auf die 5 Seidel'schen Fehler der optischen Abbildung führt.

Versammlung am 11. Mai 1901.

Der Jahrverwalter teilt mit, dafs er im Namen der Gesellschaft Herrn Professor Cantor zu seinem 50jährigen Doktor-Jubiläum beglückwünscht hat. Hierauf spricht Herr G. Lony „über Tetraëder in besonderen Lagen". Nachdem der Vortragende die mehrfach perspektive Lage zweier Tetraëder behandelt, wird zur Besprechung der hyperboloïdischen Lage zweier Tetraëder übergegangen d. h. derjenigen Lage, für welche die 4 Verbindungsgeraden entsprechender Ecken oder die 4 Schnittgeraden entsprechender Seiten derselben Regelschaar eines Hyperboloïdes angehören, und im Anschlufs an Muth (Zeitschrift für Math. und Physik, Jahrgang 38) der Satz bewiesen, dafs zwei Tetraëder, welche hyperboloïdisch in Bezug auf die Verbindungsgeraden entsprechender Ecken liegen, die gleiche Lage in Bezug auf die Schnittgeraden entsprechender Seiten haben.

Versammlung am 15. Juni 1901.

Der Wunsch des Herrn Sieveking, ihn nach seiner Übersiedelung nach Bielefeld in der Liste der auswärtigen Mitglieder weiterzuführen, wird genehmigt. Herr Dr. Schröder trägt vor über „die elementare darstellend-geometrische Behandlung der Haupteigenschaften des Plücker'schen Konoïds". Nach einer kurzen allgemeinen, sich auf die Darstellung von Punkt, Gerade und Ebene beziehenden Einleitung und nach einer Definition des Plücker'schen Konoïds (Archiv der Math. u. Physik, 3. Reihe Band I „Etude élémentaire du conoïde de Plücker") wird gezeigt, dafs dasselbe eine Fläche dritter Ordnung ist und die Haupteigenschaften desselben im wesentlichen im Anschlufs an obige Arbeit behandelt.

Hierauf hält Herr Professor Dr. Thaer einen Vortrag „Zur Definition der goniometrischen Funktionen“. Zunächst kann der Sinus eines Winkels definiert werden als die Zahl, mit welcher der Durchmesser eines Kreises multipliziert werden mufs, der durch den Scheitel des Winkels geht und die beiden Schenkel schneidet, um die Sehne zu erhalten, welche die beiden Schenkel verbindet und auf Grund derselben Auffassung zur Definition von Cosinus und Tangens übergegangen. Die Betrachtung wird auf den Fall der stumpfen und überstumpfen Winkel erweitert und zum Schlusse hervorgehoben, dafs der Beweis des Additionstheorems für alle einzelnen Winkelarten besonders zu führen ist.

Versammlung am 14. September 1901.

Nachdem der Jahrverwalter das Andenken des in den Ferien verstorbenen auswärtigen Mitgliedes, Herrn Professor Dr. Schur in Göttingen, geehrt und seine Arbeiten auf dem Gebiete der astronomischen Beobachtungen hervorgehoben, wird Herr Dreſsler als ordentliches einheimisches Mitglied aufgenommen. Hierauf hält Herr Dr. Pund einen Vortrag „über die Möglichkeit geometrischer Konstruktionen“. Nach Hervorhebung der früheren Arbeiten von Mascheroni, Ferrari, Tartaglia, Cardano, Poncelet und Steiner wird die Lösbarkeit der Konstruktionsaufgaben für den Fall behandelt, wo statt des Zirkels nur die Streckenabtragung benutzt wird. Zum Schlusse wird die Erweiterung des Lösbarkeitsbereiches durch Zulassung weiterer Hülfsmittel, z. B. der Kegelschnitte und der Kurven dritter Ordnung besprochen.

Versammlung am 12. Oktober 1901.

Der Jahrverwalter bringt die Austrittserklärung des Herrn Direktors Dr. Reinmüller zur Kenntnis der Versammlung und weist auf eine neu erschienene Arbeit des Herrn Wirkl. Geheimen Admiralitätsrates Prof. Dr. v. Neumayer hin „Bestimmung der Länge des Sekundenpendels in Melbourne“. Herr Dr. Schröder spricht über den zahlentheoretischen Satz, dafs es keine Zahl $x > 30$ giebt, für welche alle kleineren, zu x teilerfremden Zahlen absolute Primzahlen sind. Der Beweis wird in doppelter Weise geführt und zwar einmal mit Hülfe des von Tschebischef bewiesenen Theorems, dafs für jede Zahl $a > 1$ zwischen a und $2a$ mindestens eine Primzahl liegen mufs, und zweitens an der Hand der kürzlich von E. Landau im „Archiv der Mathematik und Physik“ erschienenen Arbeit.

Versammlung am 9. November 1901.

Herr Oberlehrer K. Siegmeyer wird als ordentliches einheimisches Mitglied in die Gesellschaft aufgenommen. Herr Dr. Schwassmann hält einen Vortrag über „die Theorie eines Apparates zur Ausmessung von Sternphotographien in Winkelkoordinaten". Derselbe ist von Kapteyn (Groningen) ersonnen und gestattet unmittelbare Ablesung der Winkelkoordinaten eines Sternes und zwar gültig für eine beliebige Epoche, während die Aufnahme beliebig viele Jahre vorher oder nachher gemacht ist. Die Aufhebung des Einflusses der Präzessions- und Nutationsbewegung auf die Erdachse wird erklärt und die Berücksichtigung der Differentialrefraktion und -Aberration (gegen die Mitte der Platte) durch eine einfache Tabelle gezeigt. Zum Schlusse wird der Weg skizziert, wie man zu den Grundgleichungen für die Reduktion der Messungen gelangt.

Darauf besprach Herr Schönwiese den Fall einer Leibrente, mit welcher die Bedingung verknüpft ist, dafs beim Tode des Rentenempfängers noch der Betrag an die Erben zu zahlen ist, um welchen eventuell die Einzahlung die empfangenen Renten übersteigt, die Entwickelung der Formeln führt zu transzendenten Gleichungen, deren Lösung nur durch allmähliche Annäherung möglich ist.

Versammlung am 14. Dezember 1901.

Nachdem Herr Dr. O. Fulst, Oberlehrer an der Navigationsschule in Hamburg, als ordentliches einheimiches Mitglied aufgenommen, hält Herr Dr. Franck einen Vortrag über konjugierte und adjungierte Kurven-Systeme einer Fläche. Es wird diejenige Lie'sche Berührungstransformation besprochen, welche gerade Linien in Kugeln überführt, und die geometrischen Eigenschaften derselben besprochen. Für diejenigen Kurvensysteme, in welche die konjugierten Kurvensysteme einer Fläche übergehen, wird der Name „adjungierte Systeme" vorgeschlagen. Zum Schlusse wird bewiesen, dafs gleichen Durchmessern der Dupin'schen Indikatrix adjungierte Richtungen entsprechen, und einige geometrische Eigenschaften dieser Richtungen hervorgehoben.

Versammlung am 11. Januar 1902.

Herr Dr. Ahrens (Magdeburg) wird als auswärtiges Mitglied aufgenommen.

Es wird beschlossen, dafs an die Monatsberichte der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, welche seit Beginn dieses Jahres an die Stelle der früheren Jahresberichte getreten sind, Referate der Versammlungen eingeschickt werden sollen. Herr Dr. Pund hält einen Vortrag „Arithmetische Begründung der Invariantentheorie". Eine nähere Ausführung befindet sich in den vorliegenden „Mitteilungen der Math. Gesellschaft".

Für Bereicherung ihrer Bibliothek ist die Mathematische Gesellschaft folgenden Herren zu Dank verpflichtet:
Cantor, Crivetz, Darrege, Franz, Harzer, Karstens, Kiebitz, Kiepert, Krause, Lucas, Reiger, Schröder, Umbach, Wagner, Weil.

Büchersendungen sind gefl. zu richten nach

Mathematische Gesellschaft, Hamburg,
Patriotisches Gebäude.

MITTHEILUNGEN
ER MATHEMATISCHEN GESELLSCHAFT
IN HAMBURG.

ND IV. № 3. AUSGEGEBEN IM FEBRUAR 1903.

Gleichungen zwischen Bedingungen bei specieller Lage linearer Räume.

Von H. Schubert in Hamburg.

Die allgemeinen n-dimensionalen Incidenzformeln für zwei lineare ıume theilte ich zuerst in einem Vortrage mit, den ich am 13. Sepmber 1902 vor der Mathematischen Gesellschaft in Hamburg geılten habe. Im Einklang mit der in meinem „Kalkül der abzählenden eometrie“ (Leipzig 1879) eingeführten Terminologie, verstehe ich ıch in der n-dimensionalen Verallgemeinerung der abzählenden eometrie unter einer Incidenzformel[1]) für zwei lineare Räume ıter und $(m+q)$ter Dimension jede Gleichung, welche zwischen len solchen Räumen auferlegbaren characteristischen Bedingungen Grundbedingungen) besteht, falls der m-dimensionale lineare Raum nnerhalb des $(m+q)$-dimensionalen linearen Raumes liegt. Diese ncidenzformeln erwähnte ich auch in einem zweiten Vortrage, den ch vor der „Deutschen Mathematiker Vereinigung“ bei deren Jahresersammlung in Karlsbad am 22. September 1902 gehalten habe.)ieser zweite Vortrag ist inzwischen in dem „Jahresbericht der Deutchen Mathematiker-Vereinigung“ (12ter Band, 2tes Heft) erschienen.)ie Beweise der Incidenzformeln habe ich in einer Abhandlung niedergelegt, die ich im October 1902 an die Math. Ann. geschickt habe.

Im Folgenden soll nun eine Verallgemeinerung der Incidenzormeln mitgetheilt werden, die sich auf den Fall bezieht, dass ein $(m+q)$-dimensionaler linearer Raum und ein $(m+q')$-dimensionaler linearer Raum einen m-dimensionalen linearen Raum gemeinsam haben.

1) Von n-dimensionalen Incidenzformeln waren bisher nur zwei bekannt, die sich beide auf den Fall beziehen, dass ein Punkt in einem Strahle liegt ($m=0$, $q=1$). Die erste gab ich in meiner Abhandlung über vielfache Tangenten (Math. Ann. Bd. 26, S. 51, 1884) die zweite Herr Pieri (Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, tomo V, 1891).

Man erkennt, dass dieser Fall allgemeiner ist als der der Incidenz, weil der Fall der Incidenz aus dem Fall, der hier behandelt werden soll, durch die Specialisirung $q' = 0$ folgt. Da in dem neuen Falle die beiden in Betracht kommenden Räume zwar nicht einander incident sind, aber doch sich in specieller Lage zu einander befinden, so sollen die Gleichungen zwischen Bedingungen, die bestehen, sobald diese specielle Lage vorhanden ist, „Gleichungen der speciellen Lage" heissen. Die Dimension des Raumes, innerhalb dessen wir uns die jedesmal in Rede stehenden Räume zu denken haben, soll immer n sein; sodass n gross genug ist, damit eine specielle Lage eintritt, wenn der $(m + q)$-dimensionale lineare Raum und der $(m + q')$-dimensionale lineare Raum einen m-dimensionalen linearen Raum gemeinsam haben, d. h. n muss grösser als $m + q + q'$ sein. Ferner soll im Folgenden immer $q \geqq q'$ sein.

§ 1. Bezeichnungsweise der Grundbedingungen.

Die Bedingungen, welche in die gesuchten Gleichungen der speciellen Lage eintreten, sind dieselben, welche auch in die Formel eintraten, die das Characteristiken-Problem für lineare Räume löst, und die ich 1885 in den Mitt. der Hamb. Math. Ges. abgeleitet habe. Diese Bedingungen habe ich damals „Grundbedingungen" genannt und für dieselben eine Bezeichnungsweise eingeführt, welche auch die italienischen Forscher auf dem Gebiete der n-dimensionalen abzählenden Geometrie adoptirt haben. Um diese Bezeichnung auseinander zu setzen und an diese eine neue verbesserte Bezeichnungsweise anzuschliessen, wollen wir einen p-dimensionalen linearen Raum kurz einen $[p]$ nennen. Dann stecken alle Grundbedingungen des $[m]$ in dem Symbol

$$(a_0, a_1, a_2, \ldots, a_m),$$

welches bedeuten soll, dass ein $[a_0]$, ein $[a_1]$ u. s. f. bis $[a_m]$ gegeben sind, und zwar so, dass jeder $[a_i]$ immer in dem $[a_{i+1}]$ liegt, und dass dann der $[m]$ mit dem $[a_i]$ einen $[i]$ gemeinsam haben soll.

Diese Bezeichnung der Grundbedingungen linearer Räume habe ich jetzt dahin verbessert, dass ich

$$\text{jedes } a_i \text{ durch } n - (m - i) - a_i \text{ ersetze.}$$

Der Vorteil dieser neuen Bezeichnungsweise liegt vor allem darin, dass dabei die Summe der in Klammer gesetzten Zahlen stets die Dimension der so bezeichneten Bedingung angiebt. Dabei wird der Raum, in welchem alle in Betracht kommenden linearen

Räume gedacht werden, immer als n-dimensional betrachtet, sodass die Dimension eines Raumes nicht grösser als n sein kann.

Sowie bei der alten Bezeichnungsweise eine nachfolgende Zahl immer grösser als eine vorhergehende sein musste, so darf bei der neuen Bezeichnung auf eine Zahl nie eine kleinere folgen. Wenn gleiche Zahlen aufeinanderfolgen, so braucht man diese nur einmal zu schreiben, wenn man der einmal geschriebenen Zahl als Index die Zahl beisetzt, welche angiebt, wie oft sie zu setzen ist. Hierfür drei Beispiele:

1. $(1, 0_5)$ ist eine Bedingung erster Dimension, die sich auf einen [5] bezieht, die voraussetzt, dass ein $[n-6]$ gegeben ist, und die verlangt, dass der [5] diesen $[n-6]$ in einem Punkte treffe.

2. $(4, 2, 1_7)$ ist eine Bedingung dreizehnter Dimension, die sich auf einen [8] bezieht, die voraussetzt, dass ein $[n-1]$, in ihm liegend ein $[n-9]$, und in diesem liegend ein $[n-12]$ gegeben ist, und verlangt dann, dass der [8] in dem $[n-1]$ liege, dabei mit dem $[n-9]$ einen Strahl und mit dem $[n-12]$ einen Punkt gemeinsam habe.

3. $(a, 1_v, 0_{m-v})$ ist eine Bedingung $(a+v)$-ter Dimension, die sich auf einen $[m]$ bezieht, die voraussetzt, dass ein $[n-m+v-1]$, und in ihm liegend ein $[n-a-m]$ gegeben ist, und verlangt dann, dass der $[m]$ mit dem $[n-m+v-1]$ einen $[v]$, und mit dem $[n-a-m]$ einen Punkt gemeinsam habe.

Die Bedingung höchster Dimension für einen $[m]$ ist also mit $((n-m)_{m+1})$ zu bezeichnen, ihre Dimension $(n-m)(m+1)$ ist, wie man sieht, gleich der Constantenzahl des $[m]$. Die Bedingung nullter Dimension ist mit (0_{m+1}) zu bezeichnen. Die Symbole für alle einem $[m]$ auferlegbaren Grundbedingungen stellen also die sämtlichen Combinationen $(m+1)$ter Klasse mit Wiederholung der $n-m+1$ Zahlen von 0 bis $n-m$ dar, ihre Anzahl beträgt also $\frac{(n+1)!}{(m+1)!\,(n-m)!}$, wie ich schon 1884 in meiner ersten Abhandlung über n-dimensionale abzählende Geometrie (Math. Ann., Bd. 26) gezeigt habe.

§ 2. Die Incidenzformeln.

Die von mir im 26. Bande der Math. Annalen abgeleitete Formel für die Incidenz von Punkt und Strahl lautet in der hier in § 1 erörterten neuen Bezeichnungsweise folgendermassen:

1) $\qquad (a, 1) - (1)(a, 0) + (a+1) = 0, \quad$ wo a positiv ist.

Hierbei unterscheiden sich die Dimensionen der beiden in Incidenz befindlichen Räume um eins, indem dieselben gleich null und gleich

eins sind, Genau so erhält man auch die grundlegenden Incidenzformeln für den Fall, dass die Dimensionen m und $m+1$ sind, nämlich:

2) $$(a,\ 1,\ 0_m) - (1,\ 0_m)(a,\ 0_{m+1}) + (a+1,\ 0_m) = 0.$$

Solcher Formeln wie (2) giebt es jedoch $m+1$, weil man die den Bedingungs-Symbolen angehängten Nullen theilweise oder sämmtlich durch Einsen ersetzen kann. Allgemeiner gilt nämlich die Incidenzformel:

3) $$(a,\ 1,\ 1_v,\ 0_{m-v}) - (1,\ 1_v,\ 0_{m-v})(a,\ 0_{m+1}) + (a+1,\ 1_v,\ 0_{m-v}) = 0,$$

wo a eine beliebige positive ganze Zahl ist, und wo v irgend eine der $m+1$ Zahlen 0 bis m ist, sodass auch bei gegebenem a die Formel (3) noch immer $m+1$ Formeln umfasst. Aus den Incidenzformeln für den Dimensions-Unterschied eins erhält man die für den Dimensions-Unterschied zwei, indem man beachtet, dass, wenn ein $[m]$ in einem $[m+1]$ und dieser $[m+1]$ in einem $[m+2]$ liegt, auch der $[m]$ in dem $[m+2]$ liegen muss, und demgemäss die auf den $[m+1]$ bezüglichen Bedingungs-Symbole zu eliminiren hat. So analog zum Dimensions-Unterschied drei, vier u. s. w. übergehend, gelangt man zu der folgenden Incidenzformel für einen $[q]$ und einen ihm incidenten Punkt:

4) $$\begin{aligned}&(a,\ 1_q) - (1)(a,\ 1_{q-1},\ 0) + (2)(a,\ 1_{q-2},\ 0_2) - \cdots \\ &+ (-1)^q (q)(a,\ 0_q) - (-1)^q (a+q) = 0\end{aligned}$$

und allgemeiner zu der Incidenzformel für einen $[m+q]$ und einen ihm incidenten $[m]$:

5) $$\begin{aligned}&(a,\ 1_{v+q},\ 0_{m-v})(0_{m+1}) - (a,\ 1_{q-1},\ 0_{m+1})(1,\ 1_v,\ 0_{m-v}) \\ &+ (a,\ 1_{q-2},\ 0_{m+2})(2,\ 1_v,\ 0_{m-v}) - (a,\ 1_{q-3},\ 0_{m+3})(3,\ 1_v,\ 0_{m-v}) \\ &+ \cdots\cdots \\ &+ (-1)^q (a,\ 0_{m+q})(q,\ 1_v,\ 0_{m-v}) - (-1)^q (0_{m+q+1})(a+q,\ 1_v,\ 0_{m-v}) = 0,\end{aligned}$$

wo in jedem symbolischen Producte das auf den $[m+q]$ bezügliche Symbol vor das auf den $[m]$ bezügliche Symbol gesetzt ist, und wo v wieder irgend eine der Zahlen von 0 bis m bedeutet.

§ 3. Die Eliminations-Determinante.

Um zu den Gleichungen der speciellen Lage für den Fall zu gelangen, dass ein $[m+q]$ und ein $[m+q']$ einen $[m]$ gemeinsam

haben, können wir die Gleichung 5) gelten lassen und eine zweite Gleichung, die aus 5) hervorgeht, wenn man q durch q' ersetzt. Dann können wir es auch, durch Wahl der willkürlichen positiven Zahl a, so einrichten, dass die letzten Glieder der beiden Incidenzformeln übereinstimmen. Wir haben nämlich zu diesem Zweck, nachdem wir in 5) q durch q' ersetzt haben, a durch $a + q - q'$ zu ersetzen. Nachdem so die letzten Glieder der beiden Formeln in Übereinstimmung gebracht worden sind, eliminiren wir sie durch Addition oder Subtraction und erhalten:

$$
\begin{aligned}
6) \qquad & [(a, 1_{v+q}, 0_{m-v}) \mp (a+q-q', 1_{v+q'}, 0_{m-v})](0_{m+1}) \\
& -[(a, 1_{q-1}, 0_{m+1}) \mp (a+q-q', 1_{q'-1}, 0_{m+1})](1, 1_v, 0_{m-v}) \\
& +[(a, 1_{q-2}, 0_{m+2}) \mp (a+q-q', 1_{q'-2}, 0_{m+2})](2, 1_v, 0_{m-v}) \\
& \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
& +(-1)^{q'}[(a, 1_{q-q'}, 0_{m+q'}) \mp (a+q-q', 0_{m+q'})](q', 1_v, 0_{m-v}) \\
& -(-1)^{q'}(a, 1_{q-q'-1}, 0_{m+q'+1})(q'+1, 1_v, 0_{m-v}) \\
& \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
& +(-1)^{q}(a, 0_{m+q})(q, 1_v, 0_{m-v}) = 0,
\end{aligned}
$$

wo in den eckigen Klammern das negative oder das positive Vorzeichen zu wählen ist, je nachdem $q - q'$ gerade oder ungerade ist, und wo wieder v jede der Zahlen von 0 bis m bedeuten kann.

Die Gleichung 6) enthält $q + 1$ auf den $[m]$ bezügliche Bedingungs-Symbole, wobei das Symbol (0_{m+1}), das nullter Dimension ist, mitgerechnet ist. Wenn wir daher $q + 1$ derartiger Gleichungen, wie 6) aufstellen, so erhalten wir ein System von $q + 1$ Gleichungen, aus denen wir die auf den $[m]$ bezüglichen Bedingungen wie Unbekannte eliminiren können. Das Verschwinden einer Determinante, die nur auf den $[m + q]$ und auf den $[m + q']$ bezügliche Bedingungen enthält, wird dann ausdrücken, dass der $[m + q]$ und der $[m + q']$ einen $[m]$ gemeinsam haben, und somit zu den gesuchten Gleichungen der speciellen Lage führen. Zu einem System von $q + 1$ derartiger Gleichungen, wie 6) gelangen wir aber dadurch leicht, dass wir dem Buchstaben a irgend welche $q + 1$ verschiedene positiv-ganzzahlige Werte erteilen. Diese Werte mögen $a_0, a_1, a_2, \ldots a_q$ sein, sodass

$$a_0 > a_1 > a_2 > \cdots > a_q > 0$$

ist. Da Gleichungen zwischen Bedingungen höherer Dimension aus Gleichungen zwischen Bedingungen niederer Dimension ableitbar sind, aber nicht nothwendiger Weise umgekehrt, so kommt es darauf an,

solche Gleichungen der speciellen Lage zu erhalten, bei denen die auftretenden Bedingungs-Symbole möglichst niedriger Dimension sind. Dieses Ziel erreichen wir, wenn wir $a_i = q + 1 - i$ setzen. Dann wird aber die durch Verschwinden der Determinante entstehende Gleichung der speciellen Lage für $v = 0$ von der Dimension:

$$\tfrac{1}{2}(q+1)(q+2) + \tfrac{1}{2}q(q+1) = (q+1)^2.$$

Eine Gleichung von noch geringerer Dimension, nämlich von der Dimension $(q+1)(q'+1)$, erhalten wir, wenn wir aus der Formel 6) nicht $q+1$, sondern nur $q'+1$ Gleichungen ableiten, indem wir für a setzen:

$$a_0, a_1, a_2, \ldots a_{q'},$$

und die dann noch fehlenden $q - q'$ Gleichungen direct aus Formel 5) ableiten, indem wir dort q durch q' ersetzen und für a der Reihe nach die Zahlen 1, 2, 3, ... bis $q - q'$ einsetzen. Wenn wir aus dem so entstehenden Systeme von $q+1$ Gleichungen, die auf den $[m]$ bezüglichen Bedingungen eliminiren, und dann jedes

$$a_i \text{ durch die Zahl } q' + 1 - i$$

ersetzen, erhalten wir eine Eliminations-Determinante, deren Glieder eine Dimension haben, die gleich der Summe aller Zahlen von 1 bis $q'+1$, vermehrt um die Summe aller Zahlen von $q - q'$ bis q ist, also gleich

$$(q+1)(q'+1)$$

ist. Nach der Elimination der $q+1$ auf den $[m]$ bezüglichen Symbole

$$(0_{m+1}),\ (1, 1_v, 0_{m-v}),\ (2, 1_v, 0_{m-v}),\ \ldots\ (q, 1_v, 0_{m-v})$$

erhalten wir, bei Festhaltung der Allgemeinheit der positiven ganzen Zahlen:

$$a_0, a_1, a_2 \ldots a_{q'},$$

eine gleich Null zu setzende Determinante, bei der die Columnen, der Reihe nach, die Koeffizienten der eliminirten Symbole (0_{m+1}), $(1, 1_v, 0_{m-v})$, ... $(q, 1_v, 0_{m-v})$ sind. Da die Determinante verschwinden soll, so können wir die Columnen gerader Nummer, wo k ungerade ist, mit minus eins multipliciren. So erhalten wir eine Determinante, deren Bau aus Folgendem ersichtlich ist.

1) Ihre Glieder mögen α_{ik} heissen, also:

$$\begin{vmatrix} \alpha_{00}, \ldots, & \alpha_{0k}, \ldots, & \alpha_{0q} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_{i0}, \ldots, & \alpha_{ik}, \ldots, & \alpha_{iq} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_{q0}, \ldots, & \alpha_{qk}, \ldots, & \alpha_{qq} \end{vmatrix} = 0$$

2) Für $i \leqq q'$, $k = 0$ ist:

$$\alpha_{i0} = (a_i,\ 1_{v+q},\ 0_{m-v}) \mp (a_i + q - q',\ 1_{v+q'},\ 0_{m-v}).$$

3) Für $i \leqq q'$, $k > 0$, $k \leqq q'$ ist:

$$\alpha_{ik} = (a_i,\ 1_{q-k},\ 0_{m+k}) \mp (a_i + q' - q,\ 1_{q'-k},\ 0_{m-v}).$$

4) Für $i \leqq q'$, $k > q'$ ist:

$$\alpha_{ik} = (a_i,\ 1_{q-k},\ 0_{m+k}).$$

5) Für $i > q'$, $k = 0$ ist:

$$\alpha_{i0} = (q + 1 - i,\ 1_{v+q'},\ 0_{m-v}).$$

6) Für $i > q'$, $k > 0$, $k \leqq q'$ ist:

$$\alpha_{ik} = (q + 1 - i,\ 1_{q'-k},\ 0_{m+k}).$$

7) Für $i > q'$, $k > q'$ ist:

$\alpha_{ik} = 0$, ausser wenn $i + k = q + q' + 1$ ist, in welchem Falle $\alpha_{ik} = (-1)^k$ ist.

8) Man beachte, dass die an a angesetzten Indices nur zur Unterscheidung der $q' + 1$ willkürlichen, positiven ganzen Zahlen dienen, dass aber die an 1 und an 0 angesetzten Indices zählen, wie oft die 1 oder die 0 in dem betreffenden Bedingungssymbol zu setzen ist.

9) Schon oben ist erwähnt, dass bei denjenigen Gliedern der Determinante, welche eine Summe oder eine Differenz enthalten, die Differenz zu nehmen ist, wenn $q - q'$ gerade ist, die Summe, wenn $q - q'$ ungerade ist.

§ 4. Zusammenfassung jeder auf denselben linearen Raum bezüglichen Unterdeterminante zu einer einzigen Grundbedingung.

Durch die in § 3 angegebene Determinante ist die Lösung des Problems, die Gleichung der speciellen Lage für einen $[m + q]$ und einen $[m + q']$, die einen $[m]$ gemeinsam haben, aufzustellen, zwar

vorbereitet, aber noch nicht bewerkstelligt. Bei Zerlegung der Determinante in ihre einzelnen Glieder zeigt sich nämlich, dass dieselbe eine algebraische Summe von symbolischen Produkten je zweier Faktoren ist, sodass der eine Faktor immer eine Determinante ist, welche sich aus Bedingungen zusammensetzt, die sich lediglich auf den $[m + q]$ beziehen, der andere Faktor eine Determinante ist, deren einzelne Terme Bedingungen sind, die sich lediglich auf den $[m + q']$ beziehen. Diese Theil-Determinanten würde man nun als algebraische Summen von Bedingungen darstellen können, wenn das Problem gelöst wäre, allgemein das symbolische Produkt zweier auf einen $[l]$ bezüglichen Bedingungen als Summe von eben solchen Bedingungen darzustellen. Dieses Problem ist jedoch allgemein bisher nur für $l = 0$, $l = 1$, $l = 2$, also für den Punkt, den Strahl und die Ebene, gelöst.[1]) Hier jedoch sind die Bedingungen, die zusammen zu setzen sind, nämlich

$$(a_i,\ 1_{w_i},\ 0_{l-w_i}) \text{ und } (a_k,\ 1_{w_k},\ 0_{l-w_k})$$

nicht allgemein, und es gelang daher dem Verfasser nach und nach, die fraglichen Theil-Determinanten aufzulösen, und zwar ergab sich das Resultat, dass jede der Theil-Determinanten gleich einer einzigen Grundbedingung ist. Wenn nämlich in der folgenden Determinante von Grundbedingungen, die sich auf einen $[l]$ beziehen,

$$a_0,\ a_1,\ \ldots\ a_l$$

beliebige positive Zahlen sind, sodass $a_i > a_{i+1}$ ist, wenn ferner $w_0,\ w_1,\ w_2,\ \ldots\ w_l$ zählen, wie oft die Zahl 1 in jedem Bedingungs-Symbol zu setzen ist, und analog $l - w_0,\ l - w_1,\ \ldots\ l - w_l$ zählen, wie oft die Zahl 0 in jedem Symbol zu setzen ist, so ergiebt sich, dass die Determinante:

$$\begin{vmatrix} (a_0,\ 1_{w_0},\ 0_{l-w_0}), & (a_0,\ 1_{w_1},\ 0_{l-w_1}) \ldots & (a_0,\ 1_{w_l},\ 0_{l-w_l}) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ (a_l,\ 1_{w_0},\ 0_{l-w_0}), & (a_l,\ 1_{w_1},\ 0_{l-w_1}) \ldots & (a_l,\ 1_{w_l},\ 0_{l-w_l}) \end{vmatrix}$$

wenn $w_0 > w_1 > w_2 \cdots > w_l$ ist, gleich der folgenden Grundbedingung ist:

$$(b_0,\ b_1,\ b_2,\ \ldots\ b_l,\ c_{l+1},\ c_l,\ c_{l-1},\ \ldots\ c_1,\ c_0),$$

1) Für den Punkt ist die Lösung trivial, für den Strahl löste ich das Problem 1884 in den Math. Ann. Bd. 26, S. 40 u. f., für die Ebene gaben Herr Giambelli und Herr Palatini in Torino eine Lösung, und zwar 1901 in den Berichten der Accademia Reale Della Scienze di Torino.

wo $b_i = a_i + i$, wo c_{t+1} bedeutet, dass die Zahl $t+1$ w_t mal zu setzen ist, wo c_t bedeutet, dass die Zahl t $w_{t-1} - w_t - 1$ mal zu setzen ist, wo allgemeiner c_k bedeutet, dass die Zahl k $w_{k-1} - w_k - 1$ mal zu setzen ist, und wo endlich c_0 bedeutet, dass die Zahl Null $l - w_0$ mal zu setzen ist. Die Determinante hat die Dimension $(a_0 + a_1 + \cdots a_t) + (w_0 + w_1 + \cdots w_t)$. Die ihr gleichgesetzte Grundbedingung hat die Dimension $(a_0 + a_1 + \cdots a_t) + \frac{1}{2} t(t+1)$ $+ [(t+1) \cdot w_t + t(w_{t-1} - w_t - 1) + (t-1)(w_{t-2} - w_{t-1} - 1) + \cdots$ $+ 1 \cdot (w_0 - w_1 - 1) + 0 \cdot (l - w_0)]$. Der Ausdruck in der eckigen Klammer wird aber gleich $w_t + w_{t-1} + \cdots + w_0 - \frac{1}{2} t(t+1)$. So erkennt man, dass die Dimensionen übereinstimmen, was ja auch der Fall sein musste.

§ 5. Aufstellung der gesuchten Gleichungen der speciellen Lage.

Aus der in § 3 aufgestellten Determinante lässt sich nun mit Benutzung des Inhalts von § 4 eine algebraische Summe von Produkten je zweier Faktoren ableiten, von denen der erste eine auf den $[m+q]$ bezügliche Grundbedingung ist, der zweite eine auf den $[m+q']$ bezügliche Grundbedingung ist, dergestalt, dass diese Summe immer null ist, wenn der $[m+q]$ und der $[m+q']$ einen $[m]$ gemeinsam haben. Jedes dieser Produkte enthält die $q'+1$ Buchstaben $a_0, a_1, a_2, \cdots a_{q'}$, für welche Buchstaben beliebige, aber untereinander verschiedene positive Zahlen gesetzt werden dürfen, der Grösse nach geordnet, sodass eine kleinere immer einer grösseren nachfolgt. Dabei sei:

$$a_0 > a_1 > a_2 \cdots > a_{q'}.$$

In dieser algebraischen Summe wollen wir immer alle diejenigen Glieder, in denen die auf den $[m+q']$ bezügliche Grundbedingung p von den $q'+1$ Buchstaben $a_0, a_1, \cdots a_{q'}$, enthält, durch das Zeichen f_p zusammenfassen, sodass die gesuchte Gleichung der speciellen Lage in folgender Form geschrieben werden kann:

$$f_0 + f_1 + \cdots + f_p + \cdots + f_{q'} = 0.$$

Beim Aufbau von f_p wollen wir uns, der Kürze wegen, auf $m = 0$ beschränken, sodass, da v höchstens m sein kann, auch v null wird. Die auf ein allgemeines m bezügliche Formel lässt sich aus der für $m = 0$ in derselben Weise ableiten, wie in § 2 die Incidenzformel für ein beliebiges m aus der für $m = 0$ hervorging. Da die gesuchte algebraische Summe *null werden* soll, so hat man, bezüglich des Vor-

zeichens jedes einzelnen Gliedes nur darauf zu achten, wann zwei Glieder gleiche, und wann ungleiche Vorzeichen haben. Wenn wir jedoch festsetzen, dass das Glied, welches gar keine auf den $[q']$ bezügliche Bedingung enthält, oder, was dasselbe ist, dessen auf $[q']$ bezügliche Bedingung nulldimensional ist, immer positiv sein soll, so erhält jedes Glied ein bestimmtes Vorzeichen, und zwar ergab sich die folgende Vorzeichen-Regel: Um das Vorzeichen eines Gliedes zu bestimmen, setze man in dem auf $[q']$ bezüglichen Faktor dieses Gliedes jedes a_i gleich $q' + 1 - i$, und addire dann alle Zahlen, die diesen Faktor zusammensetzen. Jenachdem die erhaltene Summe gerade oder ungerade wird, bekommt das Glied das positive oder das negative Vorzeichen.

Hat man gewisse p von den $q' + 1$ Buchstaben a für eine auf den $[q']$ bezügliche Bedingung ausgewählt, so hat man die $q' + 1 - p$ übrigen Buchstaben a für diejenige auf den $[q]$ bezügliche Bedingung zu verwenden, die mit jener Bedingung symbolisch zu multipliciren ist, sodass hiernach, je nach der Auswahl der p Buchstaben, f_p in

$$\frac{(q'+1)!}{p!\,(q'+1-p)!}$$

Gruppen von Gliedern zerfällt. Um nun alle Glieder, aus denen f_p besteht, genau angeben zu können, wollen wir eine Abkürzung einführen. Wir wollen nämlich:

$$A_e^f = a_{i_1} + f,\ a_{i_2} + f + 1,\ a_{i_3} + f + 2,\ \cdots\ a_{i_e} + f + e - 1$$

setzen, wo die an a angesetzten Indices andeuten sollen, dass irgend welche e von den $q' + 1$ Buchstaben a zu nehmen sind. Der erste Faktor jedes in f_p vorkommenden Produktes kann hiernach folgendermaassen geschrieben werden:

$$(A^0_{q'+1-p},\ g_1, g_2, g_3,\ \cdots\ g_{q-q'+p}),$$

wo die $q - q' + p$ Zahlen g irgendwelche $q - q' + p$ nach der Grösse geordnete Zahlen aus den $q' + 2 - p$ Zahlen von 0 bis $q' + 1 - p$ sind, sodass hiernach mit $A^0_{q'+1-p}$ soviel Bedingungs-Symbole beginnen, wie es Kombinationen $(q - q' + p)$-ter Klasse mit Wiederholung bei $q' + 2 - p$ Elementen giebt. Diese Zahl ist aber gleich der Zahl der Kombinationen ohne Wiederholung $(q - q' + p)$-ter Klasse bei $q' + 2 - p + q - q' + p - 1$ oder, was dasselbe ist, bei $q + 1$ Elementen. Also erhalten wir in f_p:

$$\frac{(q+1)!}{(q-q'+p)!\,(q'-p+1)!}$$

Glieder, deren jedes im ersten Faktor ein Bedingungssymbol hat, das mit $A^0_{q'+1-p}$ anfängt. Und da, wie schon oben erwähnt ist, je nach der Auswahl der p Buchstaben f_p in

$$\frac{(q'+1)!}{p!\,(q'+1-p)!}$$

Gruppen von Gliedern zerfällt, so besitzt f_p im ganzen

$$\frac{(q'+1)!}{p!\,(q'+1-p)!}\cdot\frac{(q+1)!}{(q-q'+p)!\,(q'-p+1)!}$$

Glieder. Setzt man in dem soeben erhaltenen Produkte nach einander $p=0$, $p=1$, $\cdots$ bis $p=q'+1$, so erhält man $q'+2$ Produkte, deren Summe die Anzahl aller Glieder der gesuchten Gleichung der speciellen Lage ergiebt. Diese Summe aber wird, wegen bekannter Eigenschaften der Binomialkoeffizienten einfach:

$$\frac{(q+q'+2)!}{(q+1)!\,(q'+1)!}.$$

Bisher ist nur der erste Faktor jedes Produktes von f_p angegeben, der ja eine auf den $[q+1]$ bezügliche Bedingung darstellt. Es ist wünschenswerth, den zweiten auf den $[q'+1]$ bezüglichen Faktor, in seiner Abhängigkeit von dem ersten Faktor darzustellen, da es dann für jeden, der mit Wiederholungen kombiniren kann, sehr leicht ist, ohne Kenntniss der in § 4 angegebenen Determinante, sämmtliche

$$\frac{(q+q'+2)!}{(q+1)!\,(q'+1)!}$$

Glieder der Gleichung hinzuschreiben, die erfüllt wird, wenn ein $[q]$ und ein $[q']$ sich in einem Punkte schneiden. Wenn der erste, auf den $[q]$ bezügliche Faktor, wie oben,

$$(A^0_{q'+1-p},\, g_1, g_2, g_3, \cdots, g_{q-q'+p})$$

heisst, so beginnt das Symbol des zweiten Faktors mit

$$A_p^{q-q'},$$

daran ist die Zahl $q-q'+p$ anzuschliessen, die

$$q'+1-p-g_1$$

mal zu setzen ist, dann folgt die Zahl $q-q'+p-1$, die g_1-g_2 mal zu setzen ist, dann folgt die Zahl $q-q'+p-2$, die g_2-g_3 mal zu setzen ist, u. s. w., sodass die Zahl $q-q'+p-k$ genau

$g_k - g_{k+1}$ mal zu setzen ist. Hiernach ergiebt sich für die Summe der noch auf $A_p^{q-q'}$ folgenden Zahlen:

$$(q' + 1 - p)(q - q' + p) - g_1 - g_2 \cdots - g_{q-q'+p}.$$

Demnach ist die Summe der in beiden Faktoren auf $A^0_{q'+1-p}$ bezw. $A_p^{q-q'}$ noch folgenden Zahlen gleich:

$$(q' + 1 - p)(q - q' + p).$$

Hieraus aber lässt sich leicht die Dimension jedes Gliedes der gesuchten Gleichung der speciellen Lage berechnen. Um die niedrigste Dimension zu finden, die in unserm Falle eine Gleichung der speciellen Lage haben kann, wählen wir:

$$a_{q'} = 1,\ a_{q'-1} = 2, \cdots a_0 = q' + 1.$$

Dann ergiebt sich als Summe der Dimensionen von $A^0_{q'+1-p}$ und von $A_p^{q-q'}$ die Summe aller Zahlen von 1 bis $q' + 1$, vermehrt um die Summe aller Zahlen von 0 bis $q' - p$, vermehrt um die Summe aller Zahlen von $q - q'$ bis $q - q' + p - 1$. Dazu kommt dann noch die soeben gefundene Summe der auf $A^0_{q'+1-p}$ bezw. auf $A_p^{q-q'}$ noch folgenden Zahlen; also erhalten wir für die gesuchte niedrigste Dimension:

$$\tfrac{1}{2}(q' + 1)(q' + 2) + \tfrac{1}{2}(q' - p)(q' - p + 1) + (q - q')p + \tfrac{1}{2}p(p-1) + (q' + 1 - p)(q - q' + p) = (q + 1)(q' + 1),$$

was mit einem Resultat in § 3 übereinstimmt.

Wir erhalten also das Resultat:

Die Gleichung niedrigster Dimension, die zwischen den Grundbedingungen eines $[q]$ und eines $[q']$ besteht, falls diese sich in einem Punkte schneiden, hat die Dimension $(q + 1)(q' + 1)$ und die Gliederzahl $\frac{(q+q'+2)!}{(q+1)!\,(q'+1)!}$.

Auch bei allgemein gehaltenen Buchstaben $a_0, a_1, a_2, \cdots a_{q'}$, ist die hier besprochene Gleichung der speciellen Lage insofern grundlegend, als sie zwei Glieder enthält, von denen das eine lediglich eine auf den $[q]$ bezügliche Grundbedingung darstellt, das andere lediglich eine auf den $[q']$ bezügliche Grundbedingung darstellt.

Die obige Gleichung stimmt in dem speciellen Falle, wo $a_{q'} = 1$, $a_{q'-1} = 2$ und überhaupt $a_i = q' + 1 - i$ ist, mit einem Resultate überein, das mir Herr Giambelli in Turin im September 1902 schrieb, und das derselbe bisher noch nicht veröffentlicht hat.

§ 6. Beispiele zu der in § 5 angegebenen Gleichung der speciellen Lage.

1) Ein Punkt liegt in einem $[q]$. Dann folgt aus der allgemeinen Gleichung des § 5 die Incidenzformel 4) des § 2.

2) Zwei Strahlen schneiden sich, d. h. $q = 1$, $q' = 1$. Dann erhält man:

$$(a_0, a_1 + 1) - (a_0, 1)\,(a_1, 0)' + (a_0, 0)\,(a_1, 1)' + (a_1, 1)\,(a_0, 0)' - (a_1, 0)\,(a_0, 1)' + (a_0, a_1 + 1)' = 0,$$

wo $a_0 > a_1$ ist, a_0 und a_1 sonst beliebige positive Zahlen sind, und wo die auf die beiden Strahlen bezüglichen Bedingungen durch Strichelung unterschieden sind.

Diese Formel ist in doppelter Weise eine Verallgemeinerung der Formel IX des § 10 meines Kalküls der abzählenden Geometrie (Leipzig, 1879) erstens dadurch, dass der hier zu Grunde gelegte Raum nicht mehr die Dimension 3, sondern n hat, zweitens dadurch, dass $a_0 = 2$, $a_1 = 1$ gesetzt werden muss, damit die alte Incidenzformel für zwei sich schneidende Strahlen herauskommt.

3) Eine Ebene schneidet einen Strahl, also $q = 2$, $q' = 1$. Dann ergiebt sich (für $n > 3$):

$$\begin{aligned}&(a_0, a_1 + 1, 2) - (a_0, a_1 + 1, 1)\,(1, 0) + (a_0, a_1 + 1, 0)\,(1, 1)\\ &+ (a_0, 1, 1)\,(a_1 + 1, 0) - (a_0, 1, 0)\,(a_1 + 1, 1) + (a_0, 0, 0)\,(a_1 + 1, 2)\\ &- (a_1, 1, 1)\,(a_0 + 1, 0) - (a_1, 1, 0)\,(a_0 + 1, 1) + (a_1, 0, 0)\,(a_0 + 1, 2)\\ &+ (a_0 + 1, a_1 + 2) = 0.\end{aligned}$$

Für $a_0 = 2$, $a_1 = 1$ wird die Dimension jedes Gliedes $(q+1)(q'+1) = 6$. Die Anzahl der Glieder ist $\frac{(q + q' + 2)!}{(q + 1)!\,(q' + 1)!} = \frac{5!}{3!\,2!} = 10$.

4) Zwei Ebenen haben einen Punkt gemeinsam, also $q = 2$, $q' = 2$. Dann ergiebt sich (für $n > 4$):

$$\begin{aligned}&(a_0, a_1 + 1, a_2 + 2) - (a_0, a_1, + 1, 2)\,(a_2, 0, 0)' + (a_0, a_1 + 1, 1)\,(a_2, 1, 0)'\\ &- (a_0, a_1 + 1, 0)\,(a_2, 1, 1)' - (a_1, a_2 + 1, 2)\,(a_0, 0, 0)' + (a_1, a_2 + 1, 1)\,(a_0, 1, 0)'\\ &- (a_1, a_2 + 1, 0)\,(a_0, 1, 1)' + (a_0, a_2 + 1, 2)\,(a_1, 0, 0)' - (a_0, a_2 + 1, 1)\,(a_1, 1, 0)'\\ &+ (a_0, a_2 + 1, 0)\,(a_1, 1, 1)' + (a_0, 1, 1)\,(a_1, a_2 + 1, 0)' - (a_0, 1, 0)\,(a_1, a_2 + 1, 1)'\\ &+ (a_0, 0, 0)\,(a_1, a_2 + 1, 2)' - (a_1, 1, 1)\,(a_0, a_2 + 1, 0)' + (a_1, 1, 0)\,(a_0, a_2 + 1, 1)'\\ &- (a_1, 0, 0)\,(a_0, a_2 + 1, 2)' + (a_2, 1, 1)\,(a_0, a_1 + 1, 0)' - (a_2, 1, 0)\,(a_0, a_1 + 1, 1)'\\ &+ (a_2, 0, 0)\,(a_0, a_1 + 1, 2)' - (a_0, a_1 + 1, a_2 + 2)' = 0,\end{aligned}$$

eine Gleichung mit

$\frac{6!}{3!3!} = 20$ Gliedern, in denen die Bedingungs-Symbole, die sich auf die zweite Ebene beziehen, von denen, die sich auf die erste Ebene beziehen, durch Strichelung unterschieden sind.

5) Ein Strahl schneidet einen vierdimensionalen linearen Raum, also $q = 4, q' = 1$. Dann ergiebt sich (für $n > 5$):

$$\begin{aligned}
&(a_0, a_1 + 1, 2, 2, 2) - (a_0, a_1 + 1, 2, 2, 1)\,(1, 0)' \\
&+ (a_0, a_1 + 1, 2, 2, 0)\,(1, 1)' + (a_0, a_1 + 1, 2, 1, 1)\,(2, 0)' \\
&- (a_0, a_1 + 1, 2, 1, 0)\,(2, 1)' + (a_0, a_1 + 1, 2, 0, 0)\,(2, 2)' \\
&- (a_0, a_1 + 1, 1, 1, 1)\,(3, 0)' + (a_0, a_1 + 1, 1, 1, 0)\,(3, 1)' \\
&- (a_0, a_1 + 1, 1, 0, 0)\,(3, 2)' + (a_0, a_1 + 1, 0, 0, 0)\,(3, 3)' \\
&+ (a_0, 1, 1, 1, 1)\,(a_1 + 3, 0)' - (a_0, 1, 1, 1, 0)\,(a_1 + 3, 1)' \\
&+ (a_0, 1, 1, 0, 0)\,(a_1 + 3, 2)' - (a_0, 1, 0, 0, 0)\,(a_1 + 3, 3)' \\
&+ (a_0, 0, 0, 0, 0)\,(a_1 + 3, 4)' - (a_1, 1, 1, 1, 1)\,(a_0 + 3, 0)' \\
&+ (a_1, 1, 1, 1, 0)\,(a_0 + 3, 1)' - (a_1, 1, 1, 0, 0)\,(a_0 + 3, 2)' \\
&+ (a_1, 1, 0, 0, 0)\,(a_0 + 3, 3)' - (a_1, 0, 0, 0, 0)\,(a_0 + 3, 4)' \\
&+ (a_0 + 3, a_1 + 4)' = 0.
\end{aligned}$$

6) Wenn $q = 7$, $q' = 4$ ist, enthält die gesuchte Gleichung der speciellen Lage 1287 Glieder mit fünf Buchstaben. Setzt man $a_0 = 5$, $a_1 = 4$, $a_2 = 3$, $a_3 = 2$, $a_4 = 1$, so wird jedes Glied der Gleichung von der 40-ten Dimension. Es sei dann zu dem auf den [7] bezüglichen Faktor

$$(a_1, a_3 + 1, a_4 + 2, 3, 3, 2, 1, 0)$$

der zugehörige auf den [4] bezügliche Faktor zu bestimmen. Da $q - q' = 3$ ist, so muss derselbe mit

$$a_0 + 3, a_2 + 4$$

beginnen, und es sind noch die drei anzuschliessenden Zahlen zu bestimmen. Nach der in § 5 angegebenen Regel ergiebt sich, dass die Zahl 5 nullmal, 4 nullmal, 3 einmal, 2 einmal, 1 einmal, 0 nullmal zu setzen ist. Demnach ist 3, 2, 1 anzuschliessen. Der gesuchte zugehörige Faktor heisst also:

$$(a^0 + 3, a_2 + 4, 3, 2, 1).$$

Für die schon oben genannten kleinsten Zahlenwerthe der Buchstaben ergiebt sich 19 als Dimension des gegebenen Faktors, 21 als Dimension des gefundenen zugehörigen Faktors.

Hamburg, November 1902.

Bemerkungen über die algebraische Auflösung biquadratischer Gleichungen.

Von O. Pund in Hamburg.

Um die algebraische Auflösung der Gleichung niederen Grades aus den Principien der Galois'schen Theorie zu entwickeln, hat man sich bisher immer, dem wohl zuerst von Lagrange[1]) eingeschlagenen Wege folgend, auf die Betrachtung der Functionen ihrer Wurzeln gestützt, die zu gewissen Untergruppen der vollständigen Gruppe ihrer Permutationen gehören. Auch die elementaren Methoden[2]), die ursprünglich zur Auflösung erdacht worden sind, und die sich theilweise durch eine ausserordentliche Einfachheit auszeichnen, weil sie ihr Ziel durch leicht zu verfolgende Umformungen erreichen, ordnen sich einem solchen Verfahren unter, wenn man nachträglich die auftretenden Resolventen als Functionen der Wurzeln deutet. Doch den Character des Kunstgriffes, den sie ursprünglich an sich haben, d. h. einer von vornherein willkürlich erscheinenden Annahme, deren Berechtigung erst durch den Erfolg dargethan wird, verlieren diese Methoden durch eine solche Erklärung doch nicht ganz, wenn nicht noch eine Reihe von weiteren Betrachtungen hinzugethan werden. Statt dessen kann man aber auch das Wesen des den Methoden zu Grunde liegenden Verfahrens auf einem ganz anderen Wege erklären, wobei nur von den allgemeinen Sätzen der Galois'schen Theorie Gebrauch gemacht wird. Ich führe dies nur für die biquadratischen Gleichungen aus, da bei den cubischen Gleichungen die entsprechend einfacheren Ueberlegungen dann leicht angestellt werden können.

Aus den Principien der Galois'schen Theorie ergiebt sich, dass eine irreductible Gleichung, deren Grad eine Primzahlpotenz ist, nur dann algebraisch lösbar ist, wenn sie sich durch Adjunction algebraischer Irrationalitäten, die dann ihrerseits wieder durch Wurzelgrössen bestimmbar sein müssen, auf eine Abel'sche Gleichung reduciren lässt. Es giebt nun aber, wie aus den Elementen der Gruppentheorie folgt, zweierlei Typen biquadratischer Abel'scher Gleichungen, nämlich solche, die nur Transformationen in sich von der Ordnung 2 besitzen, und solche, deren Transformationen eine cyklische Gruppe bilden. Da

---

1) Nouveaux Mémoires de l'Académie de Berlin. Année 1770.

2) Eine vollständige Zusammenstellung der sehr reichhaltigen Litteratur findet sich bei Matthiessen, Grundzüge der Algebra der litteralen Gleichungen. Leipzig, 1878.

aber auch im letzteren Falle eine Transformation von der Ordnung 2 vorhanden ist, so ergiebt sich, dass die Gleichung in jedem Falle imprimitiv werden muss. Wir werden daher, da ein biquadratischer Körper nur quadratische Körper enthalten kann, zunächst auf die Frage geführt: Welche Irrationalitäten muss man einem biquadratischen Körper adjungieren, damit er einen quadratischen Körper enthält, oder, falls dies im ursprünglichen Rationalitätsbereich der Fall ist, wie kann man erkennen, ob er schon imprimitiv ist.

Der einfachste Weg, um diese Frage zu beantworten, wird darin bestehen, die Bedingungen dafür aufzustellen, dass eine im biquadratischen durch die irreductible Gleichung $F(x) = 0$ definirten Körper enthaltene Grösse $y = \Phi(x)$ einer quadratischen Gleichung $\Omega(y) = 0$ genügt, oder die Möglichkeit der Congruenz

$$\Omega\Phi(x) \equiv 0 \mod F(x)$$

zu untersuchen. Hierin kann man $\Phi(x)$ allgemein als eine cubische Function von x ansehen, da bekanntlich jede rationale Function von x in eine ganze verwandelt und diese darauf mod $F(x)$ reducirt werden kann. Man hätte nun $\Omega\Phi(x)$ ebenfalls auf eine cubische Function zu reduciren und dann wegen der Irreductibilität von $F(x)$ alle sich ergebenden Coefficienten gleich Null zu setzen, um die Bedingungsgleichungen des Problems zu erhalten. Da die wirkliche Ausführung der Rechnung recht umständlich ist, so ist es besser, $\Phi(x)$ in einer andern Form zu Grunde zu legen, und nun ist es möglich, diese so zu wählen, dass die Reduction in eine einfache Vergleichung mit den Coeffizienten von $F(x)$ übergeht. Wenn nämlich in $\Phi(x)$ der Coefficient von x^3 nicht verschwindet, so lässt es sich als Quotient einer quadratischen Function $X(x)$ und einer linearen Function $Y(x)$ darstellen. Denn wenn man $F(x)$ durch $\Phi(x)$ dividirt, so erhält man als Quotienten eine lineare Function, während der Rest im allgemeinen quadratisch wird. Eine derartige Darstellung umfasst aber auch den Fall, wo der Coefficient von x^3 verschwindet, da dann der Nenner unabhängig von x wird, also in eine Grösse des Rationalitätsbereiches übergeht. Wir haben somit, wenn die quadratische Function homogenisirt wird, an Stelle der oben angegebenen Congruenz eine neue von der Form

$$\Omega(X(x),\ Y(x)) \equiv 0 \mod F(x),$$

die, wie durch Gradvergleichung folgt, und weil man einen auftretenden Proportionalitätsfactor mit in Ω aufnehmen kann, in eine identische Gleichung

$$\Omega(X(x),\ Y(x)) = F(x)$$

übergeht. Da nun eine quadratische Form $\Omega(X, Y)$ durch eine lineare Transformation ihrer Variabeln in eine andere übergeht, so ist es nun auch nicht mehr notwendig, die eine Function Y vor der andern X auszuzeichnen, und man kann sie zu Gunsten der Eleganz ebenfalls als quadratisch annehmen. Wir gelangen so zu dem Resultate, dass unsere Aufgabe auch dahin formulirt werden kann: eine biquadratische Function als quadratische Form zweier quadratischer Functionen darzustellen.

Ohne auf die Behandlung der Aufgabe in ihrer völligen Allgemeinheit hier einzugehen, will ich mich darauf beschränken zu zeigen, dass man durch geeignete Specialisirung auf die Ferrarische Methode geführt wird. Die biquadratische Function kann in der reducirten Form

$$F(x) = x^4 + px^2 + qx + r$$

vorausgesetzt werden, in die sie durch eine ganz lineare Transformation umgewandelt werden kann, während die quadratische Form $\Omega(X, Y)$ in ähnlicher Weise die Gestalt

$$\Omega(X, Y) = X^2 - \varrho Y^2$$

erhalten kann, wo ϱ die bis auf einen quadratisch auftretenden Factor völlig bestimmte Discriminante ist. Halten wir nun an den Formen fest, die oben zuerst für X und Y gefunden wurden, so ergiebt sich leicht, dass in X der Coefficient von x^2 gleich der Einheit angenommen werden und der von x verschwinden muss, während in Y der Coefficient von x der Einheit gleich angesetzt werden darf, weil man einen quadratischen auftretenden Factor mit ϱ vereinigen kann. Jedoch ist dann nachher der Fall noch besonders zu untersuchen, dass Y sich auf eine Constante, als die wir dann die Einheit annehmen können, reducirt. Wir erhalten so für den allgemeinen Fall eine identische Gleichung von der Form

$$F(x) \equiv (x^2 + \lambda)^2 - \varrho(x + \mu)^2,$$

wo λ und μ von x unabhängig sind. Dieser Ansatz ist aber kein anderer, als der, von dem die Ferrarische Methode ausgeht. Denn es wird dadurch bewirkt, dass x^4 durch Addition der Grösse $2\lambda x^2 + \lambda^2$ zu einem Quadrat ergänzt wird, der Art, dass der um dieselbe Grösse verminderte Rest von $F(x)$, nämlich $(p-2\lambda)x^2+qx+r-\lambda^2 = \varrho(x+\mu)^2$, von einem Factor abgesehen in ein vollständiges Quadrat übergeht. Die sich ergebenden Bedingungsgleichungen

$$p = 2\lambda - \varrho, \quad q = -2\varrho\mu, \quad r = \lambda^2 - \varrho\mu^2$$

führen nun in bekannter Weise zur cubischen Resolvente für die Discriminanten ϱ der quadratischen Körper, nämlich

$$\varrho^3 + 2p\varrho^2 + (p^2 - 4r)\varrho - q^2 = 0.$$

Damit sich nun auch λ und μ den Bedingungsgleichungen entsprechend angeben lassen, muss $\varrho \neq 0$ vorausgesetzt werden, wo sich dann

$$\lambda = \frac{\varrho + p}{2}, \quad \mu = \frac{q}{2\varrho}$$

ergiebt. Der Fall aber, dass $\varrho = 0$ werden kann, also $q = 0$ ist, findet nun aber gerade in dem oben ausgeschlossenen Fall $Y = 1$ seine Behandlung, denn der dann zur Anwendung kommende Ansatz

$$F(x) = (x^2 + \lambda)^2 - \varrho$$

erfordert $q = 0$, oder dass allgemein die biquadratische Function aus der Zusammensetzung zweier quadratischer Functionen entstehen kann, und liefert für ϱ und λ die Werthe

$$\varrho = p^2 - 4r, \quad \lambda = \frac{p}{2},$$

während ausserdem noch für ϱ die aus der Gleichung

$$\varrho^2 + 2p\varrho + p^2 - 4r = 0$$

gelieferten Werthe in Betracht kommen. Wir erhalten demnach stets für die Discriminante ϱ des quadratischen Körpers eine cubische Gleichung, die weiterhin in bekannter Weise zu untersuchen ist.

Da die Darstellung einer biquadratischen Function als quadratische Form zweier quadratischen Functionen in eine directe Zerlegung in das Product zweier quadratischer Functionen übergeht, wenn man die Quadratwurzel aus der Discriminante der quadratischen Form adjungirt, so ist der Zusammenhang der voraufgehenden Darlegungen mit der Descartes'schen Methode von vornherein klar.

Es lässt sich aber auch weiter der Zusammenhang erkennen, der mit dem Problem der Transformation der biquadratischen Function in sich selbst besteht, das, wie schon von vornherein klar ist, auf die quadratischen Körper führen muss. Denken wir uns nämlich die biquadratische Function in der Form

$$F(x) \quad \Omega(X(x), Y(x)) = 0$$

dargestellt, und beachten wir, dass für eine Transformation in sich

$$x' = \theta(x)$$

die Gleichung

$$F(x') \quad \Omega(X(x'), Y(x'))$$

bestehen muss, so ergiebt sich durch Combination eine Gleichung zwischen x und x', aus der sich der Linearfactor

$$X(x)\,Y(x') - X(x')\,Y(x)$$

herausheben lässt, der sich nach Entfernung von $xy' - x'y$ in der Gestalt

$$axx' + b(x + x') + c$$

darstellt und eine lineare Transformation

$$x' = \frac{-bx - c}{ax + b}$$

liefert, die von der Periode 2 ist. Es ergiebt sich also, dass unsere Aufgabe auf die lineare Transformation einer biquadratischen Function in sich selbst zurück kommt. Die drei linearen Transformationen, die im Allgemeinen sich ergeben (nämlich abgesehen von dem Falle, dass die Gruppe der biquadratischen Gleichung die cyclische ist), ordnen sich den drei Factoren zu, in die die Covariante sechsten Grades unter Adjunction der cubischen Resolvente zerfällt, und deren specielle Eigenschaften[1]) mit der Zusammensetzung der linearen Transformationen in Beziehung stehen. Doch unterlasse ich es auch hier, das Problem in der allgemeinen Form zu behandeln, und beschränke mich darauf hinzuweisen, dass der Zusammenhang mit der linearen Transformation ebenfalls die Grundlage einiger besonderer Auflösungsmethoden geworden ist. Da nämlich jede lineare Substitution der Periode 2 nach Transformation durch passend gewählte andere auf gewisse einfache Formen, wie

$$x' = \frac{1}{x},\quad x' = -x$$

gebracht werden kann, so ergiebt sich dadurch die Berechtigung der Methoden, die die biquadratische Gleichung durch lineare Transformation in eine reciproke verwandeln, oder in eine solche, die nur die Quadrate der Unbekannten enthält. Auch die in der Invariantentheorie übliche Reduction der biquadratischen Form auf die canonische Gestalt, auf die sich dann die Auflösung gründet, ist nur der äusseren Form nach davon verschieden. Auf Grund dieser Untersuchungen kann man ferner die hinreichende und notwendige Bedingung für die Lösbarkeit einer biquadratischen Gleichung durch Quadratwurzeln auch dahin formuliren, dass sie eine lineare Transformation in sich besitzt.

1) Clebsch, Theorie der binären Formen. § 45.

Um die im biquadratischen Körper enthaltenen quadratischen Körper zu bestimmen, kann man auch noch einen andern Weg einschlagen als den oben angegebenen. Wir wollen dabei von dem besondern Falle, dass die Gruppe die cyclische ist, der sich ja in einfacher Weise behandeln lässt, absehen, und annehmen, dass der biquadratische Körper mehr als einen quadratischen Körper enthält. Man kann dann von vornherein zeigen, dass er deren drei enthalten muss. Sind nämlich im biquadratischen Körper zwei verschiedene quadratische Körper mit den Discriminanten a und b vorhanden, die wir dann durch

$$u^2 = a, \qquad v^2 = b$$

definiren können, so kann ab kein vollständiges Quadrat sein, denn sonst würden die quadratischen Körper sich gegenseitig enthalten, also identisch sein. Multipliciren wir ab mit einer beliebigen Quadratzahl und nennen das entstandene Product c, so definirt die Gleichung

$$w^2 = c$$

wegen ihrer Irreductibilität einen dritten quadratischen Körper, der ebenfalls im biquadratischen Körper enthalten ist, weil w sich von uv nur durch einen rationalen Factor unterscheidet.

Man erkennt dann weiter, dass die drei algebraischen Grössen u, v, w in Verbindung mit der Einheit einen Körper vierten Grades constituiren, weil zwischen ihnen keine lineare homogene Relation mit Coefficienten existiren kann, die dem Rationalitätsbereich angehören, und weil das Product je zweier sich stets linear und homogen durch sie selbst darstellen lässt, denn es ist

$$u^2 = a, \qquad v^2 = b, \qquad w^2 = c,$$
$$vw = \alpha u, \quad wu = \beta v, \quad uv = \gamma w,$$

wo zwischen den rationalen Zahlen $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma$ die Beziehungen gelten

$$a = \beta\gamma, \quad b = \gamma\alpha, \quad c = \alpha\beta.$$

Da der so definirte Körper denselben Grad hat wie der ursprüngliche biquadratische Körper, aber auch in ihm enthalten ist, so müssen die beiden Körper identisch sein. Der biquadratische Körper ist ein Galois'scher, und seine Transformationen sind ausser der identischen die folgenden drei

$$(u, -u)(v, -v), \ (v, -v)(w, -w), \ (w, -w)(u, -u).$$

Hieraus ergiebt sich dann sofort weiter, dass der biquadratische Körper keinen weiteren quadratischen Körper enthalten kann, denn ein solcher

müsste zu einer der drei Transformationen gehören und somit mit einem der drei Körper $u^2 = a$, $v^2 = b$, $w^2 = c$ identisch sein.

Auf diese Betrachtungen lässt sich nun sofort eine andere Auflösungsmethode gründen. Da nämlich die Unbekannte x nach Adjunction der Discriminanten a, b, c einem biquadratischen Körper von der untersuchten Art angehören soll, so muss sie sich linear durch dessen Elemente darstellen lassen. Da a, b, c noch unbekannt sind, so können wir, ohne der Allgemeinheit Abbruch zu thun, die Coefficienten von u, v, w in dieser Darstellung gleich der Einheit annehmen. Setzen wir demgemäss

$$x = h + u + v + w$$

in die vorgelegte biquadratische Gleichung ein, so erhalten wir durch Reduction mit Hilfe der obigen Gleichungen eine lineare Gleichung mit Coefficienten des gesuchten Rationalitätsbereiches, die für sich einzeln verschwinden müssen und so für a, b, c, h die erforderlichen Bedingungen ergeben. Da die entstehende Gleichung symmetrisch in u, v, w ist, so kann man sie auch als lineare Gleichung der Grössen

$$1,\ u + v + w,\ uv + vw + wu,\ (u + v + w)(uv + vw + wu)$$

auffassen, die ebenso wie 1, u, v, w ein Fundamentalsystem für den Abel'schen biquadratischen Körper bilden. Wenn man in diesem Falle ebenso die einzelnen Coefficienten gleich Null setzt, so kommt man auf diejenige Methode, die von Lagrange[1]) als das Analogon der Hudde'schen für die cubischen Gleichungen mit vollem Recht bezeichnet worden ist, weil die letztere nicht nur in der Ausführung ähnlich ist, sondern sich auch auf eine ähnliche Weise begründen lässt.

Rotirende Kraftfelder.

Von Edmund Hoppe.

Seit Faraday im Jahre 1832 die Induktion durch rotirende Magnete in Leiterkreisen, welche die Kraftlinien schneiden, entdeckt hat, ist die Frage nach dem Sitze dieser elektromotorischen Kraft immer wieder Gegenstand der Untersuchung gewesen. Die wesentlichen Bedingungen für das Entstehen eines Stromes bei einer solchen Rotation, also bei der Rotation eines Leitertheiles um einen Magneten,

---

1) Lagranges mathematische Elementarvorlesungen herausg. von Niedermüller S. 71.

sind fast sämmtlich schon von Faraday theils 1832[1]), theils 1851[2]) festgestellt, ohne dass es ihm gelungen wäre alle Fragen, die hiermit zusammenhängen, zu lösen. Zum Beginn dieser 2ten Reihe von Versuchen hat nun Faraday folgende Bemerkung an den Schluss des vorhergehenden Absatzes § 3090 gestellt: „Das den Magnet umgebende Kräftesystem braucht man sich nicht nothwendig mit dem Magnet rotirend zu denken, so wenig wie man annimmt, dass die Lichtstrahlen, welche von der Sonne ausgehen, mit dieser rotiren. Man kann sich sogar in gewissen Fällen denken, dass der Magnet zwischen seinen eigenen Kräften rotire, während er dennoch einen am Galvanometer nachweisbaren vollen elektrischen Effekt hervorbringt.“[3]) Das Experiment, auf welches dieser letzte Satz sich bezieht, ist das gewöhnliche Experiment der unipolaren Induktion, wo eine Berührungsstelle des Drahtes in der Mitte an einem schleifenden Ringe, die andere an einem Ende des Magneten sich befindet. Obwohl Faraday später auf diese Anschauung nicht zurückkommt[4]), wird doch bisweilen die Sache so dargestellt, als ob Faraday mit Entschiedenheit den Standpunkt vertreten hätte, dass das Kraftfeld von dem Magneten nicht festgehalten würde. Das ist aber nicht der Fall, Faraday will die Frage discutabel lassen. Es sind auch an früheren wie späteren Stellen in seinen Untersuchungen Aussprüche genug zu finden, welche das Kraftfeld als am Magnet haftend ansehen, so z. B. folgender aus dem gleichen Jahre 1851[5]): „Ich habe allen Grund zu glauben, dass diese Linien (Kraftlinien) in der Erde, der sie ihre Entstehung verdanken und aus der sie sich erheben, festgehalten werden, gerade so wie die einem Magneten entspringenden Linien von ihm, wenn auch nicht in demselben Maasse, festgehalten werden.“

Immerhin war durch Faraday die Frage zur Discussion gestellt, ob wir uns vorstellen sollen, dass der Magnet mit seinem Kraftfelde fest verbunden ist oder nicht. Diese Frage kann nicht durch den Hinweis als erledigt angesehen werden, dass doch bei translatorischen Bewegungen der Magnet sein Kraftfeld mitnimmt. Schon Faraday selbst macht auf den Unterschied aufmerksam und Lecher versucht

1) Faraday, Exper. research. § 256—264.

2) Faraday, Exper. research. § 3091—3122.

3) Faraday, Elektrische Untersuchungen, deutsch von Kalischer. III, p. 306—

4) Freilich erklärt E. Lecher, dass Faraday in den folgenden §§ auch stets den Standpunkt von den feststehenden Kraftlinien begünstige, aber davon steht bei Faraday kein Wort.

5) Proc. of the roy. Inst. 11. April 1851

diesen Unterschied durch den feststehenden Aether zu erklären[1]) und kommt dabei auf dieselbe Analogie, wie Faraday, nämlich die Ausbreitung der Lichtstrahlen. Analogien sind in der Regel nicht geeignet eine Frage zu klären, da sie in ein heterogenes Gebiet Anschauungen übertragen, welche dort nicht anwendbar sind. Wenn die Wellenbewegung des Lichts von einem einzigen Punkte ausgeht, so ist zweifellos in einem homogenen Medium nach allen Seiten in gleichem Abstande die Intensität und Phase der Wellenbewegung identisch. Würde also ein solcher Lichtpunkt rotiren, so würde in dem beleuchteten Raume von dieser Rotation nichts zu merken sein. Sobald aber eine Fläche oder ein Körper leuchtet, ändert sich der Beleuchtungszustand an jedem Punkte des Raumes, denn die in einem Punkte *a* vorhandene Strahlungsenergie ist die Interferenzwirkung der von allen leuchtenden Punkten ausgehenden Strahlen. Da nun bei den wirklich vorhandenen leuchtenden Körpern nicht vorausgesetzt werden kann, dass sie vollkommene Kugelflächen (oder bei Rotationen um eine Axe völlig symmetrische Rotationskörper) sind und dass alle Punkte gleiche Strahlungsintensität besitzen, so ist klar, dass bei Rotation irgend einer wirklich vorhandenen Lichtquelle die Intensität der Beleuchtung an jedem Punkte des Raumes fortwährend wechseln muss. Wenn wir diese Intensitätsschwankungen nicht nachweisen können, so liegt der Grund in der Unzulänglichkeit unserer Apparate, aber es wäre thöricht aus der Nichtnachweisbarkeit auf das Nichtvorhandensein der Verschiedenheit schliessen zu wollen. Ueber das Ruhen oder Mitrotiren des Aethers sagte aber ein solches Experiment, selbst wenn es ausführbar wäre, gar nichts. Für die wirklichen Verhältnisse ist diese Frage auch ganz gleichgültig, es ist dafür sogar irrelevant, ob es einen Aether giebt oder nicht, man kann die an den materiellen Körpern beobachteten Veränderungen auch ohne jene Fragen zu berühren, entscheiden und ableiten.

Will man die Verhältnisse der Lichtstrahlung nun übertragen auf den Magneten, so hat man darauf Acht zu geben, dass das, was Faraday unter Kraftlinien verstand, durchaus nicht mit den Lichtstrahlen identisch ist. Faraday war bei seinem Begriff ausgegangen von den an Eisenfeilicht sichtbar gemachten Kraftlinien, auch nach 1851, als er diese unipolare Induktion behandelte, kehrt er stets zu diesem plastischen Gebilde zurück, jedoch nur um sich experimentell daran zu orientiren. Faraday wusste sehr wohl, dass das Kraftfeld unabhängig von diesen Linien ist, und dass sie nicht die Lage der Kraft-

1) E. Lecher, Wiedem. Annal. 54, 1895, p. 277.

richtung und Kraftverteilung absolut angeben, dass also z. B. in dem Raume zwischen 2 Kraftlinien, wo kein Eisenstaub liegt, die Kraft genau ebenso gross ist, wie in den benachbarten Kraftlinien selbst und eine jenen benachbarten Linien entsprechende mittlere Richtung besitzt. Derartige Auseinandersetzungen sind sehr zahlreich, ich verweise lediglich auf § 3100, 3163, 3165, 3229 etc. — Die sichtbaren Eisenstaublinien geben nur das Resultat der Interferenz der vom Magneten ausgehenden Kraftwirkung und der durch den magnetischen Charakter der Eisentheile bedingten Wirkung wieder. Will man also eine wirkliche Darstellung des Kraftfeldes haben, so bleibt nichts anderes übrig als dasselbe durch die Differentialgleichung zu definiren und auf die sichtbaren Kraftlinien zu verzichten. Aus dieser Erkenntniss heraus ist die Einführung der Einheitskraftlinien resp. der Einheitsröhren als Maasse für die Feldstärke entstanden und nothwendig, wenn Unklarheit und verkehrte Vorstellung vermieden werden soll. Trotzdem ist noch heute die Darstellung mit Eisenfeilspähnen von grossem Werth, wenn es sich um anschauliche Darstellung der Veränderungen in einem Magnetfelde handelt, sofern nicht Intensitätsmessungen darauf aufgebaut werden.

Was nun die Frage nach der Verbundenheit der Kraftlinien mit dem Magneten angeht, so ist dieselbe durch vorstehende Ueberlegung eigentlich schon entschieden. Wir wollen uns aber ganz auf Faraday's Standpunkt stellen, dass nicht theoretische Speculationen, sondern lediglich das Experiment entscheidet. Von einem homogenen Felde, für welches dies Feststehen der Kraftlinien behauptet war, ist bei Faraday's eigenen Versuchen schon nicht die Rede. Faraday wendet nicht cylindrische, sondern prismatische Magnete an, wenn er also bei der Rotation dieser 2 nebeneinander gelegten Magnete um eine zwischenliegende Axe keine Veränderung des Kraftfeldes gefunden hat, so liegt das an der Unzulänglichkeit seines Messapparates. Ich habe die schon anderweit bekannte Inhomogenität eines solchen Feldes benutzt, um in einem weichen Eisenstück Intensitätsschwankungen hervorzurufen und dadurch in einer Spule Wechselströme zu erzeugen.[1]) Schon jenes Experiment beweist, dass für einen nicht homogenen Magnetstab die Kraftlinien mit dem Magneten rotiren. Ich betone aber nochmals, dass daraus nicht gefolgert werden kann, dass der Aether mitrotire, nur der Spannungszustand des Aethers rotirt mit, das ist es aber auch, was uns bei der Frage allein interessirt und was allein experimentell festgestellt werden kann.

1) Edm. Hoppe, Festschrift der mathem. Gesellschaft in Hamburg. 1890. II, p. 105.

Dies Experiment versagt mehr und mehr, je mehr wir uns einem homogenen Zustande des Magneten und damit des Feldes nähern. Ich sage ausdrücklich nähern, da wir keinerlei Erkennungszeichen dafür haben, dass es genau erreicht werden kann. Um ein möglichst homogenes Feld zu haben und ein Feld von möglichst grosser Stärke hatte ich s. Z. den gewöhnlichen Rotationsapparat verlassen und einen Elektromagneten mit rotirender Eisenröhre als Kern gewählt. Ausserdem war es mein Wunsch in das Innere des rotirenden Cylinders gelangen zu können, ohne Kraftlinien schneiden zu müssen. Hier sei es mir gestattet auf einen Irrtum Lecher's hinzuweisen, welchen derselbe bei Wiederholung meiner Versuche ausspricht.[1]) Lecher sagt: „Da aber ein grosser Theil der Kraftlinien bekanntlich durch den inneren Hohlraum einer solchen Eisenröhre geht, änderte ich den Versuch dahin ab, dass ich mit einem möglichst massiven Magneten arbeitete". Thatsächlich gehen keine Kraftlinien durch den inneren Hohlraum. Beistehende Figur 1 zeigt das Bild der Kraftlinienvertheilung bei meinem Apparat. Die Kraftlinien verlaufen also ausschliesslich in dem Eisenmantel, das Innere der Röhre ist kraftfrei, wie die völlige Theilnahmlosigkeit des Eisenpulvers in der Röhre beweist. Man kann sich auch auf andere Weise von dieser Thatsache überzeugen, wenn man etwa glauben sollte, die Beweglichkeit des Eisenstaubes auf dem Papier sei zu gering, um die (wenigen) Kraftlinien im Innern zu zeigen. Wenn man die Röhre horizontal senkrecht zum Meridian legt und eine kleine leicht bewegliche Magnetnadel in das Innere einführt, so wird dieselbe durch die Eisenröhre nicht gerichtet, selbst wenn die Induktionsspule einen Strom von 10 Amp. trägt. Die Röhre bewährt also völlig die Schirmwirkung, welche wir ja schon bei unsern geschützten Galvanometern benutzen. Es ist also durch vorstehende Versuche eine Bestätigung und Erweiterung der von

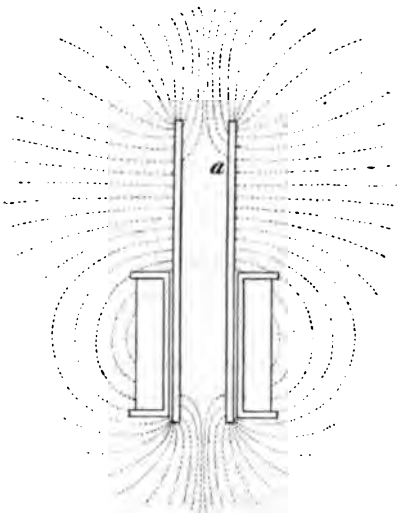


Fig. 1.

1) E. Lecher, Wiedem. Annal. 54. 1895. p. 279.

Grotrian[1]) gemachten Beobachtungen geboten. Die Kraftlinien treten zunächst parallel der Cylinderaxe in den inneren Hohlraum, biegen aber sofort um und gehen in den Eisenmantel, sodass die letzte nachweisbare Linie 15 mm vom Ende der Röhre in dem Eisenmantel verschwindet, während die Gesammtlänge der Eisenröhre ca. 15 cm ist. Es entsprechen diese Zahlen ziemlich genau den von Grotrian angegebenen. Ich halte es für nothwendig dies ausdrücklich zu betonen, da der Lecher'sche Ausspruch nach der Grotrian'schen Arbeit gethan wurde. Diese Beobachtungen sind auch durchaus vereinbar mit den Beobachtungen Faradays, welche Lecher als Beweis für seine Behauptung l. c. anführt. Lecher citirt nämlich das Faradaysche Experiment ungenau, hätte er den § 2209 vollständig citirt, so hätte er die Schirmwirkung bereits darin gesehen. Faraday macht sich 3 übereinander schiebbare Eisenröhren als Kern seiner Induktionsspule, in die innere kleinste giesst er Wasser und beobachtet das Drehungsvermögen der Polarisationsebene des Lichtes durch die Spirale; schiebt er die kleinste Röhre allein axial in die Spirale, so ist das Drehungsvermögen des Wassers grösser als wenn er eine Glasröhre nimmt, schiebt er 2 Eisenröhren ein, so wird die Drehung noch grösser, schiebt er aber alle 3 Röhren ein, so wird die Drehung kleiner. Er fährt dann wörtlich fort: „Bis zu einer gewissen Grenze bringt, bei erhöhter Entfaltung der magnetischen Kräfte, die Spirale und ihr Kern zusammen eine stärkere Wirkung auf das Wasser hervor; fügt man aber noch mehr Eisen hinzu, so wird, vermöge der Verteilung der Kräfte in ihm, die Wirkung derselben theilweise von dem Wasser abgelenkt und somit die Drehung verringert". Bedenkt man, dass die Faradaysche Spirale 20 Zoll, die Eisenröhre 27 Zoll lang waren, so sind seine Ergebnisse in völliger Uebereinstimmung mit den von mir gemachten Beobachtungen. Es wird also bei Anwendung von Eisenröhren als „Kern" immer nothwendig sein experimentell zu prüfen, wie weit die Schirmwirkung reicht, ehe man allgemeine Behauptungen über den Gang der Kraftlinien ausspricht. Die bekannte Figur 21 in Faraday's Untersuchungen über das Kraftfeld einer Spirale erleidet also eine erhebliche Aenderung bei Mitwirkung eines Eisenrohres als Kern nicht nur in Bezug auf die Intensität, sondern auch in Bezug auf die Anordnung. Ich war also bei meinen Versuchen 1886/87 durchaus im Recht, wenn ich für die isolirte Drahtaxe die elektromotorische Kraft gleich 0 setzte, denn eine elektromotorische Kraft

1) O. Grotrian, Wiedem. Annal. 52. 1894. p. 746.

kann doch nur da vorhanden sein, wo ein Schneiden von Kraftlinien stattfindet.

Um nun auch für ein homogenes Feld die Frage nach dem Mitrotiren des Spannungszustandes zu entscheiden, hatte ich folgendes Experiment gemacht.[1]) In nebenstehender schematischer Figur 2 bedeute M den Röhrenmagneten, welcher um seine Axe rotiren kann, $ABCD$ ein mit dem Magneten starr verbundenes aber isolirtes Drahtsystem. Wenn der Apparat rotirt, so schneidet AC keine Kraftlinie, CB schneidet, wenn vorausgesetzt wird, dass die Kraftlinien an der Rotion nicht theilnehmen, die durch den Eisenmantel gehenden Linien, und der mitrotirende Bügel ADB schneidet eine gleich grosse Zahl wie BC aber in entgegengesetztem Sinne. Herr Lecher[2]) glaubt darauf aufmerksam machen zu müssen, dass diese beiden Drahttheile also entgegengesetzt gleiche elektromotorische Kräfte besitzen und deswegen der Strom 0 entstehe in dem Viereck $ACBD$. Damit sagt er in der That nichts Neues. Schon Schwedoff[3]) hat diesen Nachweis 1886 einwandfrei erbracht, freilich in einer wenig zugänglichen Zeitschrift. Ich habe aber dieses Resultat in einer Arbeit 1887 in Wiedemann's Annalen ausführlich erwähnt, und im Jahre vorher jenes Experiment ausgeführt, welches die Unmöglichkeit jener Annahme von feststehenden Kraftlinien darthut. Sei e die elektromotorische Kraft in dem Bügel ACB, so wird in ADB eine gleiche ebenfalls in Richtung auf B wirkende elektromotorische Kraft inducirt, folglich wenn ich B und E mit einem äusseren Galvanometer verbinde, so müsste nach Kirchhoff's Gesetz der Stromverzweigung die Summe beider Stromimpulse hier wirksam sein. Würde also das Kraftfeld nicht an der Rotation theilnehmen, so müsste, da die zum Galvanometer von E und B führenden Drähte keine Kraftlinien schneiden, die elektromotorische Kraft $2e$ nahezu den doppelten Ausschlag bewirken, als wenn das Leiterstück ADB fehlte, thatsächlich beobachtete ich aber nahezu den gleichen Ausschlag als wenn ACB allein vorhanden war, d. h. für die Stärke des Induktionsstromes war es gleichgiltig, ob ACB allein oder ADB mitrotirte, daraus folgt, dass das ruhende Leiterstück von E über das Galvanometer nach B, welches in

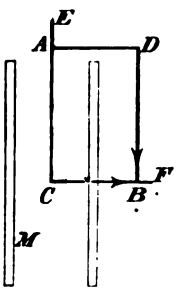


Fig. 2.

1) E. Hoppe. Wiedem. Annalen 28. 1886. p. 483.

2) E. Lecher. Annal. der Physik 9. 1902. p. 248.

3) Schwedoff. Journ. der russ. chem. Gesellsch. 1886. Auch in Wiedem. Annalen 32. 1887. p. 306.

beiden Fällen dasselbe war, der Sitz der elektromotorischen Kraft ist. War hierdurch für mich auch die Frage nach dem Mitrotiren des Kraftfeldes erledigt, so war der exacte Nachweis, der bisher noch nicht erbracht war, dass in dem rotirenden Leitervierеck der Strom 0 wirklich vorhanden sei [1]), nicht nur aus theoretischen Gründen wünschenswerth, sondern auch wegen der praktischen Fragen der Erdströme, Nordlichterscheinung etc., wobei immer wieder die Anschauung auftaucht, als ob die Erde durch ihre Rotation im eigenen Kraftfelde diese Ströme erzeugen könnte.

Es lässt sich auch ein ganz direkter Beweis erbringen, dass das Kraftfeld mitrotirt, durch die Darstellungen der Kraftlinien. Schon früher hatte ich versucht nach Darstellung der Eisenstaublinien durch Rotation des Magneten eine Verschiebung derselben nachzuweisen allein mit zweifelhaftem Resultat. Es ist ja auch begreiflich, dass, wenn die Reibung auf dem Papier gross genug ist, die Staubtheilchen vor der Anziehung zum Magneten hin zu bewahren, sie auch ausreichen wird eine Verschiebung bei Rotation des Kraftfeldes zu verhindern, zumal wir in den Linien ja nur Interferenzlinien vor uns haben. Jetzt ist es mir aber gelungen die Krümmung der Kraftlinien doch nachzuweisen und zu messen. Auf zwei verschiedene Weisen ist es möglich. Ich legte in beiden Fällen die Papierfläche mit dem entsprechenden Ausschnitt in die Höhe a um den Magneten, wo die Kraftlinien nach Fig. 1 nahezu horizontal austreten. Bestreut man nun die an einem festen Stativ in Ruhe gehaltene Fläche nicht vorher mit Eisenstaub, sondern nimmt die Bestreuung erst vor, nachdem der Strom in der Induktionsrolle geschlossen und die Eisenröhre in die gewünschte Rotation versetzt ist, so ordnet sich das Eisenpulver nicht wie im Ruhezustande strengradial, sondern die Linien zeigen eine Biegung im Sinne der Rotation, sodass am Rande des Ausschnittes Fig. 3 Ablenkungen vom Radius bis zu 2 mm vorkommen. Natürlich hatte ich dafür gesorgt, dass nicht etwa die Luftbewegung hier störend wirken konnte, indem ich den Magneten mit einem an der horizontalen Papierfläche angeklebten und mit ihr ruhenden Papiercylinder umgab. Dieser Papiercylinder hat auch den Nutzen das bei stärkeren Feldern so störende Anfliegen des Eisenstaubes an den Magneten zu verhindern. Es muss dieser Papiercylinder sehr sorgfältig gemacht sein, da er bei der Rotation den Magneten nicht berühren darf, andererseits aber möglichst nahe an die Eisenröhre heranreichen muss. Es ist somit eine mechanische Ablenkung durch den Luftzug ausgeschlossen,

1) E. Hoppe. Annal. d. Physik. 8. 1902. p. 663.

also kann jene Biegung nur durch das rotirende Kraftfeld hervorgerufen sein. Auf eine 2. Art gelingt das Experiment mit gleichem Erfolge. Man bestreut die Fläche ohne den Strom zu schliessen, setzt dann die Eisenröhre in die gewünschte Rotation und schliesst darauf erst den Strom. Auch in diesem Falle erhielt ich sehr deutliche Biegungen der Linien mit Abweichungen bis zu 1 mm von der radialen Richtung. Eine wesentliche Verstärkung und ein stets sicheres Gelingen dieser Ablenkungen der Linien erhält man dadurch, dass man einen weiten ruhenden Eisenring auf die Fläche legt und dann die Experimente in dem beschriebenen Sinnes aufführt. Ich habe zwei verschiedene Ringe, deren erster einen inneren Radius von 42 cm, deren zweiter 29 cm Radius hatte, benutzt, die Dicke der Eisenringe betrug gleichmässig ca. 8 resp. 9 mm. Da die Kraftlinien in dem Eisenring wegen der Hysteresis haften, so entsteht eine grössere Verzerrung, sobald die Eisenröhre in Rotation versetzt wird. Nach Faraday's Auffassung sind die sichtbaren Kraftlinien ja das Resultat der Interferenz der Wirkung des Magneten, des Mediums und des Eisenstaubes. Da der Sauerstoff der Luft auch ein Haftvermögen besitzt, welches geringer ist als das Haftvermögen des Eisens, so wird bei Anwesenheit des Eisenringes in der Nähe dieses Ringes eine stärkere Verzögerung im Fortschreiten des Kraftfeldes eintreten, als wenn nur Luft vorhanden wäre. In Folge dessen müssen die Linien noch stärker gebogen werden als in Fig. 3 dargestellt ist. Die Figuren 1 und 3 sind auf die Weise gewonnen, dass ich die Eisenstaublinien mit Gummi auf die bekannte Art fixirte und nach den nun transportabeln Figuren die stärksten Linien in proportionalem Maassstabe und zwar in Fig. 1 im Verhältniss 1 : 4, in Fig. 3 im Verhältniss 3:8 abzeichnen liess. Wo die fixirten Bilder undeutlich wurden, sind die Linien nicht mehr ausgezogen. Wegen der Papierhülle um den Magneten konnte ich bis zu 12 Amp. in der Induktionsspule gehen. Eine an sich sehr wünschenswerthe Verstärkung des Feldes war wegen der mangelhaften Anlage unseres Anschlusses nicht

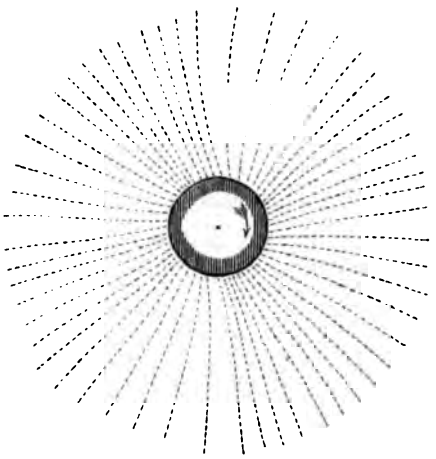


Fig. 3.

thunlich. Die Linien der Fig. 3 wurden gewonnen in der Horizontalebene, welche durch den Punkt *a* des in Fig. 1 schematisch dargestellten Apparates gelegt ist.

Nur noch einige Worte zu dem von Lecher[1]) als entscheidend angesehenen Versuch, wo er 2 Magnete auf einer Axe in gleicher oder entgegengesetzter Richtung rotiren lässt und zu dem ganz analogen Versuch von Cahen[2]), welcher 2 axiale Hohlmagnete gegeneinander rotiren lässt. Schon die längst bekannte Thatsache, dass ein einzelner rotirender Magnet keine Temperaturerhöhung erfährt, was doch nothwendig wäre, wenn sein Kraftfeld feststände, während er selbst in Rotation ist, hätte in beiden Experimenten die richtige Erklärung an die Hand geben können. Für die Kraftlinien des Magneten 1 ist Magnet 2 Anker und umgekehrt. Lasse ich also 1 rotiren und 2 ruhen, oder mit anderer Geschwindigkeit als 1 im gleichen oder entgegengesetzen Sinne rotiren, so muss dasselbe eintreten, was bei meinem Experiment in Fig. 3 mit dem ruhenden Eisenring eintrat und der „letzte Rettungsversuch" der Theorie Prestons ist thatsächlich das, was bei jenem Versuch vorliegt.

Hamburg, den 9. Januar 1903.

Bericht über das Gesellschaftsjahr 1902/03.

(Zusammengestellt vom Adjunkten Dr. F. Bolte.)

Hauptversammlung am 10. Februar 1902.

Nachdem die Herren Brügmann und Norden als ordentliche Mitglieder in die Gesellschaft aufgenommen sind, erstattet der Jahrverwalter, Herr Dr. Repsold, den Bericht über die Thätigkeit der Gesellschaft während des 212. Jahres ihres Bestehens. Danach zählt die Gesellschaft zur Zeit 12 Ehrenmitglieder, 18 auswärtige und 58 einheimische ordentliche Mitglieder. Aus dem Kassenberichte ergab sich schätzungsweise ein Vermögensstand von etwa 900 Mk. Der Kassenabschluss musste wegen des Ausstehens einer Rechnung verschoben werden. Zum Revisor wurde Herr Professor H. Ahlborn gewählt. An Stelle des satzungsmässig ausscheidenden Mitjahrverwalters, Herrn Dr. Bohnert, wurde Herr Dr. Schröder gewählt.

1) E. Lecher. Wiedem. Annal. 54. 1895. p. 299.
2) H. Cahen. Elektrot. Zeitschrift 1902. p. 922.

Das 2. Heft des 4. Bandes der Mittheilungen kommt zur Vertheilung. Herr Dr. Busche wird auf 3 Jahre zum Mitglied der Redaktionskommission gewählt.

Hieran schloss sich das übliche Stiftungsfestessen.

Versammlung am 8. März 1902.

Herr Dr. jür. F. Sieveking wird als ordentliches einheimisches Mitglied aufgenommen. Herr Professor Böger hält einen Vortrag „über den Elektromotor im Schulunterricht".

Versammlung am 12. April 1902.

Der Bibliothekar, Herr Dr. Pund, theilt mit, dass die American Mathematical Society in New-York bereit ist, in Schriftenaustausch mit der Gesellschaft zu treten mit der Massgabe, dass entweder die „Transactions" oder das „Bulletin" gegen die „Mittheilungen" ausgetauscht werden können. Die Gesellschaft entschliesst sich für die „Transactions".

Hierauf spricht Herr Professor Hoppe über „Induction und Erdmagnetismus".

Versammlung am 10. Mai 1902.

Herr Direktor Dr. Thaer berichtet über seine im Programm der Oberrealschule vor dem Holstenthore erschienene Arbeit „Bestimmung von Gestalt und Lage eines Kegelschnittes aus einer Gleichung zweiter Ordnung ohne Coordinaten-Transformation."

Hiernach hält Herr Dr. Franck ein Referat „über eingliedrige Gruppen und infinitesimale Transformationen" (nach Lie).

Versammlung am 14. Juni 1902.

Nachdem der Jahrverwalter den Austritt des auswärtigen Mitgliedes Herrn Lukas in Wien zur Kenntniss gebracht, spricht Herr Dr. Franck in Fortsetzung seines Vortrages vom 10. Mai „über Differentialgleichungen mit infinitesimalen Transformationen".

Versammlung am 13. September 1902.

Der Jahrverwalter theilt mit, dass Herr Dr. Scheller in Folge seines Domicilwechsels aus der Reihe der einheimischen ordentlichen Mitglieder austritt; derselbe bleibt auswärtiges Mitglied. Hierauf hält Herr Professor Schubert einen Vortrag über „Beziehungen zwischen den Grundbedingungen, die man zwei Räumen auferlegen kann, die sich in incidenter oder specieller Lage befinden."

Versammlung am 11. October 1902.

Der Jahrverwalter bringt zur Kenntniss, dass Herr Dr. Messerschmitt in Folge seiner Uebersiedelung nach München seinen Austritt aus der Gesellschaft angemeldet hat.

Herr Dr. Schröder spricht „über die Rodenberg'sche Methode zur Bestimmung der Helligkeitsstufen".

Versammlung am 8. November 1902.

Herr Dr. Mainka wird als ordentliches einheimisches Mitglied in die Gesellschaft aufgenommen.

Herr Dr. Busche hält einen Vortrag „über Gitterpunkte."

Versammlung am 13. Dezember 1902.

Herr Dr. Schwassmann macht Mittheilung „über einen stereoskopischen Messapparat und seine Bedeutung für die Astronomie".

Hiernach hält Herr Dr. Pund einen Vortrag „über biquadratische Gleichungen."

Versammlung am 10. Januar 1903.

Herr Dr. Schröder hält einen Vortrag „Betrachtungen aus dem Gebiete der hyperelliptischen Sigmafunctionen.

Die Bibliothek der Gesellschaft verdankt folgenden Herren werthvolle Zusendungen:

Ahrens, Bubendey, Burr, Klussmann, Krause, Kreusler, Lucas, Messerschmidt, Rüdiger, Schorr, Schrader, Thaer, Weyr.

sowie allen Gesellschaften, mit denen die mathematische Gesellschaft in Schriftenaustausch steht.

Mitgliederverzeichniss.

Bestand der Mathematischen Gesellschaft in Hamburg am 1. Februar 1903.

I. Ehrenmitglieder.

Bruns, H., Dr. phil., Geh. Hofrath, Professor, Direktor der Sternwarte in Leipzig.

Bubendey, J. F., Professor an der technischen Hochschule in Charlottenburg.

Cantor, M., Dr. phil., Hofrath, Professor der Mathematik in Heidelberg.
Günther, S., Dr. phil., Professor der Geographie in München.
Hübbe, H. W. C., Stadtbaumeister in Schwerin.
Hurwitz, A., Dr. phil., Professor der Mathematik in Zürich.
von Neumayer, G., Dr. phil., Professor, Wirkl. Geh. Admiralitätsrath, Direktor der Seewarte, Hamburg.
Netto, E., Dr. phil., Geh.-Hofrath, Professor der Mathematik in Giessen.
Reye, Th., Dr. phil., Professor der Mathematik in Strassburg.
Schuback, D. A., Deich- und Grenzinspektor in Hamburg.
Stammann, J. O., Dr. jur., Senator in Hamburg.
Sturm, R., Dr. phil., Geh.-Reg.-Rath, Professor der Mathematik in Breslau.

II. Auswärtige Mitglieder.

Ahrens, W., Dr. phil., Lehrer an der Maschinenbauschule in Magdeburg.
Ambronn, F. A. L., Dr. phil., Professor, Observator der Sternwarte in Göttingen.
Bibliothek, Königliche in Berlin.
Blater, J., in Baden-Baden.
Harzer, P., Dr. phil., Professor, Direktor der Sternwarte in Kiel.
Lentz, H., Wasserbauinspektor a. D. in Cuxhaven.
Ludendorff, O., Dr. phil, Assistent am astrophysikalischen Observatorium in Potsdam.
Mahlke, A., Dr. phil., Magdeburg.
Meyn, H. W., Direktor der Karlshütte in Rendsburg.
Mügge, O., Dr. phil., Professor der Mineralogie in Königsberg.
Oppenheimer, H., Dr. phil., Reallehrer in Neustadt a. H. (Pfalz).
Scheller, A., Dr. phil., Adjunct der K. K. Universitätssternwarte in Prag.
Schrader, C. W. O., Dr. phil., Geh. Reg.-Rat, Reichsprüfungsinspektor in Berlin.
Servus, H., Dr. phil., Oberlehrer am Friedrichs-Realgymnasium in Berlin und Privatdocent an der techn. Hochschule in Charlottenburg.
Sieveking, J. H. in Bielefeld.
Sprung, A., Dr. phil., Professor, Sektionschef am meteorolog. Institut in Berlin.
Teege, H., Dr. phil., Marineoberlehrer in Wilhelmshaven.

III. Einheimische Mitglieder.

Ahlborn, F. H. H., Professor am Realgymnasium des Johanneums.
Banning, F., Dr. phil., Oberlehrer an der Gelehrtenschule des Johanneums.

Bauch, F., Lehrer an der Realschule von Dr. Bieber.
Bensberg, E., Wasserbauinspektor.
Böger, R., Dr. phil., Professor am Realgymnasium des Johanneums.
Bohnert, E. F. Ph., Dr. phil., Oberlehrer an der Oberrealschule vor dem Holstenthor.
Bolte, F. G., Dr. phil., Direktor der Navigationsschule.
Brügmann, W., cand. prob. an der Oberrealschule vor dem Holstenthor.
Buchheister, M. J., Wasserbaudirektor.
Busche, E., Dr. phil., Oberlehrer an der Hansaschule in Bergedorf.
Classen, J., Dr. phil., Assistent am physikalischen Staatslaboratorium.
Dencker, F., Chronometermacher.
Detels, F., Oberlehrer an der Realschule in Eilbeck.
Dressler, M., Lehrer an der Realschule von Dr. Lange.
Fischer, F., Assecuradeur.
Franck, P., Dr. phil., Oberlehrer an der Realschule in Eilbeck.
Fulst, O., Dr. phil., Oberlehrer an der Navigationsschule.
Glage, F. E. A., Dr. phil., Oberlehrer an der Gelehrtenschule des Johanneums.
Grimpen, A., Dr. phil., Lehrer.
Grimsehl, E., Oberlehrer an der Oberrealschule auf der Uhlenhorst.
Grosscurth, F., Dr. phil., Oberlehrer an den Unterrichtsanstalten des Klosters St. Johannis.
Haassengier, E., Oberlehrer an der Oberrealschule vor dem Holstenthor.
Hadenfeldt, E., Direktor der Hafen-Dampfschiffahrts-Gesellschaft.
Hillers, W., Dr. phil., cand. prob. am Realgymnasium des Johanneums.
Hoppe, E., Dr. phil., Professor am Wilhelmgymnasium.
Jaerisch, P. G. M., Dr. phil., Professor an der Realschule in Eilbeck.
Keferstein, H. J., Dr. phil., Professor an der Oberrealschule auf der Uhlenhorst.
Köpcke, H. A., Dr. phil., Professor an der Realschule in Altona-Ottensen.
Koldewey, C. C., Admiralitätsrath, Abtheilungsvorsteher an der Seewarte.
Krüss, H., Dr. phil.
Lemke, H., Dr. phil., Oberlehrer an der Realschule in Eimsbüttel.
Löwer, G. F., Wasserbauinspektor.
Lony, G. F. C., Oberlehrer an der Oberrealschule auf der Uhlenhorst.
Mainka, C., Dr. phil., Assistent an der Sternwarte.
Maurer, H., Dr. phil., Assistent an der Seewarte.
Messow, B., Assistent an der Sternwarte.

Michaelsen, A., Dr. phil., Oberlehrer am Christianeum in Altona.
Nagel, A. C., Civilingenieur.
Niebour, C. T. B., Dr. phil., Direktor a. D.
Norden, M., cand. prob. an der Oberrealschule auf der Uhlenhorst.
Oeltjen, H., Dr. phil., Oberlehrer an der Realschule in Eimsbüttel.
Pflaumbaum, G., Dr. phil., Oberlehrer an der Realschule in St. Pauli.
Pund, O., Dr. phil., Seminaroberlehrer.
Repsold, J. A., Dr. phil.
Schader, F., Dr. phil., Professor am Wilhelmgymnasium.
Schönwiese, R., Versicherungsmathematiker.
Schorr, R., Dr. phil., Professor, Direktor der Sternwarte.
Schröder, J., Dr. phil., Oberlehrer an der Oberrealschule vor dem Holstenthor.
Schwassmann, A., Dr. phil., Observator an der Sternwarte.
Schubert, H. C. H., Dr. phil., Professor an der Gelehrtenschule des Johanneums.
Schumpelick, A., cand. prob. an der Gelehrtenschule des Johanneums.
Siegmeyer, K., Oberlehrer an der Hansaschule in Bergedorf.
Sieveking, F., Dr. jur., Rechtsanwalt.
Thaer, A., Dr. phil., Professor, Direktor der Oberrealschule vor dem Holstenthor.
Timm, A., Schiffbauingenieur.
Tuch, Th., Dr. phil.
Wagner, H. A., Dr. phil., Professor, Direktor der Realschule vor dem Lübeckerthor.

MITTHEILUNGEN
DER MATHEMATISCHEN GESELLSCHAFT
IN HAMBURG.

BAND IV. № 4. AUSGEGEBEN IM FEBRUAR 1904.

Zur Topologie der durch eine gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung und ersten Grades definierten Kurvenschar.

Von Wilhelm Büchel in Hamburg.

Einleitung.

Die durch eine gewöhnliche Differentialgleichung

$$f\left(\frac{dy}{dx}, y, x\right) = 0$$

mit reellen Koeffizienten definierten Kurven kann man auf zwei wesentlich verschiedene Weisen studieren. Das eine Mal verfährt man gleichsam mikroskopisch: man betrachtet die Integralkurven nur in der Umgebung einer einzigen Stelle (x_0, y_0) und sucht das Integral durch eine Reihenentwicklung darzustellen, die aber eben nur in einem gewissen Konvergenzgebiet in der Nähe des gewählten Punktes Gültigkeit hat. Von besonderer Wichtigkeit sind hier die Entwicklungen in der Umgebung der singulären Punkte. Diese Betrachtungsweise hat lange Zeit das Hauptinteresse absorbiert, und es gibt eine reiche diesbezügliche Literatur, die man in dem Encyklopädieartikel II A 4a p. 189—229 von Painlevé zusammengestellt findet. Eine Arbeit von Björling gehört hierher: Über singuläre Punkte der gewöhnlichen algebraischen Differentialgleichungen erster Ordnung und ersten Grades. (Archiv d. Math. u. Physik. 2. Reihe IV. Bd. 358—384; 1886. Ich komme auf dieselbe zurück p. 136.) Hervorgehoben seien noch die Arbeiten von Bendixson (Stockh. Öfv. 9/2., 9/3., 13/4., 9/11. 1898) cf. p. 136.

Dem gegenüber steht die Betrachtungsweise, die ich als makroskopisch bezeichnen möchte. Sie hat die Aufgabe, den Gesamtverlauf der Integralkurven festzustellen, wenigstens qualitativ. Man sieht, daß jene erste Aufgabe, die Entwicklung in der Umgebung eines

bestimmten Punktes, gelöst sein muß, ehe man die zuletzt charakterisierte in Angriff nehmen kann. Man sieht aber auch, daß man zur makroskopischen Betrachtungsweise fortschreiten muß, will man anders das Wesen der durch die Differentialgleichung definierten Kurven erschöpfen. Besonders ist dies auch für die Anwendungen wichtig. Man denke z. B. an die Bewegung einer Flüssigkeit (cf. p. 165).

Poincaré war es nun, der sich zuerst eingehend mit dem Gesamtbild der Integralkurven beschäftigt hat. Seine Resultate hat er in vier Abhandlungen niedergelegt, betitelt: Mémoire sur les courbes définies par une équation differentielle (Journal de Mathématiques Série 3, Bd. VII 375 ff. (1881) und VIII 251 ff. (1882), Série 4, Bd. I 167 ff. (1885) und II 151 ff. (1886). Einige Hauptabschnitte derselben sind mit z. T. vereinfachten Beweisen auch in Picard, Traité d'analyse III Chap. X wiedergegeben. Den Gesamtverlauf hat später, soweit mir bekannt, nur noch W. von Dyck untersucht: Über die gestaltlichen Verhältnisse der durch eine Differentialgleichung erster Ordnung zwischen zwei Variabeln definierten Kurvensysteme (Münch. Ber. XXI 23—57; 1891 und XXII 101—138, 1892). Da aber W. von Dyck sich mit der allgemeinen Differentialgleichung erster Ordnung $F(x, y, y') = 0$ beschäftigt, wo die Diskriminantenkurve eine Hauptrolle spielt, die vorliegende Arbeit aber mit Differentialgleichungen ersten Grades, wo eine Diskriminantenkurve bekanntlich nicht auftritt, so kommt sie auf jene Abhandlungen nicht zurück, knüpft vielmehr an die Poincaréschen Untersuchungen unmittelbar an. Das Neue, das sie bietet, ist eine systematische Diskussion des Verlaufs der Kurven, die zu einer Gleichung von der Form

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Y(x, y)}{X(x, y)}$$

gehören und zwar für die beiden Fälle, daß 1) von den Singularitätenlinien (cf. p. 136) $Y(x, y) = 0$ und $X(x, y) = 0$ die eine eine linear, die andere eine quadratische Funktion in x und y ist, und 2) die beide Singularitätenlinien quadratisch sind.

Die Möglichkeit zu dieser Diskussion war in den allgemeinen Resultaten Poincarés (s. Kap. I) gegeben, und es lag nahe diese Diskussion zu versuchen, da bisher nur

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b_1 x + b_2 y}{a_1 x + a_2 y}$$

vollständig behandelt ist.

Kapitel I.

Die singulären Punkte.

§ 1. Allgemeine Resultate Poincarés.

Projektion auf die Kugel. Um den Verlauf der Integralkurven auch im Unendlichen übersehen zu können, projiziert Poincaré sie auf eine Kugel, welche die xy-Ebene im Nullpunkte berührt. Nennen wir den Berührungspunkt den „Südpol", so ist der diametral gegenüberliegende Punkt der „Nordpol" und der durch eine auf der Verbindungslinie der Pole senkrechte Ebene ausgeschnittene größte Kreis der „Äquator". Wir verbinden nun den Punkt (x, y) der Ebene mit dem Kugelmittelpunkt und ordnen die beiden Schnittpunkte dieses Strahles mit der Kugel dem Punkte (x, y) zu, sodaß wir also unsere xy-Ebene zweimal abgebildet haben, einmal auf die südliche und einmal auf die nördliche Halbkugel. Gemeinsam ist beiden Bildern der Äquator, der dem Unendlichfernen der Ebene entspricht, und das ist der Hauptvorteil dieser Projektion, daß wir das Unendlichweite auf eine endliche Kurve abgebildet haben.

Die im Laufe der Arbeit gegebenen Zeichnungen sind so gedacht, daß das Bild der unteren Halbkugel wieder stereographisch, also vom Nordpol auf die Ebene projiziert wird. Die Kurven liegen dann in einem endlichen Kreise, der selbst das Unendliche darstellt.

Im allgemeinen geht nun, da wir es mit einer Differentialgleichung erster Ordnung und ersten Grades

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b_1 x + b_2 y + (\quad)_2 + \cdots}{a_1 x + a_2 y + (\quad)_2 + \cdots}$$

zu tun haben, durch jeden Punkt unserer Kugel eine einzige Integralkurve, und nur durch einzelne Punkte kann mehr als eine Kurve laufen. Solche „singulären Punkte" treten bei der obigen Differentialgleichung immer auf (Beweis bei Poincaré, J. de M. 1881 p. 394 ff., bei Picard III p. 230), und diese singulären Punkte sind natürlich für die Topologie der Kurven in hervorragender Weise maßgebend. Durch die Untersuchungen von Cauchy, Poincaré, Briot und Bouquet (cf. J. de M. 1881 p. 385 ff.) weiß man, daß es vier verschiedene singuläre Punkte der „ersten Art" gibt, nämlich Knotenpunkte (noeuds), in denen unendlich viele Integralkurven endigen, Sattelpunkte (cols), durch die nur zwei gehen, Strudelpunkte (foyers), um die sich die Kurven spiralig winden, und schließlich Wirbelpunkte (centres), die von lauter geschlossenen Kurven umgeben

sind. Singularitäten der „zweiten Art" entstehen durch Zusammenfallen dieser singulären Punkte „erster Art".

Es seien hier einige Worte über die schon auf p. 133 erwähnte Arbeit von Björling eingefügt. Er studiert die Singularitäten der allgemeineren Gleichung

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Y}{X} = \frac{B(x, y)_n + \psi(x, y)}{A(x, y)_n + \varphi(x, y)},$$

läßt also X und Y nicht mit linearen, sondern mit homogenen Gliedern vom $n$ten Grade in x und y beginnen: $A(x, y)$ und $B(x, y)$. $\varphi(x, y)$ und $\psi(x, y)$ enthalten nur Glieder von $(n+1)$ten und von höheren Graden in x und y. Er beschränkt sich dann zur Untersuchung des Verlaufs der Kurven in der unmittelbaren Umgebung der singulären Stelle $x = 0$, $y = 0$ auf die Glieder niedrigster Ordnung von X und Y, kann nun die Integration der so erhaltenen Differentialgleichung

$$\frac{dy}{dx} = \frac{B(x, y)_n}{A(x, y)_n}$$

wirklich ausführen und durch Diskussion dieses Integrals die möglichen Arten von Singularitäten feststellen. Für $n = 1$ erhält er natürlich die obigen Haupttypen der Singularitäten erster Art.

Diese Untersuchungsweise setzte fort J. Möller: Singuläre Punkte der gewöhnlichen algebraischen Differentialgleichungen. Stockh. Vetensk. Bihang XV Abt. I No. 2. Über den Gesamtverlauf bringen sie beide nichts, auch Bendixson (cf. p. 133) nicht, der die Singularitäten der Differentialgleichung

$$x^m \frac{dy}{dx} = ax + by + \cdots$$

und dann auch die der obigen allgemeinsten von diesem Typ[illegible] untersucht. (Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften II A 4[illegible])

Ich kehre zu Poincaré zurück:

Was nun zunächst die singulären Punkte im Endliche[illegible] angeht, so sind sie gegeben als die gemeinsamen Wurzeln von $X =$ und $Y = 0$. Die Kurven $X = 0$ und $Y = 0$ habe ich daher sch[illegible] p. 134 Singularitätenlinien genannt. Die Natur eines solchen sing[illegible]lären Punktes hängt nur ab von den Koeffizienten der linearen Glied[illegible] in X und Y und zwar von den Wurzeln l_1 und l_2 der Gleichung

$$l^2 - (a_1 + b_2)\, l + a_1 b_2 - a_2 b_1 = 0.$$

I. $\delta \equiv a_1 b_2 - a_2 b_1 < 0$ bedeutet einen Sattelpunkt (col).

II. $\delta \equiv a_1 b_2 - a_2 b_1 > 0$.

Dazu sei 1) $\Delta \equiv (a_1 + b_2)^2 - 4\delta \geq 0$.

Dann handelt es sich um einen Knotenpunkt (noeud). Ist $l_2 \neq l_1$, so haben sämtliche Kurven in ihm die nämliche Tangente; ist $l_2 = l_1$, so laufen sie in allen möglichen Richtungen in ihn hinein.

2) Es sei $\Delta \equiv (a_1 + b_2)^2 - 4(a_1 b_2 - a_2 b_1) < 0$. Dann ist der betrachtete Punkt ein Strudelpunkt (foyer). Der Wirbelpunkt (centre) ist ein ganz spezieller Fall des Strudelpunktes. Es muß zu den obigen Bedingungen nämlich noch hinzukommen

$$b_1 + b_2 = 0$$

und das Verschwinden einer unendlichen Anzahl gewisser Konstanten (Journal de Mathématiques 4e série, t. I, p. 172; Picard III, p. 207). Im folgenden werden die Wirbelpunkte, da sie eben nur Spezialfälle der Strudelpunkte sind, nicht immer besonders hervorgehoben werden.

Um die singulären Punkte im Unendlichen zu studieren, transformiert Poincaré die Gleichung

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Y(x, y)}{X(x, y)}$$

durch

$$x = \frac{1}{z}, \quad y = \frac{t}{z}, \quad \text{also} \quad t = \frac{y}{x},$$

sodaß die Punkte $z = 0$ des Äquators auf die t-Achse in der tz-Ebene fallen. Nur der Punkt $z = 0$, $x = 0$ kann auf diese Weise nicht untersucht werden, da er auch in der tz-Ebene ins Unendliche fällt. Die transformierte Gleichung lautet

$$\frac{dz}{dt} = -\frac{z}{\dfrac{Y\left(\frac{1}{z}, \frac{t}{z}\right)}{X\left(\frac{1}{z}, \frac{t}{z}\right)} - t}.$$

Ihre singulären Punkte sind gegeben durch

$$\begin{cases} z = 0 \\ \dfrac{Y\left(\frac{1}{z}, \frac{t}{z}\right)}{X\left(\frac{1}{z}, \frac{t}{z}\right)} - t = 0. \end{cases}$$

Die im Unendlichen gelegenen singulären Punkte der gegebenen Gleichung findet man daher als Wurzeln von

$$\frac{Y_n(1, t)}{X_n(1, t)} - t = 0,$$

wo Y_n und X_n die Glieder höchsten Grades in Y und X sind, und zwar liefert jede Wurzel t zwei singuläre Punkte auf dem Äquator, die sich diametral gegenüberliegen.

Den Fall, daß $\frac{Y_n}{X_n} - t \equiv 0$ ist, wollen wir für diese allgemeine Betrachtung ausschließen, während er uns bei der speziellen Diskussion besonders beschäftigen wird. Ist aber $\frac{Y_n}{X_n} - t \not\equiv 0$, so ist der Äquator Integralkurve, und Strudelpunkte kommen mithin im Unendlichen nicht vor. Es handelt sich also nur noch um die Unterscheidung von Sattelpunkten und Knotenpunkten. Diese läßt sich natürlich durch Anwendung der Kriterien von p. 136 f. auf die transformierte Gleichung bewerkstelligen. Für den Fall, daß Y und X von gleichem Grade sind, hat Poincaré ein handlicheres Kriterium aufgestellt. Der Sachverhalt ist hier einfach der (cf. Journal de Mathématiques 1881 p. 399), daß bei einem Knotenpunkt für wachsende t $\frac{Y_n}{X_n} - t$, bei $t = 0$ vom Positiven zum Negativen, bei einem Sattelpunkt vom Negativen zum Positiven übergeht.

Ausgeschlossen war bisher der Punkt $x = 0$, $z = 0$. Um ihn zu untersuchen, transformiert man mit

$$x = \frac{t}{z}, \quad y = \frac{1}{z}, \quad \left(t = \frac{x}{y}\right)$$

und verfährt ganz analog.

Schließlich habe ich hier noch zwei sehr allgemeine Sätze von Poincaré über die singulären Punkte anzuführen, die eine systematische Diskussion spezialisierter Gleichungen sehr erleichtern.

Satz I (Journal de Math. 81, p. 405): Sind f, n und c die Anzahlen der Strudelpunkte, Knotenpunkte und Sattelpunkte im Endlichen, f', n', c' die halben Anzahlen derselben im Unendlichen, so besteht die Beziehung:

$$n + n' + f + f' = 1 + c + c'.$$

Wir sahen bereits, daß im allgemeinen $f' = 0$ ist.

Satz II (Journal de Math. 1881, p. 405): Verfolgt man eine Singularitätenlinie, so trifft man, wenn man in derselben Halbkugel bleibt, nach einem Strudel- oder Knotenpunkt immer einen Sattelpunkt und umgekehrt; tritt man aber in die andere Halbkugel über, so folgt einem Strudel- oder Knotenpunkte wieder ein Strudel- oder Knotenpunkt, einem Sattelpunkt wieder ein Sattelpunkt.

Ein sich kreuzendes Geradenpaar, das uns im folgenden mehrfach als Singularitätenlinie begegnen wird, hat man dabei durch eine Hyperbel zu ersetzen, deren Asymptoten diese Geraden sind.

§ 2. Singuläre Punkte der Gleichung

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b_{11}x^2 + 2b_{12}xy + b_{22}y^2 + b_{10}x + b_{20}y + b_{00}}{a_{10}x + a_{20}y + a_{00}}.$$

Die Singularitäten im Endlichen sind gegeben durch die Schnittpunkte des Kegelschnitts mit der Geraden. Nehmen wir zunächst an, daß diese Schnittpunkte sämtlich im Endlichen liegen, so können selbstverständlich entweder zwei getrennte, zwei zusammenfallende oder gar keine auftreten, und wenn zwei vorhanden sind, so muß nach dem Satz II p. 138 der eine ein Strudel- oder Knotenpunkt, der andere eine Sattelpunkt sein.

Schneiden sich die Singularitätenlinien im Unendlichen, so kann es sich nur um eine Hyperbel mit einer ihrer Asymptoten oder um eine Parabel mit ihrer Achse handeln. Im ersten Fall hat man im Endlichen keine, im zweiten eine einzige Singularität. Die Schnittpunkte der Singularitätenlinien können aber durch eine geringe Drehung der Geraden ins Endliche gerückt werden, sodaß diese Fälle auf die früheren zurückgeführt sind.

Wie steht es nun weiter mit den singulären Punkten im Unendlichen?

Da $X_2 \equiv 0$ ist, können wir das Kriterium von p. 138 nicht anwenden, müssen vielmehr die Transformation $x = \frac{1}{z}$, $y = \frac{t}{z}$ wirklich ausführen. Wir erhalten:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{-z^2(a_{10} + a_{20}t + a_{00}z)}{b_{11} + 2b_{12}t + b_{22}t^2 + b_{10}z + b_{20}tz - b_{00}z^2 - tz(a_{10} + a_{20}t + a_{00}z)}.$$

Die singulären Punkte auf $z = 0$ sind also gegeben als Wurzeln der Gleichung

$$Y_2 \equiv b_{11} + 2b_{12}t + b_{22}t^2 = 0.$$

Sie sind aber keine einfachen Singularitäten, da der Zähler mit dem Quadrat von z beginnt. Diese Singularitäten sind also aufzulösen, und zwar kann das geschehen, indem man statt z^2 im Zähler $z^2 - \varepsilon^2$ setzt, wo ε eine kleine Größe ist. Was heißt das geometrisch? Dazu müssen wir uns überlegen, was die Transformation $x = \frac{1}{z}$, $y = \frac{t}{z}$ geometrisch bedeutet. Sie ist nämlich eine Projektion der Kugel vom Mittelpunkt aus auf eine Tangentialebene parallel der

Ebene des größten Kreises $x = 0$ und zwar so, daß die positive t-Richtung in die positive x-Richtung fällt, die z-Achse senkrecht nach unten weist. $z = \text{const.}$ ist daher das Kreisbüschel durch die Achse $\begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases}$, und wenn wir z^2 durch $z^2 - \varepsilon^2$ ersetzen, so heißt das, wir haben den doppelt zu zählenden Äquator durch die Nachbarkreise in diesem Büschel ersetzt.

Wir können nun der Reihe nach die Singularitäten erster Art, die durch $z = +\varepsilon$ und $z = -\varepsilon$ verursacht werden, bestimmen. Dazu darf man die obige Gleichung in der vereinfachten Gestalt schreiben:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{-(z^2 - \varepsilon^2)(a_{10} + a_{20}t)}{b_{11} + 2b_{12}t + b_{22}t^2}.$$

Man sieht leicht ein, daß man für denselben Wert von t immer einen Knotenpunkt und einen Sattelpunkt erhält, die in der Grenze für $\varepsilon = 0$ zusammenfallen zu einer Doppelsingularität. Die Anzahl dieser singulären Punkte 2. Art will ich im folgenden mit $c'n'$ bezeichnen. Aus der Art, wie wir diesen mehrfachen Punkt aufgelöst haben, geht hervor, daß, wenn er in der südlichen Halbkugel die Eigenschaften eines Sattelpunktes hat, er in der nördlichen die eines Knotenpunktes besitzt und umgekehrt. In unsern Zeichnungen werden wir daher immer nur einen einfachen singulären Punkt einzutragen haben, und zwar liegen sich in derselben Halbkugel immer ein Knotenpunkt und ein Sattelpunkt auf dem Äquator gegenüber. Singularitäten zweiter Art treten auch auf, wenn der lineare Ausdruck im Zähler unserer Differentialgleichung steht. Doch dieser Fall läßt sich ohne weiteres auf den vorigen zurückführen; denn statt

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b_{10}x + b_{20}y + b_{00}}{a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + a_{10}x + a_{20}y + a_{01}}$$

kann ich

$$\frac{dx}{dy} = \frac{a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + a_{10}x + a_{20}y + a_{00}}{b_{10}x + b_{20}y + b_{00}}$$

diskutieren.

Um die Anzahl der Singularitäten im Unendlichen festzustellen, betrachte ich die Wurzeln von $Y_2 = 0$ d. h. von

$$b_{11}x^2 + 2b_{12}xy + b_{22}y^2 = 0$$

oder

$$\frac{y}{x} = t = -\frac{b_{12}}{b_{22}} \pm \frac{1}{b_{22}}\sqrt{b_{12}^2 - b_{11}b_{22}}.$$

Daraus folgt: Ist $b_{12}^2 - b_{11}b_{22} > 0$ d. h. stellt $Y = 0$ eine Hyperbel dar, so liefert diese Gleichung 2 reelle Wurzeln, mithin 4 singuläre Punkte zweiter Art im Unendlichen.

Ist $b_{12}^2 - b_{11}b_{22} = 0$, d. h. ist $Y = 0$ eine Parabel, so fallen die Wurzeln zusammen, und wir haben zwei vierfache Singularitäten, die sich diametral gegenüberliegen. Da dieser Fall durch Auflösung der Singularitäten sich auf den vorigen zurückführen läßt, brauchen wir ihn nicht gesondert zu betrachten.

Ist schließlich $b_{12}^2 - b_{11}b_{22} < 0$ d. h. $Y = 0$ eine Ellipse, so liefert die Gleichung keine Singularitäten.

Außerdem findet man aber, daß im Punkte $\begin{cases} z = 0 \\ x = 0 \end{cases}$, der ja nach p. 137 immer gesondert zu betrachten ist, im Falle dieser Differentialgleichung immer eine Singularität und zwar, wie man sich leicht überzeugt, ein einfacher Knotenpunkt liegt. Steht der lineare Ausdruck im Zähler, der Kegelschnitt im Nenner, so liegen diese festen Knotenpunkte auf $y = 0$. Es kann also, wenn eine Singularitätenkurve ein Kegelschnitt, die andere eine Gerade ist, nicht vorkommen, daß das Unendliche singularitätenfrei ist; denn $\frac{Y_2}{X_2} - \frac{y}{x}$ identisch gleich null ist auch ausgeschlossen. Vielmehr liegen, wie wir gesehen haben, im Unendlichen 2 oder 6 singuläre Punkte und 2 sind in jedem Fall Knotenpunkte. Nehmen wir noch den Satz I von p. 138 zu Hilfe so kommen wir zu folgenden Möglichkeiten:

1. Im Endlichen keine Singularität.

$$n = f = c = 0.$$

Dann ergibt sich für das Unendliche

a) im Falle der Ellipse $n' = 1, \quad c' = 0,$

b) „ „ „ Hyperbel $c'n' = 2, \quad c' = 1.$

2. Im Endlichen ein Strudel- oder Knotenpunkt und ein Sattelpunkt:

$$n(f) = 1, \quad c = 1.$$

Dann ist wieder

a) im Falle der Ellipse $n' = 1, \quad c' = 0.$

b) „ „ „ Hyperbel $c'n' = 2, \quad c' = 1.$

§ 3. Singuläre Punkte der Gleichung

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b_{11}x^2 + 2b_{12}xy + b_{22}y^2 + b_{10}x + b_{20}y + b_{00}}{a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + a_{10}x + a_{20}y + a_{00}}.$$

Wir wollen zunächst wieder annehmen, daß die Singularitätenlinien $Y = 0$ und $X = 0$ sich im Unendlichen nicht schneiden. Dann können offenbar im Endlichen 4, 2 oder 0 reelle Schnittpunkte liegen.

Welcher Art sind nun diese Singularitäten?

Ist einer der beiden Kegelschnitte eine Ellipse, so liegen auf ihr als einer geschlossenen Kurve eine gerade Anzahl von Schnittpunkten, und, da man beim Durchlaufen derselben nach einem Strudel- oder Knotenpunkt immer einen Sattelpunkt trifft, so müssen von 4 singulären Punkten 2, von 2 singulären Punkten einer ein Sattelpunkt sein.

Anders, wenn beide Kegelschnitte Hyperbeln sind. Dann können entweder auf allen Zweigen der Singularitätenkurven in einer Halbkugel eine gerade Anzahl von Singularitäten liegen. Nach dem Satz II p. 138 muß die Hälfte von ihnen aus Sattelpunkten bestehen, und wir haben den vorigen Fall. Es ist aber offenbar auch möglich, daß alle Zweige der Hyperbeln in einer Halbkugel eine ungerade Zahl singulärer Punkte enthalten. Dann sind, wie man sieht, wenn man auch den zweiten Teil des Satzes II berücksichtigt, von 4 Singularitäten 3 Knoten- oder Strudelpunkte und einer ein Sattelpunkt oder umgekehrt 3 Sattelpunkte und einer ein Knoten- oder Strudelpunkt; bei 2 Singularitäten im ganzen sind entweder beide Sattelpunkte oder beide Strudel- oder Knotenpunkte.

Die Singularitäten im Unendlichen sind gegeben als die Wurzeln der Gleichung

$$\frac{b_{11} + 2b_{12}t + b_{22}t^2}{a_{11} + 2a_{12}t + a_{22}t^2} - t = 0.$$

Das ist eine Gleichung dritten Grades, die entweder drei oder nur eine reelle Wurzel haben kann. Demnach erhalten wir 2 oder 4 Singularitäten im Unendlichen. Die Möglichkeit, daß die obige Gleichung identisch verschwindet, schließen wir einstweilen aus, um auf p. 143 darauf zurückzukommen.

Nehmen wir nun noch den Satz I wieder zu Hilfe, daß

$$n + n' + f = 1 + c + c'$$

ist, so ergibt sich folgende Tabelle:

	c	n	f	und	c'	n'	oder	c'	n'
I a)	2	2	0		1	2		0	1
	2	0	2		1	2		0	1
b)	2	1	1		1	2		0	1
c)	1	3	0		2	1		1	0
	1	2	1		2	1		1	0
	1	1	2		2	1		1	0
	1	0	3		2	1		1	0
	3	1	0		0	3		—	—
	3	0	1		0	3		—	—

	c	n	f	und	c'	n'	oder	c'
II a)	2	0	0		0	3		—
	0	2	0		2	1		1
	0	0	2		2	1		1
	0	1	1		2	1		1
b)	1	1	0		1	2		0
	1	0	1		1	2		0
III	0	0	0		1	2		0 1

Schließlich können von den Punkten im Endlichen noch einer oder zwei ins Unendliche fallen dadurch, daß die Schnittpunkte der Singularitätenlinien dorthin rücken. Das geschieht, wenn die quadratischen Glieder einen oder zwei gemeinsame reelle Linearfaktoren haben. Man bestimmt die Art dieser Singularitäten, indem man die Singularitätenlinien so variiert, daß die Schnittpunkte alle ins Endliche fallen, d. h. die Linearfaktoren verschieden werden.

Besonderer Untersuchung bedarf der Fall, daß

$$x Y_2 - y X_2 \equiv 0$$

ist, d. h.

$$b_{11} + 2b_{12}t + b_{22}t^2 - t(a_{11} + 2a_{12}t + a_{22}t^2) \equiv 0.$$

Damit dies eine Identität in t ist, muß sein

$$b_{11} = a_{22} = 0,$$

$$b_{12} = \frac{a_{11}}{2}, \quad a_{12} = \frac{b_{22}}{2}.$$

Wir wollen zunächst annehmen, daß immer ein singulärer Punkt im Endlichen vorhanden ist, den wir dann in den Nullpunkt legen können, und die allgemeinste Form unserer Differentialgleichung, für die die obige Identität erfüllt ist, lautet daher

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b_{22}y^2 + a_{11}xy + b_{10}x + b_{20}y}{a_{11}x^2 + b_{22}xy + a_{10}x + a_{20}y}.$$

Es sei 1) $b_{10} \neq 0$.

Setze ich dann zur Abkürzung

$$\frac{x}{y} = -\frac{b_{20} - a_{10}}{2b_{10}} \pm \frac{1}{2b_{10}}\sqrt{4b_{10}a_{20} + (b_{20} - a_{10})^2} = C,$$

so sind die singulären Punkte im Endlichen

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \quad \text{und} \quad \begin{cases} x = -C\dfrac{b_{10}C + b_{20}}{b_{22} + a_{11}C}, \\ y = -\dfrac{b_{10}C + b_{20}}{b_{22} + a_{11}C}. \end{cases}$$

Das sind 3 Singularitäten, da die Wurzel in C beider Vorzeichen fähig ist. Ein Schnittpunkt der Singularitätenkurven liegt im Unendlichen, veranlaßt aber eben wegen der erfüllten Identität keine Singularität, wie wir sehen werden.

Ist der Anfangspunkt $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ ein Strudelpunkt, so wird wegen

$$\Delta \equiv 4b_{10}a_{20} + (b_{20} - a_{10})^2 < 0$$

C imaginär, mithin auch die anderen beiden singulären Punkte. Und da wir *uns einen vorkommenden* Strudelpunkt immer in den Anfangs-

punkt gelegt denken können (bei linearer Transformation bleibt die Identität erfüllt), so gilt der Satz:

Kommt ein Strudelpunkt vor im Falle, daß die Identität erfüllt ist, so ist er die einzige Singularität im Endlichen.

Dieser Satz wird durch den bisher ausgeschlossenen Fall

2) $b_{10} = 0$ nicht modifiziert.

Denn von den dann auftretenden singulären Punkten:

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} x = -\frac{a_{10}}{a_{11}} \\ y = 0 \end{cases}, \quad x = \frac{a_{20} b_{20}}{(a_{10} - b_{20}) b_{22} - a_{20} a_{11}},$$

$$y = \frac{-\, b_{20}(a_{10} - b_{20})}{(a_{10} - b_{20}) b_{22} - a_{20} a_{11}},$$

sind immer zwei Knotenpunkte und einer ein Sattelpunkt, und ein Strudelpunkt kann garnicht vorkommen. In der Tat: man hat (cf. p. 136) für

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}, \quad \delta = a_{10} b_{20}, \quad \Delta = (a_{10} - b_{20})^2,$$

für

$$\begin{cases} y = 0 \\ x = -\frac{a_{10}}{a_{11}} \end{cases}, \quad \delta = -\, a_{10}(b_{20} - a_{10}), \quad \Delta = b_{20}^2,$$

für

$$x = \frac{a_{20} b_{20}}{(a_{10} - b_{20}) b_{22} - a_{20} a_{11}},$$

$$y = \frac{-\, b_{20}(a_{10} - b_{20})}{(a_{10} - b_{20}) b_{22} - a_{20} a_{11}},$$

$$\delta = -\,(a_{10} - b_{20}) b_{20} \{ b_{22}(a_{10} - b_{20}) - a_{20} a_{11} \}^2$$

und

$$\Delta = a_{10}^2 \{ b_{22}(a_{10} - b_{20}) - a_{20} a_{11} \}^2.$$

Aus diesen Angaben ist die obige Behauptung sofort ersichtlich.

Es bleibt uns noch das Verhalten im Unendlichen zu studieren.

Die durch $x = \frac{1}{z}$, $y = \frac{t}{z}$ transformierte Gleichung lautet:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{a_{11} + b_{22} t + z(a_{10} + a_{20} t)}{b_{10} - a_{10} t + b_{20} t - a_{20} t^2}.$$

Man sieht, daß der unendlichferne Kreis $z = 0$ nicht mehr, wie sonst, Integralkurve ist. Das liegt daran, daß sich infolge der Identität ein z herausgehoben hat. Singularitäten im Unendlichen d. h. für $z = 0$ treten nur auf, wenn $t = -\frac{a_{11}}{b_{22}}$ auch Wurzel des Nenners ist, wenn also

$$b_{10} b_{22}^2 + (a_{10} - b_{20}) a_{11} b_{22} - a_{20} a_{11}^2 = 0$$

ist. Das ist aber gerade die Bedingung dafür, daß mindestens eine der beiden nicht im Nullpunkt gelegenen Singularitäten aus dem Endlichen ins Unendliche rückt. Und zwar gilt dies sowohl für $b_{10} + 0$ wie für $b_{10} = 0$ (cf. p. 143 f.).

Wenn im Nullpunkt (oder überhaupt im Endlichen) ein Strudelpunkt liegt, und daher nach p. 143 die andern singulären Punkte imaginär sind, können also im Unendlichen keine Singularitäten vorkommen.

Sind alle 3 Singularitäten reell, so ist, wie gesagt, ein Strudelpunkt unmöglich, und von den singulären Punkten sind nach dem schon oft citierten Satz II p. 138 zwei Knotenpunkte und einer ein Sattelpunkt.

Wenn wir uns darauf beschränken, daß sämtliche Singularitäten im Endlichen liegen (die andern Fälle lassen sich auf diese zurückführen), so haben wir folgende beiden Fälle:

n	f	c	n'	f'	c'
2	0	1	0	0	0
0	1	0	0	0	0

Bei Seite gelassen hatten wir bisher den Fall, daß bei erfüllter Identität die Singularitätenlinien sich im Endlichen nicht schneiden, also kein singulärer Punkt im Endlichen vorhanden ist.

Ich gebe gleich Beispiele:

1) $$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2 + xy + 1}{x^2 + xy + 1}.$$

Zähler und Nenner haben in der Tat keine gemeinsamen endlichen Wurzeln.

Macht man für das Unendliche die Transformation mittelst $x = \frac{1}{z}$, $y = \frac{t}{z}$, so findet man auf $y = -x$ zwei Wirbelpunkte.

2) $$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2 + xy + x + y + 1}{x^2 + xy + x + y + 1}$$

verhält sich ganz ähnlich, nur daß die singulären Punkte im Unendlichen auf $y = -x$ allgemeine Strudelpunkte sind.

Kapitel II.

Der Verlauf der Integralkurven.

§ 1. Allgemeines.

Sind die Singularitäten bestimmt, so ist die weitere Aufgabe die, den Verlauf der Integralkurven festzustellen.

Da gilt nun zunächst der Satz von Poincaré (J. d. M. 1882,

p. 255): Jede Integralkurve, die nicht in einen Knotenpunkt läuft, ist entweder eine geschlossene Kurve oder eine Spirale.

Um die Spiralen zu studieren, denken wir uns im Richtungfelde einen Bogen AB gezogen (Figur 1), der keine Berührung mit den Integralkurven hat (arç sans contact bei Poincaré) und dessen einer Endpunkt B ein Strudelpunkt ist. Er sei gegeben durch die Gleichungen $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$. Dann sei durch einen Wert t_0 des Parameters t eine Integralkurve durch den Punkt C bestimmt. Von der linken Seite des Bogens kann die Kurve, wenn AB von A nach B gerichtet ist, den Bogen AB nicht noch einmal treffen, da dann dieser eine Berührung haben müßte (J. d. M. 1881, p. 420). Trifft die Kurve aber zum zweiten Male von rechts AB in einem Punkte D, der dem Parameterwert t_1 zugehört, so heißt D der Folgepunkt von C. Haben alle Punkte des Bogens AB Folgepunkte, so haben wir es mit Spiralen zu tun für $t_1 \gtrless t_0$ oder mit geschlossenen Kurven für $t_0 = t_1$ (J. de. M. 1882, p. 254). Denkt man sich nun t_0 und t_1 variabel, so wird durch eine Beziehung $t_1 = \varphi(t_0)$ das „Gesetz der Folge" gegeben. Poincaré beweist nun den weiteren Satz (J. de M. 1882, p. 254.):

Wenn durch den Punkt C eine Integralkurve ohne Doppelpunkt geht und C einen Folgepunkt D hat, so ist das Gesetz der Folge analytisch in der Nachbarschaft von C.

Der Fall, daß eine der Spiralen durch einen Doppelpunkt geht, wird uns nur einmal im folgenden (p. 159) beschäftigen. Mehr interessiert uns das Vorkommen einer einzigen geschlossenen Kurve unter den Spiralen, das Vorkommen eines sogenannten Grenzcykels. Enthält derselbe keine Singularität, so nähern sich ihm von beiden Seiten die Spiralen asymptotisch. Enthält derselbe aber einen oder mehrere Doppelpunkte, so kann für den ihm zugehörigen Parameterwert das Gesetz der Folge diskontinuierlich werden, aufhören analytisch zu sein, und die Integralkurven brauchen außerhalb desselben nicht mehr spiralig zu verlaufen. Dafür, daß die Gebiete, in denen die Integralkurven spiralig verlaufen oder sämtlich geschlossen sind, durch Doppelpunktskurven abgeschlossen sind, werden wir bei der Diskussion unserer Gleichungen mannigfache Beispiele finden.

Um den Verlauf der Integralkurven festzustellen, ist ferner folgende Überlegung von Wichtigkeit:

Eine Integralkurve, die von einem einfachen Knotenpunkte ausläuft und keine weiteren Singularitäten weder passiert noch einschließt, kann nicht in denselben zurücklaufen.

Angenommen es liefe eine Kurve in einen Knotenpunkt zurück, ıe durch eine andere Singularität zu gehen und ohne eine solche einchließen, so müßten offenbar alle Integralkurven innerhalb dieser genommenen geschlossenen Kurve ebenfalls vom Knotenpunkte ausıen und in denselben zurücklaufen, da sich nach Voraussetzung erhalb der Kurve keine weitere Singularität befindet, eine Integral-ve aber niemals anders als an einer singulären Stelle endigen ın (cf. Figur 2). Ich denke mir nun diese Kurvenschar nicht wieder Ausgangspunkt, sondern in einem unendlich benachbarten Punkte ligend. (Eine solche Änderung wird analytisch durch eine unlichkleine Variation der Konstanten der zugehörigen Differentialichung erreicht.) Dann habe ich zwei Knotenpunkte, zwischen ıen die Kurven verlaufen, und umgekehrt kann ich mir den Knotenıkt in Fig. 2 durch Zusammenfallen dieser beiden einfachen otenpunkte entstanden denken. Er stellt also keinen einfachen otenpunkt, sondern eine mehrfache Singularität dar, und damit ist r obige Satz bewiesen.

Ein einfaches Beispiel möge dies noch weiter erläutern. Wir llen die Differentialgleichung aller Kreise aufstellen, die die X-Achse Nullpunkt berühren

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2xy}{x^2 - y^2} \tag{}$$

d zusehen, welcher Art die Singularität im Nullpunkt ist.

Die Singularität ist offenbar eine mehrfache und wir wollen diese rch Variation der Singularitätenlinien auflösen. Das ist geschehen in

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2xy}{x^2 - y^2 - 1}, \tag{}$$

› an die Stelle des Geradenpaares $x^2 - y^2 = 0$ die gleichseitige yperbel $x^2 - y^2 - 1 = 0$ getreten ist. Zwei von den Schnittpunkten ıd imaginär, die beiden anderen für $\begin{cases} x = \pm 1 \\ y = 0 \end{cases}$ erweisen sich als ıotenpunkte (Figur 3).

Wir können also die Singularität in der Gleichung (1) auffassen ı zwei zusammenfallende Knotenpunkte. Das Beispiel illustriert ıo sehr schön den allgemeinen Satz von p. 146. In der Tat ist es auch der häufigste Fall, daß die Kurven eines Knotenpunktes zu ıem oder mehreren andern Knotenpunkten laufen und zwar sind e Kurven, die von einem Knotenpunkt aus verschiedenen Knotenınkten zustreben, getrennt von einander durch Kurven mit einem ittelpunkt. Der Fall, daß sämtliche Kurven eines Knotenpunktes

sich um einen Strudelpunkt winden, begegnet uns im folgenden nur einmal (cf. p. 159).

Schließlich wollen wir noch kurz auf die Frage eingehen: Wie ändert sich der Lauf der Integralkurven bei Variation der Konstanten der Differentialgleichung?

Variiert man so, daß die Singularitäten die nämlichen bleiben, so ändert sich offenbar im allgemeinen der Verlauf der Integralkurven nur quantitativ, nicht qualitativ. Um also den Typus des Kurvenverlaufs für eine bestimmte Singularitätenverteilung aufzufinden, können wir uns jedes Mal an die einfachste Differentialgleichung halten, die diese besitzt. Von dieser Vereinfachung werden wir im folgenden ausgiebig Gebrauch machen.

Allerdings können bei einer solchen Variation geschlossene Kurven aufhören geschlossen zu sein und umgekehrt geschlossene Kurven neu auftreten. So sind die Wirbelpunkte (cf. z. B. p. 153) ganz spezielle Fälle. Bei geringer Variation der Konstanten verwandeln sie sich in Strudelpunkte, d. h. wir haben keine geschlossenen Kurven mehr, sondern Spiralen, unter denen nur einzelne geschlossene Kurven als Grenzcyklen auftreten können.

§ 2. Verlauf der Integralkurven für

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b_{11}x^2 + 2b_{12}xy + b_{22}y^2 + b_{10}x + b_{20}y + b_{00}}{a_{10}x + a_{20}y + a_{00}}.$$

Nach p. 141 f. haben wir zwei Hauptgruppen zu unterscheiden.

1 $n = n' = c = 0$ 1. Befindet sich im Endlichen keine Singularität, so handelt

a $n' = 1$, $c' = 0$. es sich a) um eine Ellipse, die von der Geraden des Nenners nicht geschnitten wird. Wie wir gesehen haben, liegen nur im Unendlichen zwei Knotenpunkte auf $x = 0$. Alle Integralkurven verbinden daher diese Knotenpunkte und zwar so, daß sie die Ellipse alle horizontal,

b $n' = 2$, $c' = 1$ die Gerade vertikal schneiden; und b) um eine Hyperbel, die von der Geraden nicht geschnitten wird. Um den Verlauf kennen zu lernen, diskutieren wir speziell die Gleichung

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 - y^2 - 1}{x}.$$

Die Knotenpunkte liegen auf $x = 0$ und $x = y$, die $c'n'$-Punkte (cf. p. 140 f.) auf $x = -y$. $x = 0$ ist Integralkurve. Der eine Zweig der Doppelpunktskurven ist der Äquator. Die anderen Zweige können nicht in den benachbarten Knotenpunkten endigen, weil dann die Kurven, die von diesen ausgehen, in denselben Knotenpunkt zurück*laufen müßten*, was nach p. 146 nicht möglich ist (Figur 4).

2) Es seien im Endlichen zwei Singularitäten. $c=1,$ $\varkappa(f)=1.$
Wir knüpfen an die spezielle Gleichung an

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b_{11}x^2 + 2b_{12}xy + b_{22}y^2 + b_{10}x + b_{20}y + b_{00}}{x}.$$

Dann ist von den singulären Punkten der eine ein Knotenpunkt, da sich die Diskriminante Δ als volles Quadrat ergibt, und der andere natürlich ein Sattelpunkt. $x = 0$ ist Integralkurve, und damit ist ein Zweig der Kurve durch den endlichen Sattelpunkt bestimmt. Für den andern Zweig ist wieder zu beachten, daß er wegen unseres Satzes auf p. 146 durch keinen benachbarten Knotenpunkt gehen darf. Nach demselben Satz lassen sich auch die zweiten Zweige der Doppelpunktskurven mit Sattelpunkt im Unendlichen bestimmen: ein Zweig ist immer der Äquator. Im übrigen verlaufen die Kurven von Knotenpunkt zu Knotenpunkt. Wir haben zwei Fälle zu unterscheiden.

a) Der Zähler ist eine Ellipse. Dann haben wir zwei Knoten- $c=1, \varkappa=1,$ $\varkappa'=1.$
punkte im Unendlichen auf $x = 0$. Die Figur 5 stellt dar

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 + y^2 - 1}{x}.$$

b) Der Zähler ist eine Hyperbel. Das Unendliche zeigt 6 Singulari- $c=1, \varkappa=1,$ $\varkappa'=2, c'=1.$
täten. Die Fig. 6 ist gezeichnet für

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2 - x^2 - 1}{x}.$$

Die noch fehlenden Fälle erhalten wir durch die Differentialgleichung der orthogonalen Trajektorien:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-x}{b_{11}x^2 + 2b_{12}xy + b_{22}y^2 + b_{10}x + b_{20}y}.$$

Da das δ (cf. p. 136) beim Übergang zu den orthogonalen Trajektorien sein Vorzeichen nicht ändert, findet sich im Endlichen an der Stelle eines Sattelpunktes wieder ein Sattelpunkt, an der Stelle eines Knotenpunktes wieder ein Knotenpunkt oder ein Strudelpunkt, je nachdem die leicht aufzustellende Diskriminante $\Delta > 0$ oder < 0 ist.

Die Gestalt der Doppelpunktskurve ergibt sich schon aus der Eigenschaft der Orthogonalität zu den Kurven der Figur 5 (6), ist aber auch ersichtlich aus der variierten speziellen Differentialgleichung

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-x}{y^2 + y},$$

deren Integral

$$\frac{y^3}{3} + \frac{y^2}{2} = -\frac{x^2}{2} + \text{const}$$

lautet.

Die Doppelpunktskurve ist ein einseitiger Grenzcykel des in ihr liegenden Knoten- oder Strudelpunktes, falls dieser nicht speziell Wirbelpunkt ist.

Man hat also

$c=1,\ f=1,\ n'=1.$ a) die Orthogonalkurven zu Figur 5 gegeben durch

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{x^2+y^2-1}$$

(Figur 7).

$c=1,\ f=1,\ n'=2,\ c'=1.$ b) Die Orthogonalkurven zu Figur 6 definiert durch

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y^2-x^2-1}.$$

Ist eine Singularitätenkurve eine Hyperbel, so können natürlich auch die Schnittpunkte mit der Geraden ins Unendliche rücken. Doch gehe ich auf diesen Fall nicht näher ein (cf. p. 139).

§ 3. Verlauf der Integralkurven für

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b_{11}x^2 + 2b_{12}xy + b_{22}y^2 + b_{10}x + b_{20}y + b_{00}}{a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + a_{10}x + a_{20}y + a_{00}}.$$

I. Im Endlichen liegen vier Singularitäten und zwar wollen wir

a) solche Fälle betrachten, wo immer je zwei singuläre Punkte gleichartig sind. Dann müssen, wie wir gesehen haben, zwei Punkte Sattelpunkte sein, die andern entweder gleichzeitig Knoten- oder Strudelpunkte. Da nun die Singularitäten von den Schnittpunkten der Kegelschnitte abhängen, wird man vermuten dürfen, daß der gewünschte Fall eintritt, wenn die Mittelpunkte der Kegelschnitte des Zählers und des Nenners zusammenfallen, die Singularitätenkurven also in zwei gegenüberliegenden Schnittpunkten symmetrisch verlaufen. Da es sich nur darum handelt, die oben angedeuteten Haupttypen zu finden, können wir noch weiter spezialisieren. Wir legen nicht nur die zusammenfallenden Mittelpunkte in den Anfangspunkt des Koordinatensystems, sondern auch die Hauptachsen in die Richtung der Koordinatenachsen, nehmen schließlich die Kegelschnitte kongruent, aber gekreuzt an, so daß wir haben:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a_{11}x^2 + a_{22}y^2 - 1}{a_{22}x^2 + a_{11}y^2 - 1}.$$

Die Singularitäten liegen in $\left|\pm\frac{1}{\sqrt{a_{11}+a_{22}}}\right|$. Sollen sie reell sein, so muß sein $a_{11} + a_{22} > 0$.

r die beiden singulären Punkte

$$x = y = \pm \frac{1}{\sqrt{a_{11} + a_{22}}}$$

t $\delta = 4(a_{22} - a_{11})$, $\Delta = \frac{16 a_{11}^2}{a_{11} + a_{22}}$.

gegen für die beiden anderen

$$x = \pm \frac{1}{\sqrt{a_{11} + a_{22}}}, \quad y = \mp \frac{1}{\sqrt{a_{11} + a_{22}}}$$

t $\delta = -4(a_{22} - a_{11})$, $\Delta = 16(a_{22} - a_{11})$.

Daraus ergibt sich folgende kleine Tabelle:

		$x = y = \pm \frac{1}{\sqrt{a_{11} + a_{22}}}$	$x = \pm \frac{1}{\sqrt{a_{11} + a_{22}}}$, $y = \mp \frac{1}{\sqrt{a_{11} + a_{22}}}$
)	$a_{11} > 0$, $a_{22} > 0$, $\lvert a_{22} \rvert > \lvert a_{11} \rvert$	Knotenpunkt	Sattelpunkt
)	$a_{11} < 0$, $a_{22} > 0$, $\lvert a_{22} \rvert > \lvert a_{11} \rvert$	„	„
)	$a_{11} > 0$, $a_{22} > 0$, $\lvert a_{22} \rvert < \lvert a_{11} \rvert$	Sattelpunkt	Strudelpunkt
)	$a_{11} > 0$, $a_{22} < 0$, $\lvert a_{22} \rvert < \lvert a_{11} \rvert$	„	„

h. also sowohl, wenn beide Kegelschnitte Hyperbeln, als wenn ide Ellipsen sind, können neben den Sattelpunkten entweder zwei notenpunkte oder zwei Strudelpunkte auftreten. Dasselbe gilt auch, nn man eine Ellipse und eine Hyperbel hat.

Wie steht es nun mit den Punkten im Unendlichen? Dieselben id gegeben durch

$$\frac{a_{11} + a_{22} t^2}{a_{22} + a_{11} t^2} - t = 0, \quad \text{wo} \quad t = \frac{y}{x}.$$

e Wurzeln sind

$$t = 1 \quad \text{und} \quad t = \frac{a_{22} - a_{11}}{2 a_{11}} \pm \sqrt{-1 + \left(\frac{a_{22} - a_{11}}{2 a_{11}}\right)^2}$$

d jede Wurzel gibt, anders wie im vorigen Paragraphen, zwei gleiche h diametral gegenüberliegende einfache Singularitäten auf dem quator. Im Fall der Ellipse $a_{11} > 0$, $a_{22} > 0$ sind die letzten beiden urzeln

bei $|a_{22}| < |3a_{11}|$ imaginär,
„ $|a_{22}| = |3a_{11}|$ eine Doppelwurzel,
„ $|a_{22}| > |3a_{11}|$ reell.

Im Falle der Hyperbel $\begin{matrix} a_{11} > 0 \\ a_{22} < 0 \end{matrix}$ oder $\begin{matrix} a_{11} < 0 \\ a_{22} > 0 \end{matrix}$

bei $|a_{22}| < |a_{11}|$ imaginär,
„ $|a_{22}| = |a_{11}|$ Doppelwurzel,
„ $|a_{22}| > |a_{11}|$ reell.

Im Fall (α) sind demnach 6 oder 2 Singularitäten möglich Falle (β) sind es 6, in den Fällen (γ) und (δ) 2. Welcher Art singulären Punkte sein müssen, haben wir auf p. 142 gesehen.

Um nun den qualitativen Verlauf der Integralkurven festzus gehe ich aus einmal von einem Falle, der zwischen (α) und (der Mitte steht, und zweitens von einem Fall, der zwischen (γ (δ) in der Mitte steht. Ich setze nämlich

(1) $$a_{22} = 1, \quad a_{11} = 0$$

und bekomme

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2 - 1}{x^2 - 1}$$

und 2)

$$a_{22} = 0, \quad a_{11} = 1$$

und erhalte

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 - 1}{y^2 - 1}.$$

Die Singularitätenkurven sind hier zwei Geradenpaare, un habe den Vorteil, daß die Integrale dieser Gleichungen sich anal angeben lassen.

Wir betrachten zunächst

1) $$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2 - 1}{x^2 - 1}.$$

Das Integral lautet $\frac{y-1}{y+1} = c\frac{x-1}{x+1}$.

Die 4 Geraden $y^2 = 1$ und $x^2 = 1$ sind Integralkurven und die durch die Sattelpunkte im Endlichen. Durch die Sattelpunk Unendlichen gehen der Äquator und die Gerade $x = y$. Im üb laufen überall die Kurven von Knotenpunkt zu Knotenpunkt, w Figur 8 zeigt.

2) Statt die Kurven von

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 - 1}{y^2 - 1}$$

zu zeichnen, will ich

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x^2-1}{y^2-1}$$

diskutieren zwecks späterer Anwendung. Es bedeutet diese Änderung des Vorzeichens ja nur eine Drehung der Figur um $\frac{\pi}{2}$, und ich erreiche damit, daß ich gerade die orthogonalen Trajektorien der (Figur 8) bekomme.

Das Integral lautet hier

$$\frac{y^3}{3} - y = -\frac{x^3}{3} + x + c.$$

Die Doppelpunktskurve (cf. p. 146) erhält man für $c = 0$. Nämlich:

$$(y+x)(y^2 - xy + x^2 - 3) = 0$$

d. h. sie setzt sich zusammen aus der Geraden $y = -x$ und der Ellipse

$$\frac{\xi^2}{6} + \frac{\eta^2}{2} - 1 = 0,$$

wo ξ und η rechtwinklige Koordinaten sind, die mit den ursprünglichen Koordinaten x, y einen Winkel $\frac{\pi}{4}$ einschließen. Die Strudelpunkte sind in diesem speziellen Fall Wirbelpunkte, so daß innerhalb der Doppelpunktskurve sich lauter geschlossene Kurven befinden, wie die Figur 9 zeigt. Außerhalb verlaufen die Kurven von Knotenpunkt zu Knotenpunkt.

Von diesen Spezialfällen kann ich nun übergehen zu den Fällen, die oben mit (α) und (β) resp. mit (γ) und (δ) bezeichnet sind. Dabei ändert sich das Gesamtbild der Integralkurven nur quantitativ, nicht qualitativ. Allerdings können eventuell, wie aus der obigen Diskussion hervorgeht, in der Figur je 3 Singularitäten im Unendlichen, die verschiedenen Werten von t zugehören, zu einem einzigen Knotenpunkt zusammenrücken, während sonst alles ungeändert bleibt. Es bedarf keiner besonderen Figur, um das zu veranschaulichen. Weiter können dabei aus den speziellen Wirbelpunkten allgemeine Strudelpunkte werden. Überhaupt ist nun mit diesen Beispielen die Diskussion aller der Differentialgleichungen erledigt, die 4 paarweise gleiche singuläre Punkte im Endlichen liefern. Der Kurvenverlauf ist mit den obigen Einschränkungen immer der der Figur 8 resp. 9.

b) Liegen die Singularitätenkurven nicht symmetrisch zum Mittelpunkt des Koordinatensystems, und ist einer von ihnen eine Ellipse, so müssen nach dem auf p. 142 Gesagten jedenfalls wieder 2 Sattel-

punkte vorkommen. Die andern beiden Singularitäten brauchen nun aber nicht mehr 2 Strudelpunkte oder 2 Knotenpunkte zu sein — was natürlich auch wieder vorkommen kann und dann auf die vorigen Fälle zurückführt —, sondern es kann auch der eine ein Strudelpunkt, der andere ein Knotenpunkt sein. Der Verlauf der Integralkurven ist ähnlich dem der Figur 9; um den Knotenpunkt winden sich nämlich auch Spiralen, die von einem Grenzcykel eingeschlossen sind, wie folgendes einfache Beispiel zeigt, in dem statt der Ellipse ein Parallelenpaar, statt der andern Singularitätenkurve ein Paar sich kreuzender Geraden genommen ist:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x\left(\frac{x}{6} + \frac{y}{2} - 1\right)}{y^2 - 1}.$$

Es ist

$x = 0, \quad y = 1$ ein Wirbelpunkt,

$x = 0, \quad y = -1$ } sind Sattelpunkte,
$y = 1, \quad x = 3$ }

$y = -1, \quad x = 9$ ein Knotenpunkt.

Den Kurvenverlauf stellt man fest mit Hilfe der Gleichung der orthogonalen Trajektorien

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y^2 - 1}{x\left(\frac{x}{6} + \frac{y}{2} - 1\right)},$$

die die nämlichen Singularitäten wie die vorige Gleichung hat, nur an Stelle des Wirbelpunktes einen Knotenpunkt. Da nun $y = \pm 1$ und $x = 0$ Integralkurven sind, erkennt man leicht, daß die Differentialgleichung ein Richtungsfeld liefert, das qualitativ dem der Figur 8 gleicht. Daraus folgt, daß der Kurvenverlauf der Ausgangs-Differentialgleichung der der Figur 9 sein muß, da diese die orthogonalen Trajektorien von Figur 8 darstellt. Der Unterschied ist der, daß hier Spiralen in einen Knotenpunkt hineinlaufen.

c) Der gleiche Fall $c = 2$, $n = 1$, $f = 1$ kann natürlich auch bei zwei Hyperbeln als Singularitätenlinien vorkommen. Doch ist hier, wie wir auf p. 142 gesehen haben, noch eine Reihe von weiteren Möglichkeiten, nämlich das Auftreten von einem oder 3 Sattelpunkten unter den 4 Singularitäten, während wir bisher immer $c = 2$ hatten. Um diese Fälle zu finden, wollen wir uns die Konstanten der Differentialgleichung derart variiert denken, daß wir anstatt der Hyperbeln immer das Asymptotenpaar nehmen. Da es sich nun für uns nur darum handelt, für die p. 142 unter I c aufgestellten Singu-

laritätenverteilungen die Typen des Kurvenverlaufs zu finden, können wir uns an noch speziellere Gleichungen halten. Es genügt, wie wir sehen werden, die Gleichungen

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}\,\frac{b_{12}x + b_{22}y - b_{20}}{a_{11}x + a_{12}y - a_{10}} \tag{1}$$

und die Gleichung ihrer orthogonalen Trajektorien

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}\,\frac{a_{11}x + a_{12}y - a_{10}}{b_{12}x + b_{22}y - b_{20}}$$

zu diskutieren, um alle Fälle zu erhalten bis auf einen (doch siehe p. 156).

Diese Gleichungen lassen sich mit einfachen Rechnungen erledigen, während die allgemeine Gleichung Schwierigkeiten machen würde.

Was zunächst die erste dieser Gleichungen anlangt, so ist ihr Verhalten im Unendlichen gegeben durch

$$\frac{y(b_{12}x + b_{22}y)}{x(a_{11}x + a_{12}y)} - \frac{y}{x} = 0$$

und die singulären Punkte liegen demnach in den Richtungen

$$y = 0, \quad x = 0 \quad \text{und} \quad y = \frac{a_{11} - b_{12}}{b_{22} - a_{12}}\,x.$$

Weiter habe ich die Kriterien für die Punkte im Endlichen anzugeben:

Es ist der Punkt

1) $$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

charakterisiert durch

$$\delta = a_{10}b_{20}, \quad \Delta = (a_{10} - b_{20})^2,$$

2) $$\begin{cases} y = 0 \\ x = \frac{a_{10}}{a_{11}} \end{cases}$$

durch

$$\delta = a_{10}a_{11}(a_{10}b_{12} - b_{20}a_{11}),$$

$$\Delta = (a_{10}b_{12} - b_{20}a_{11} - a_{10}a_{11})^2,$$

3) $$\begin{cases} x = 0 \\ y = \frac{b_{20}}{b_{22}} \end{cases}$$

durch

$$\delta = b_{20} b_{22} (a_{10} b_{20} - a_{10} b_{22}),$$
$$\Delta = (a_{12} b_{20} - a_{10} b_{22} - b_{20} b_{22})^2,$$

4)
$$x = \frac{\begin{vmatrix} b_{22} b_{20} \\ a_{12} a_{10} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} b_{22} b_{12} \\ a_{12} a_{11} \end{vmatrix}}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} b_{20} a_{10} \\ b_{12} a_{11} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} b_{22} b_{12} \\ a_{12} a_{11} \end{vmatrix}}$$

durch

$$\delta = \begin{vmatrix} b_{20} a_{10} \\ b_{12} a_{11} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_{22} b_{20} \\ a_{12} a_{10} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{11} b_{12} \\ a_{12} b_{22} \end{vmatrix}$$

und

$$\Delta = -4\delta + \left\{ a_{11} \begin{vmatrix} b_{22} b_{20} \\ a_{12} a_{10} \end{vmatrix} + b_{22} \begin{vmatrix} b_{20} a_{10} \\ b_{12} a_{11} \end{vmatrix} \right\}^2.$$

Wie man sieht, können die ersten 3 Punkte entweder Sattelpunkte oder Knotenpunkte sein, aber nicht Strudelpunkte, da stets für sie $\Delta > 0$. Nur für den vierten bietet sich auch die Möglichkeit eines Strudelpunktes. Diese Gleichung enthält also noch nicht die Fälle, in denen 2 oder 3 Strudelpunkte auftreten. Wir werden deshalb, wie gesagt, noch die Gleichung der orthogonalen Trajektorien betrachten. Aber auch mittelst dieser ist es mir nicht gelungen, ein Beispiel für $f = 3$, $c = 1$ zu finden, obwohl ich vermute, daß dieser Fall auch möglich ist, was ich aber nicht beweisen kann.

Zunächst will ich nun die durch die Gleichung (1) auf p. 155 gebotenen neuen Typen an speziellen Beispielen vorführen, wobei ich die schon früher besprochenen Fälle mit 2 Sattelpunkten fortlasse.

$= 3,\ n = 1,$
$n' = 3.$ Die Gleichung

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y(y + 2x + 1)}{-x(x + 2y - 1)}$$

hat in

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

einen Knotenpunkt, in

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = -1 \end{cases}, \quad \begin{cases} y = 0 \\ x = +1 \end{cases}, \quad \begin{cases} y = +1 \\ x = -1 \end{cases}$$

Sattelpunkte.

Die Knotenpunkte im Unendlichen liegen in den Richtungen

$$y = 0, \quad x = 0, \quad y = -x.$$

Die Geraden

$$x = 0, \quad y = 0 \quad \text{und} \quad y = -x$$

sind Integralkurven, und zwar läuft jede derselben durch einen Sattel*punkt*. Außerdem geht durch jeden Sattelpunkt noch eine Kurve,

die 2 Knotenpunkte des Unendlichen verbindet, wie es die Figur 10 zeigt. Es kann nicht etwa eine dieser Kurven im Mittelpunkt enden, weil das dem Satze von p. 146 widerspricht. Zwischen diesen Doppelpunktskurven laufen dann die Integralkurven wieder von Knotenpunkt zu Knotenpunkt.

Die gleichen Singularitäten, wie die vorige Differentialgleichung, hat $c=3, f=\frac{}{n'=3}$.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y(y+2x-1)}{-x(x+2y-1)},$$

jedoch an Stelle des Knotenpunkts im Endlichen einen Strudelpunkt. Allerdings sind sie anders verteilt. Es sind

$$\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}, \quad \begin{cases} y=0 \\ x=1 \end{cases}, \quad \begin{cases} x=0 \\ y=1 \end{cases}$$

Sattelpunkte, während

$$\begin{cases} x=\frac{1}{3} \\ y=\frac{1}{3} \end{cases}$$

Strudelpunkt ist, und zwar hier speziell ein Wirbelpunkt. Im Unendlichen haben wir dasselbe Verhalten wie vorher.

Neben $x=0$ und $y=0$ ist dieses Mal $x+y-1=0$ Integralkurve. In dem von diesen Geraden gebildeten Dreieck, das die Sattelpunkte zu Ecken hat, sind in diesem speziellen Fall alle Kurven geschlossen. Allgemeiner ist es, wenn hier sich Spiralen befinden, die das Dreieck zum Grenzcykel haben. Alle übrigen Integralkurven verbinden zwei Knotenpunkte des Unendlichen (Figur 11).

Wir gehen jetzt zu dem Vorkommen eines einzigen Sattelpunktes im Endlichen über.

Die Gleichung $c=1, n=$ $c'=2, n'=$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y(y+2x-1)}{x(x+2y-1)}$$

hat die singulären Punkte im Endlichen an denselben Stellen, wie die vorige. Es sind aber durch den Vorzeichenwechsel der rechten Seite aus den drei Sattelpunkten Knotenpunkte, aus dem Wirbelpunkt ein Sattelpunkt geworden.

Die Sattelpunkte im Unendlichen liegen in $\begin{cases} z=0 \\ x=0 \end{cases}, \begin{cases} z=0 \\ y=0 \end{cases}$;

der Knotenpunkt in $\begin{cases} z=0 \\ y=x \end{cases}$.

Die Geraden $y=0$, $x=0$, $y=x$ sind Integralkurven, und zwar ist $x=y$ die eine Kurve durch den Sattelpunkt. Die zweite Kurve

durch diesen kann nach p. 146 nur die Knotenpunkte $\begin{cases} x=0 \\ y=1 \end{cases}$ u

$\begin{cases} y=0 \\ x=1 \end{cases}$ verbinden. Im übrigen verlaufen die Kurven wieder imm

von Knotenpunkt zu Knotenpunkt (Figur 12).

3, $c=1$, $c'=1$. Im allgemeinen Fall können statt der 6 Singularitäten im

endlichen auch nur 2 Sattelpunkte auftreten.

1, $n=2$, 1, $c'=2$, $'=1$. Ein wesentlich anderes Bild ist durch die ganz ähnliche Diffe

tialgleichung:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y(y+2x+1)}{x(x+2y-1)}$$

gegeben. Die singulären Punkte im Unendlichen sind die nämlic

wie in Figur 12.

Im Endlichen dagegen ist jetzt $\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$ Sattelpunkt, $\begin{cases} y= \\ x= \end{cases}$

Wirbelpunkt, $\begin{cases} x=0 \\ y=-1 \end{cases}$ und $\begin{cases} y=0 \\ x=1 \end{cases}$ Knotenpunkte.

$x=0$ und $y=0$ sind die Integralkurven durch die Dop

punkte. Die geschlossenen Kurven um den Wirbelpunkt füllen e

Quadranten vollständig aus. Sonst hat man nur wieder die Kno

punkte zu verbinden.

Übrigens ist die Gerade $x-y-1=0$ auch Integralkurve.

Weitere Typen bekommen wir aus der Gleichung der orth

nalen Trajektorien:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{a(a_{11}x + a_{12}y - a_{10})}{y(b_{12}x + b_{22}y - b_{20})}.$$

Ich schicke wieder die allgemeinen Kriterien der singul

Punkte den speziellen Beispielen voraus. Es ist bestimmt

1) $$\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$$

durch

$$\delta = a_{10}b_{20}, \quad \Delta = -4a_{10}b_{20},$$

2) $$\begin{cases} y=0 \\ x=\frac{a_{10}}{a_{11}} \end{cases}$$

durch

$$\delta = a_{10}a_{11}\begin{vmatrix} a_{10} & b_{20} \\ a_{11} & b_{12} \end{vmatrix}$$

und

$$\Delta = -4\delta + (a_{12}a_{10})^2,$$

3)
$$\begin{cases} x = 0 \\ y = \dfrac{b_{20}}{b_{22}} \end{cases}$$

durch

$$\delta = b_{20}b_{22} \begin{vmatrix} a_{12}b_{22} \\ a_{10}b_{20} \end{vmatrix}$$

$$\Delta = -4\delta + (b_{20}b_{12})^2,$$

4)
$$x = \frac{\begin{vmatrix} b_{22}b_{20} \\ a_{12}a_{10} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} b_{22}b_{12} \\ a_{12}a_{11} \end{vmatrix}}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} b_{20}a_{10} \\ b_{12}a_{11} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} b_{22}b_{12} \\ a_{12}a_{11} \end{vmatrix}}$$

durch

$$\delta = \begin{vmatrix} b_{22}b_{20} \\ a_{12}a_{10} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_{20}a_{10} \\ b_{12}a_{11} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{11}b_{12} \\ a_{12}b_{22} \end{vmatrix}$$

und

$$\Delta = -4\delta + \left\{ b_{12} \begin{vmatrix} b_{20}a_{10} \\ b_{12}a_{22} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} b_{22}b_{20} \\ a_{12}a_{11} \end{vmatrix} \right\}^2.$$

Die Gleichung dritten Grades, die die singulären Punkte im Unendlichen bestimmt, kann hier sowohl eine wie 3 reelle Wurzeln haben.

Wir wollen nun der Reihe nach die Beispiele von p. 156 bis p. 158 durchgehen und ihre orthogonalen Trajektorien betrachten. Die beiden ersten liefern nichts Neues; denn die Orthogonalkurven von Figur 10 liefern ganz das Bild der Figur 11, nur daß die endlichen Singularitäten etwas verschoben sind; und natürlich ebenso umgekehrt.

Anders ist es mit den Orthogonalkurven von Figur 12 gegeben durch $f=2, c=1, n=1, c'=1.$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-x(x+2y-1)}{y(y+2x+1)}.$$

Es erweist sich

$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ als Sattelpunkt,

$\begin{cases} y = 0 \\ x = 1 \end{cases}$ und $\begin{cases} x = 0 \\ y = -1 \end{cases}$ als Strudelpunkte,

$\begin{cases} x = -1 \\ y = +1 \end{cases}$ als Knotenpunkt.

Im Unendlichen liegen auf $y = -x$ zwei Sattelpunkte.

$y = -x$ ist die eine Integralkurve durch den Doppelpunkt $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$.

Der andere Zweig kann nicht in den Knotenpunkt laufen, weil wir sonst wieder mit dem Satz von p. 146 in Widerspruch kämen. Er muß sich also beiderseits um die Strudelpunkte winden. Das Gleiche gilt von den Kurven, die durch den Knotenpunkt gehen, da eben keine anderen Singularitäten vorhanden sind. So kommt man zur Figur 14. Im allgemeinen Fall können auch hier 6 Singularitäten im Unendlichen auftreten.

$=2, f=1,$
$=1, \sigma'=1.$

Es bleibt uns noch zu untersuchen

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}\frac{x+2y-1}{y+2x-1}.$$

Für diese Gleichung ist

$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ Wirbelpunkt,

$\begin{cases} y = 0 \\ x = 1 \end{cases}$ und $\begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases}$ sind Knotenpunkte,

$\begin{cases} y = \frac{1}{3} \\ x = \frac{1}{3} \end{cases}$ Sattelpunkt.

Im Unendlichen liegen auf $y = -x$ Sattelpunkte. Wenn man noch berücksichtigt, daß die Kurven orthogonal sein müssen zu der Figur 10, so erhält man den durch Figur 15 gegebenen Verlauf.

II) 2 Singularitäten im Endlichen.

Schneiden sich die Singularitätenkurven nur in 2 reellen Punkten, die wir wieder im Endlichen annehmen können, da der entgegengesetzte Fall sich auf diesen zurückführen läßt (cf. p. 143), so kehren zunächst im wesentlichen die Figuren wieder, die wir für einen Kegelschnitt und eine Gerade als Singularitätenlinien erhalten haben, nämlich wenn der eine Punkt ein Sattelpunkt, der andere ein Knoten- oder Strudelpunkt ist (IIb der Tabelle auf p. 142). Ich gehe nicht näher darauf ein und verweise auf die Figuren 4 bis 6, die allerdings im Unendlichen abzuändern sind, da wir hier nur Singularitäten erster Art haben und sich immer gleichartige diametral gegenüberliegen.

Es kommt aber ein neuer Fall hinzu, der für jene einfachere Gleichung nicht möglich war. Sind nämlich beide Singularitätenlinien Hyperbeln und schneiden sich diese in nur 2 reellen Punkten, die auf verschiedenen Zweigen liegen, so müssen diese Punkte nach

dem Poincaré'schen Satze p. 138 beide Sattelpunkte oder beide Knotenpunkte resp. Strudelpunkte sein. Wir bekommen alle Möglichkeiten bis auf den Fall $n = 1$, $f = 1$, den wir nachher besonders behandeln wollen, durch die Differentialgleichung

$$\frac{dy}{dx} = \frac{axy}{x^2 - y^2 - 1} \tag{1}$$

und die zugehörige Gleichung der orthogonalen Trajektorien

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x^2 - y^2 - 1}{axy}. \tag{2}$$

Statt der einen Hyperbel ist also das Koordinatenkreuz als Singularitätenlinie genommen; a ist eine Konstante.

Beschäftigen wir uns zunächst mit der ersten dieser Gleichungen, so ergibt die einfache Diskussion, daß $y = 0$, $x = \pm 1$ Knotenpunkte sind für $a > 0$, Sattelpunkte für $a < 0$.

Im Unendlichen liegen Singularitäten auf $y = 0$ und $y = \pm\sqrt{1 - ax}$ und zwar ist für

$a > 1$	$0 < a \leqq 1$	$a < 0$
$y = 0$ Sattelpunkt	Knotenpunkt	Knotenpunkt
$y = \pm\sqrt{1 - ax}$ imaginär	Sattelpunkte	Knotenpunkte

Ich führe die einzelnen Fälle in folgenden speziellen Beispielen vor.

1) Den Fall zweier Knotenpunkte im Endlichen und zweier Sattelpunkte im Unendlichen veranschaulicht das Beispiel $n=2, c'=$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2xy}{x^2 - y^2 - 1},$$

das wir bereits zu anderem Zweck auf p. 147 behandelt haben (cf. Figur 3).

2) Ganz ähnlich ist der Kurvenverlauf bei $n=2, c'=n'=1.$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{1}{2}xy}{x^2 - y^2 - 1},$$

nur daß im Unendlichen noch zwei Sattelpunkte und zwei Knotenpunkte hinzukommen. Von den beiden Knotenpunkten in $\begin{cases} y = 0 \\ x = \pm 1 \end{cases}$ gehen Kurven nach den 4 Sattelpunkten im Unendlichen. Sonst verlaufen die Integralkurven von Knotenpunkt zu Knotenpunkt. $y = 0$ ist Integralkurve (Figur 16).

, $n'=3$. 3) 2 Sattelpunkte im Endlichen und 6 Knotenpunkte im Unendlichen hat die Gleichung

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2xy}{x^2 - y^2 - 1}.$$

Eine Kurve durch die Sattelpunkte ist die Gerade $y = 0$. Die andern Zweige verbinden je zwei Knotenpunkte auf $y = \pm\sqrt{3}x$, und zwar ist dies nur so möglich, wie es in der Figur 17 gezeichnet ist, da man sonst mit dem nun schon so oft benutzten Satz auf p. 146 in Widerspruch kommt. Im übrigen hat man lauter Verbindungslinien zwischen zwei Knotenpunkten.

Weitere Möglichkeiten gibt die orthogonale Differentialgleichung

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x^2 - y^2 - 1}{axy}.$$

Ist $a > 0$, so hat man 2 Wirbelpunkte, ist $a < 0$, so hat man 2 Sattelpunkte im Endlichen.

Die singulären Punkte im Unendlichen liegen auf $x = 0$ und $y = \pm\frac{x}{\sqrt{1-a}}$, und zwar ist für,

$a > 1$		$0 < a < 1$	$a < 0$
$x = 0$	Sattelpunkt	Knotenpunkt	Knotenpunkt
$y = \pm\frac{x}{\sqrt{1-a}}$	imaginär	Sattelpunkte	Knotenpunkte

Ich gebe wieder Beispiele, und zwar will ich der Reihe nach a dieselben Werte geben, wie bei der vorigen Differentialgleichung (1) (p. 161).

$=2,\ c'=1.$ 1)
$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x^2 - y^2 - 1}{2xy}$$

gibt die Schar der Orthogonalkreise zu dem Kreisbüschel der Figur 3. $x = 0$ ist Integralkurve und trennt die beiden Wirbel (Figur 18).

2) Bei

$=2,\ c'=2,$ $n'=1.$
$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x^2 - y^2 - 1}{\frac{1}{2}xy}$$

treten statt der zwei Sattelpunkte deren vier auf im Unendlichen in den Richtungen $y = \pm\sqrt{2}x$. Die Verbindungslinien je zweier derselben schließen das Gebiet der Wirbel ab gegen die Kurven, die zwischen den beiden Knotenpunkten auf $x = 0$ verlaufen (Figur 19).

3) Die Differentialgleichung

$=2,\ n'=3.$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 - y^2 - 1}{2xy}$$

it 2 Sattelpunkte im Endlichen und 6 Knotenpunkte im Unendlichen, enau wie die orthogonale Differentialgleichung p. 162, und doch ist r Kurvenverlauf ein ganz anderer. Er ist dadurch bestimmt, daß e Kurven orthogonal sein müssen zu denen der Figur 17.

Damit hätten wir das Richtungsfeld für alle Singularitäten- $n=1, f=1.$
rteilungen gefunden, die unter II a der Tabelle auf p. 142 auf-führt sind, bis auf den Fall $n=1, f=1$. Diesen konnten wir rch Gleichungen der bisher besprochenen Form nicht erhalten, da i ihnen die Singularitätenlinien symmetrisch zum Mittelpunkt lagen d daher 2 gleichartige Singularitäten lieferten. Dagegen hat die $n=1, f=1, c'=2, n'=1$
eichung

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{(x-2)^2 - (y-2)^2 - 5}{\frac{1}{2}xy}$$

$\begin{cases} x=5 \\ y=0 \end{cases}$ einen Strudelpunkt und in $\begin{cases} x=-1 \\ y=0 \end{cases}$ einen Knotenpunkt.

Im Unendlichen liegen auf $x=0$ 2 Knotenpunkte, auf $y=\pm\sqrt{2}x$ Sattelpunkte. Kurz, man erhält ganz das Bild der Figur 18, nur B man im Endlichen, wie gesagt, einen Strudelpunkt und einen notenpunkt hat, um die sich Spiralen winden.

Auch hier ist es möglich, daß man statt der 6 Singularitäten i Unendlichen nur 2 Sattelpunkte findet. Man hat dann das Ana-gon zur Figur 19.

III. Keine Singularitäten im Endlichen.

Für die beiden hier möglichen Fälle (cf. p. 142) hat Poincaré hon charakteristische Beispiele gegeben, und ich kann auf diese ver-eisen. (Journal de Mathématiques 1882 p. 274 ff.).

Schließlich haben wir noch den Verlauf der Integralkurven für $x Y_2 - y X_2 \equiv 0$ en Fall festzustellen, daß

$$x Y_2 - y X_2 = 0$$

entisch erfüllt ist.

Wir fanden dafür auf p. 145.

1) Die Möglichkeit, daß im Endlichen 2 Knotenpunkte und ein $n=2, c=1.$
attelpunkt sich befinden, während die Kurven im Unendlichen überall gulär verlaufen. Ein Beispiel dafür ist

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y(y+x-1)}{x(x+y+1)}.$$

Der Sattelpunkt liegt im Koordinatenanfang, die Knotenpunkte $\begin{cases} x=0 \\ y=1 \end{cases}$ und $\begin{cases} y=0 \\ x=-1 \end{cases}$. Die Koordinatenachsen sind Integral-urven.

Der Äquator ist, wie wir auf p. 144 gesehen haben, nicht Integralkurve, wird vielmehr von den Integralkurven geschnitten.

Nach diesen Angaben ergibt sich das Bild des Richtungsfeldes wie es in der Figur 21 gezeichnet ist.

2) Punkte im Unendlichen konnten (cf. p. 144) dadurch auftreten, daß noch einer der drei endlichen Schnittpunkte der Singularitätenlinien ins Unendliche rückt.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2 + xy + x + 2y}{x^2 + xy + 3x + 2y}$$

ist ein Beispiel dafür, daß der Sattelpunkt im Unendlichen liegt und und zwar auf $x = -y$.

Die Knotenpunkte im Endlichen liegen im Koordinatenanfang und in $x = -\frac{4}{3}$, $y = -\frac{8}{3}$.

Die Kurven durch den Sattelpunkt sind $x = -y$ und $x + y + 4 = 0$. Zwischen ihnen laufen die Kurven von Knotenpunkt zu Knotenpunkt, außerhalb von dem Knotenpunkt zum Äquator, der natürlich auch hier nicht Integralkurve sein kann (Figur 22).

$f=1$. 3) Der zweite Hauptfall war der, daß als einzige Singularität ein Strudelpunkt im Endlichen auftritt.

Bei

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2 + xy + x + y}{x^2 + xy + x - y}$$

liegt er im Anfangspunkt. Die Gerade $y + 1 = 0$ ist Integralkurve und Grenzcykel; es nähern sich ihm von beiden Seiten die Spiralen asymptotisch an.

Am besten übersieht man den Verlauf auf der Kugel: um den Nordpol und Südpol laufen Spiralen, die sich dem Kreise $y + 1 = 0$ asymptotisch annähern.

4) Schließlich konnte auch dieser Strudelpunkt ins Unendliche rücken.

In

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2 + xy + 1}{x^2 + xy + 1}$$

waren auf $x = -y$ zwei Wirbelpunkte.

Man hat also nur geschlossene Integralkurven auf der ganzen Kugel; betrachtet man nur die Ebene, so verlaufen die Kurven vom Unendlichen ins Unendliche. $x = y$ ist ein Integral.

Bei

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2 + xy + x + y + 1}{x^2 + xy + x + y + 1}$$

winden sich um dieselben singulären Stellen im Unendlichen die Integralkurven spiralig. $x = y$ ist ein Grenzcykel.

Singularitätenlinien von höherem Grade.

§ 1. Beispiel aus der Hydrodynamik.

Zunächst möchte ich ein Beispiel aus der Hydrodynamik anführen, das auf eine Differentialgleichung unserer Art mit Singularitätenlinien von höherem Grade hinausläuft. Ich lehne mich dabei an eine Vorlesung über Hydrodynamik von Herrn Geheimrat Klein an, die ich im W.-S. 1899/1900 hörte.

In einer unendlichen Flüssigkeit, die in einer Ebene ausgebreitet ist, befinden sich zwei Wirbel mit entgegengesetzt gleichen Intensitäten $\pm m$ an den Stellen $\begin{cases} x = 0 \\ y = +c \end{cases}$ und $\begin{cases} x = 0 \\ y = -c \end{cases}$. Die Geschwindigkeitskomponenten findet man zu

$$\frac{dx}{dt} = \frac{m}{\pi}\left(\frac{-(y-c)}{x^2+(y-c)^2} + \frac{y+c}{x^2+(y+c)^2}\right)$$

und

$$\frac{dy}{dt} = \frac{m}{\pi}\left(\frac{x}{x^2+(y-c)^2} - \frac{x}{x^2+(y+c)^2}\right).$$

Die Wirbel erteilen einander eine Geschwindigkeit $\frac{m}{2\pi c}$ in der Richtung der X-Achse. Gibt man der ganzen Flüssigkeitsmasse eine Geschwindigkeit $\frac{-m}{2\pi c}$ in derselben Richtung, so wird die Bewegung stationär. Es fragt sich nun: „Wie verlaufen die Strömungskurven?“ Ihre Differentialgleichung läßt sich auf die Form bringen

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4xyc}{4c^4 + 4c^2x^2 - (x^2+y^2+c^2)^2}.$$

Man kann die Integration dieser Gleichung nun wirklich ausführen. Das wollen wir aber nicht tun, sondern nach der in dieser Arbeit immer angewandten Methode verfahren, also von den Singularitäten ausgehen.

An den Stellen $\begin{cases} x = 0 \\ y = \pm c \end{cases}$ befinden sich, wie wir wissen, Wirbelpunkte. Außerdem hat man in $\begin{matrix} y = 0 \\ x = \pm c \end{matrix}$ zwei Sattelpunkte.

Die Transformation mittelst $x = \frac{1}{z}$, $y = \frac{t}{z}$ lehrt, daß im Unendlichen auf $y = 0$ zwei Knotenpunkte liegen.

$y = 0$ ist Integralkurve durch die Doppelpunkte. Die anderen Zweige durch diese können nicht in die Knotenpunkte laufen, weil

das dem Satze auf p. 146 widersprechen würde. Es muß also eine geschlossene Kurve durch die Sattelpunkte gehen, die das Wirbelgebiet abschließt. Außerhalb laufen die Kurven von Knotenpunkt zu Knotenpunkt. Wir erhalten also ganz das Bild der Figur 9, wenn wir diese noch um 45^0 drehen.

Das Resultat faßt Herr Klein zusammen, wie folgt:

„Bei der stationären Bewegungsform bildet sich um die beiden Wirbelfäden herum ein Wirbelkörper, der an Ort und Stelle bleibt und nur eine innere Zirkulation darbietet, und nun strömt die übrige Flüssigkeit um diesen Körper herum, als wenn es ein in der Flüssigkeit ruhender starrer Körper wäre."

§ 2. Weitere Beispiele.

Die Beispiele von pp. 152 u. 153 lassen sich ohne Schwierigkeit in gewisser Weise verallgemeinern. Wir wollen

1. Die Gleichung

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y(y^2-1)(y^2-2^2)\cdots(y^2-n^2)}{x(x^2-1)(x^2-2^2)\cdots(x^2-n^2)}$$

diskutieren.

Die Singularitätenlinien bestehen aus Parallelen zu den Koordinatenachsen, die sämtlich auch Integralkurven sind. Die Schnittpunkte des entstehenden Netzes sind immer abwechselnd Knotenpunkte und Sattelpunkte. Die Anzahl der Knotenpunkte im Endlichen ist daher

$$1 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^{n+1},$$

die der Sattelpunkte

$$2^2 + 2^3 + \cdots + 2^{n+1}.$$

Im Unendlichen liegen vier Sattelpunkte in den Richtungen $x-y=0$ und $x+y=0$ und vier Knotenpunkte in den Richtungen $x=0$ und $y=0$.

Die Integralkurven verlaufen einfach überall von Knotenpunkt zu Knotenpunkt. Die Figur 23 ist gezeichnet für $n=2$. Das Integral der Gleichung läßt sich natürlich auch sofort analytisch hinschreiben.

2. Auch die Gleichung der orthogonalen Trajektorien läßt sich leicht behandeln:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x(x^2-1)(x^2-2^2)\cdots(x^2-n^2)}{y(y^2-1)(y^2-2^2)\cdots(y^2-n^2)}.$$

An die Stelle der Knotenpunkte treten hier überall Wirbelpunkte, während die Sattelpunkte Sattelpunkte bleiben.

Im Unendlichen sind keine Singularitäten, da die Gleichung $^{n+2} + y^{2n+2} = 0$ keine reellen Wurzeln hat.

Den Verlauf der Integralkurven zeigt die Figur 24.

§ 3. Bemerkungen zu Beispielen Poincarés.

Zum Schluß möchte ich auf ein geringes Versehen in den Poincaréschen Arbeiten hinweisen. Poincaré hat nämlich nicht beachtet, daß die mehrfach genannte Identität

$$\frac{Y^2}{X^2} - \frac{y}{x} \equiv 0$$

manchen seiner Beispiele erfüllt ist, und daß demgemäß der Äquator nicht Integralkurve ist (cf. p. 144) und also auch nicht Grenzcykel sein kann.

Diese Beispiele sind alle von dem Typus

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{\partial F}{\partial y} C + \frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial x} C - \frac{\partial F}{\partial y}},$$

Fall, der sich besonders leicht diskutieren läßt, weil die Grenzkeln analytisch angebbar sind. Dabei sind F und C ganze rationale nktionen in x und y.

Man kann z. B. wählen

$$F = x^2 + y^2.$$

nn ist tatsächlich die obige Identität erfüllt, wie man leicht nachchnet. Damit dies nicht eintritt, sonst aber alles ungeändert bleibt, ßte man etwa schreiben

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{\partial F}{\partial y} C + \frac{\partial F}{\partial x} D}{\frac{\partial F}{\partial x} C - \frac{\partial F}{\partial y} D},$$

) D auch eine rationale Funktion in x und y ist von demselben ade wie C.

Ein spezielles Beispiel möge das noch erläutern, das nebenbei rch die große Zahl der Grenzcykeln interessant ist.

Es sei:

$$C = (x^2 + y^2 - r_1^2)(x^2 + y^2 - r_2^2) \cdots (x^2 + y^2 - r_n^2)$$
$$D = (x^2 + y^2 + r_1^2)(x^2 + y^2 + r_2^2) \cdots (x^2 + y^2 + r_n^2).$$

ann hat man sowohl für Gleichung (1) wie für Gleichung (2) im ullpunkt einen Strudelpunkt, und zwar ist dies die einzige vorommende singuläre Stelle. Um den Strudelpunkt herum liegen n

Grenzcykeln, die konzentrischen Kreise mit den Radien r_1, $r_2 \cdots r_n$ und zwischen denselben verlaufen die Integralkurven spiralig. Wa die Ableitung dieses Resultates anbetrifft, so verweise ich auf die Ab handlung von Poincaré. Im Falle (2) ist nun aber der unendlic ferne Kreis auch Integralkurve und Grenzcykel, während im Falle (die Integralkurven ihn senkrecht schneiden. Dieser letzte Fall ist Figur 25 dargestellt für $n = 2$.

2. In einem anderen Beispiel setzt Poincaré

$$C = F = (x^2 + y^2)^2 + x^2 - y^2 + \text{const.}$$

Man überzeugt sich leicht, daß auch hier die Identität erfüllt i daß also wieder der Äquator nicht Grenzcykel sein kann, vielme alle Integralkurven, die ins Unendliche laufen, ihn senkrecht schneid

Der Äquator ist demnach nicht Grenzcykel in den Be spielen. Journal de Mathématiques 1882

Kapitel VII p. 279 Beispiel 4,
„ „ p. 281 „ 5,
„ IX p. 292 f. „ 1, 2 und 3.

Inhaltsverzeichnis.

Einleitung:

Mikroskopische und makroskopische Betrachtungsweise der Integralkurven :

Kapitel I.

Verteilung der Singularitäten.

§ 1. Allgemeine Resultate Poincaré's . . . . . :
§ 2. Die singulären Punkte von

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b_{11}x^2 + 2b_{12}xy + b_{22}y^2 + b_{10}x + b_{20}y + b_{00}}{a_{20}x + b_{20}y + a_{00}} \quad . \quad . \quad . \quad .$$

§ 3. Die singulären Punkte von

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b_{11}x^2 + 2b_{12}xy + b_{22}y^2 + b_{10}x + b_{20}y + b_{00}}{a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + a_{10}x + a_{20}y + a_{00}} \quad . \quad . \quad . \quad .$$

Kapitel II.

Der Verlauf der Integralkurven.

§ 1. Allgemeines . . . . . :
§ 2. Kurvenverlauf für die Gleichung des § 2 im Kapitel I . . . . . :
§ 3. Kurvenverlauf für die Gleichung des § 3 im Kapitel I . . . . . :

Kapitel III.

Die Singularitätenlinien sind von höherem Grade.

§ 1. Ein Beispiel aus der Hydrodynamik . . . . . :
§ 2. Weitere Beispiele . . . . . :
§ 3. Bemerkungen zu Beispielen Poincaré's . . . . . :

Über die normale Krümmung und die geodätische Torsion der Flächenkurven.

Von P. Franck.

1. Für die geodätische Torsion einer Flächenkurve gilt die Formel[1])

$$\frac{1}{T} = -\frac{1}{ds^2}\begin{vmatrix} a & da & dx \\ b & db & dy \\ c & dc & dz \end{vmatrix}.$$

Nun ist:

$$\begin{vmatrix} a & da & dx \\ b & db & dy \\ c & dc & dz \end{vmatrix}^2 = \sum da^2 \sum dx^2 - \left(\sum da\,dx\right)^2.$$

Daher erhält man:

$$\frac{1}{T} = \mp \sqrt{\frac{\sum da^2}{\sum dx^2} - \left(\frac{\sum da\,dx}{\sum dx^2}\right)^2}.$$

Sind R_1 und R_2 die Hauptkrümmungsradien, und ist R der Krümmungsradius des in der Richtung der Kurventangente gelegten Normalschnittes, so ist[2]):

$$\frac{1}{R} = -\frac{\sum da\,dx}{\sum dx^2}$$

$$\sum da^2 = -\frac{1}{R_1 R_2}\sum dx^2 - \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)\sum da\,dx.$$

Daher wird:

$$\frac{\sum da^2}{\sum dx^2} - \left(\frac{\sum da\,dx}{\sum dx^2}\right)^2 = -\frac{1}{R_1 R_2} + \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)\frac{1}{R} - \frac{1}{R^2}$$

$$= -\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R_1}\right)\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R_2}\right),$$

also

$$\frac{1}{T} = \mp \sqrt{-\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R_1}\right)\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R_2}\right)}. \tag{1}$$

Das ist der von V. Kommerell aufgefundene Satz.[3])

1) Allgemeine Theorie der Raumkurven und Flächen von V. Kommerell und K. Kommerell, Sammlung Schubert XXIX, I. Band, S. 128 und 135.

2) Vergleiche Kommerell, Band II, S. 17, 20 und 22.

3) Archiv der Mathematik und Physik, III. Reihe, 1. Band, S. 116. Vergleiche auch Kommerell, Band I, S. 139.

Ist φ der Winkel, den der zu R gehörige Normalschnitt m
dem zu R_1 gehörigen Normalschnitt bildet, so ist nach dem Sa
von Euler:

$$\frac{1}{R} = \frac{\cos^2\varphi}{R_1} + \frac{\sin^2\varphi}{R_2}. \tag{2}$$

Daher wird:

$$\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R_1}\right)\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R_2}\right) = \left[\frac{\cos^2\varphi - 1}{R_1} + \frac{\sin^2\varphi}{R_2}\right]\left[\frac{\cos^2\varphi}{R_1} + \frac{\sin^2\varphi - 1}{R_2}\right]$$
$$= -\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)^2 \sin^2\varphi \cdot \cos^2\varphi.$$

Demnach kann die Kommerellsche Formel auf die Gestalt gebrac
werden:

$$\frac{1}{T} = \mp\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)\sin\varphi \cdot \cos\varphi = \pm\frac{R_1 - R_2}{R_1 R_2}\sin\varphi\cos\varphi. \tag{3}$$

Setzt man nun:

$$\xi\eta = \pm\frac{R_1 R_2}{R_1 - R_2} \tag{4}$$

und führt durch

$$\xi = r\cos\varphi, \quad \eta = r\sin\varphi$$

Polarkoordinaten ein, so erhält man aus (4)

$$\frac{1}{r^2} = \pm\frac{R_1 - R_2}{R_1 R_2}\sin\varphi \cdot \cos\varphi. \tag{5}$$

Die Gleichung (5) wird identisch mit Gleichung (3), wenn man

$$\frac{1}{r^2} = \frac{1}{T} \tag{6}$$

setzt. Man erhält daher den Satz:

Satz: Die konjugierten gleichseitigen Hyperbeln (4) können s
Indikatrix der geodätischen Torsion der durch einen Flächenpun
gehenden Kurven bezeichnet werden.

Dieser Satz gibt nur eine andere Ausdrucksform für die Form
von Kommerell an. Aus (3) geht hervor, daß die geodätisc
Torsion im 2. und 4. Quadranten das entgegengesetzte Vorzeich
wie im 1. und 3. Quadranten besitzen muß. Welches Vorzeichen
Torsion in jedem einzelnen Quadranten zukommt, bleibt unentschied

2. Nun betrachten wir zwei konjugierte Richtungen, welche
der zu R_1 gehörigen Hauptkrümmungsrichtung die Winkel φ und
bilden. Die Krümmung des Normalschnittes in der ersten Richtu
sei $\frac{1}{R}$ und die geodätische Torsion $\frac{1}{T}$. Die entsprechenden Grö

für die dazu konjugierte Richtung seien $\frac{1}{R'}$ und $\frac{1}{T'}$. Dann ist nach (2):

$$(7) \qquad \frac{R \cdot \cos^2 \varphi}{R_1} + \frac{R \cdot \sin^2 \varphi}{R_2} = \frac{R' \cdot \cos^2 \varphi}{R_1} + \frac{R' \cdot \sin^2 \varphi}{R_2} = 1.$$

Da die Richtungen konjugiert sind, so ist ferner:

$$(8) \qquad \operatorname{tg} \varphi \cdot \operatorname{tg} \varphi' = \frac{\sin \varphi \cdot \sin \varphi'}{\cos \varphi \cdot \cos \varphi'} = -\frac{R_2}{R_1}.$$

Daher kann man setzen:

$$R_1 = \lambda \cdot \cos \varphi \cdot \cos \varphi', \quad R_2 = -\lambda \sin \varphi \cdot \sin \varphi'.$$

Substituiert man das in (7), so erhält man:

$$R\left(\frac{\cos \varphi}{\cos \varphi'} - \frac{\sin \varphi}{\sin \varphi'}\right) = R'\left(\frac{\cos \varphi'}{\cos \varphi} - \frac{\sin \varphi'}{\sin \varphi}\right)$$

$$R \cdot \frac{\cos \varphi \cdot \sin \varphi' - \cos \varphi' \sin \varphi}{\cos \varphi' \cdot \sin \varphi'} = R' \cdot \frac{\cos \varphi' \sin \varphi - \cos \varphi \cdot \sin \varphi'}{\cos \varphi \cdot \sin \varphi}$$

$$(9) \qquad R \cdot \sin \varphi \cdot \cos \varphi = -R' \sin \varphi' \cdot \cos \varphi'.$$

Aus (3) folgt:

$$(10) \qquad T \cdot \sin \varphi \cdot \cos \varphi = T' \cdot \sin \varphi' \cdot \cos \varphi' = \pm \frac{R_1 R_2}{R_1 - R_2}.$$

Aus (9) und (10) ergibt sich:

$$(11) \qquad \frac{R}{T} = -\frac{R'}{T'}.$$

Es gilt also folgender Satz:

Satz: Die Quotienten aus der normalen Krümmung und der geodätischen Torsion sind für zwei konjugierte Kurven in ihrem Schnittpunkt einander gleich, haben aber entgegengesetztes Vorzeichen.

Berichtigung und Ergänzung meiner letzten Arbeit über rotierende Kraftfelder.

Von Edm. Hoppe.

In meiner Arbeit über rotierende Kraftfelder ist in einem, allerdings für den wesentlichen Inhalt jener Arbeit nebensächlichen Satze ein störender Fehler stehen geblieben, worauf Herr Prof. W. König die Freundlichkeit hatte, mich aufmerksam zu machen. In dem letzten Satze auf S. 123 sind nämlich aus Versehen 3 Reihen fortgeblieben und ein Druckfehler nicht korrigiert worden. Der betreffende Satz

muß richtig heißen (wobei das jetzt richtig Gestellte gesperrt i
„Würde also das Kraftfeld nicht an der Rotation teilnehmen,
müßte, da die zum Galvanometer von E und B führenden Dr
keine Kraftlinien schneiden, die elektromotorische Kraft e nahezu
gleichen Ausschlag bewirken, als wenn das Leiterstück ADB fe
tatsächlich beobachtete ich auch nahezu den gleichen Ausschlag,
wenn ACB allein vorhanden war, d. h. für die Stärke des Induktio
stromes war es gleichgültig, ob ACB allein oder ADB mitrotie
nun hatte ich aber in der zitierten Arbeit[1]) durch elekt
metrische Versuche nachgewiesen, daß diese Ansammlu
von e auf dem Ringe F tatsächlich nicht vorhanden w
daraus folgt, daß das ruhende Leiterstück von E über das Galva
meter nach B, welches in beiden Fällen dasselbe war, der Sitz
elektromotorischen Kraft ist."

Soweit die Berichtigung. — Es sei mir gestattet bei dieser
legenheit auf jene elektrometrischen Versuche noch einmal zurü
zukommen, weil sie auch über das damals behandelte Prob
hinaus Anwendungen gestatten und meines Wissens noch n
behandelt sind.

Sei ein magnetisches Kraftfeld gegeben, welches so orientiert
daß es um den Koordinatenanfangspunkt herum in der xy-Eb
nach allen Richtungen symmetrisch zur z-Achse angeordnet
sodaß die Kraftlinien sämtlich senkrecht zur xy-Ebene stehen.
Bewegungen lediglich in der xy-Ebene, werden also alle Kraftlin
senkrecht geschnitten, der für die Induktionsformeln sonst auftrete
$\cos\alpha$ ist also überall $= 1$. Sei nun irgend ein Punkt eines Leiters
betrachtet mit den Geschwindigkeitskomponenten ξ, η, ζ. Das Pote
des Magnetfeldes in dem Punkte xyz sei P. Dann sind bekannt
die durch die Bewegung des Punktes erzeugten Komponenten
elektromotorischen Kraft: $A = \eta\frac{\partial P}{\partial z} - \zeta\frac{\partial P}{\partial y}$; $B = \zeta\frac{\partial P}{\partial x} - \xi$
$C = \xi\frac{\partial P}{\partial y} - \eta\frac{\partial P}{\partial x}$.

Bezeichnet man das Potential der strömenden Elektrizität
den Punkt xyz mit V, so sind die Komponenten des Stromes, w
ich den Punkt nur in der xy-Ebene bewege, also $\zeta = 0$ setze:

$$u = -\lambda\frac{\partial V}{\partial x} + \lambda\eta\frac{\partial P}{\partial z}; \quad v = -\lambda\frac{\partial V}{\partial y} - \lambda\xi\frac{\partial P}{\partial z};$$

$$w = -\lambda\frac{\partial V}{\partial z} + \lambda\left(\xi\frac{\partial P}{\partial y} - \eta\frac{\partial P}{\partial x}\right).$$

---

1) Wiedemanns Annal. Bd. 32, S. 303, 1887.

Den Oberflächenbedingungen wird genügt, wenn

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \eta \frac{\partial P}{\partial z}; \quad \frac{\partial V}{\partial y} = -\xi \frac{\partial P}{\partial z}; \quad \frac{\partial V}{\partial z} = \xi \frac{\partial P}{\partial y} - \eta \frac{\partial P}{\partial x}$$

ist. Führen wir nun $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ als neue Variable ein, da das Feld ja symmetrisch sein soll, und setzen $\beta = \sqrt{\eta^2 - \xi^2}$, so ist

$$\frac{\partial V}{\partial r} = \beta \frac{\partial P}{\partial z}; \quad \frac{\partial V}{\partial z} = -\beta \frac{\partial P}{\partial r};$$

d. h.

$$V = \int \left(\beta \frac{\partial P}{\partial z} dr - \beta \frac{\partial P}{\partial r} dz \right). \tag{1}$$

Hieraus erhält man nach Boltzmann die statische Elementarladung:

$$\varepsilon = -\frac{\varkappa}{4\pi} \cdot \frac{\partial V}{\partial r},$$

wo $\varkappa$ die Dielektrizitätskonstante ist, welche wir für Luft = 1 setzen. Führt der Punkt xyz nun lediglich eine Bewegung im Sinne von r aus, d. h. pendelt er einseitig zwischen zwei Punkten desselben Radius, so ist das Integral = 0.

Lassen wir jetzt das Kraftfeld mit der Winkelgeschwindigkeit φ rotieren, so ändert sich an den Differentialgleichungen nichts, denn wir können diesen Zustand ersetzen durch einen solchen, wo das Kraftfeld ruht und der Punkt xyz, statt in der Richtung des Radius zu schwingen, in einer Zickzacklinie zwischen den beiden Kreisen mit den Radien $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ und $r' = \sqrt{x'^2 + y'^2}$ so bewegt wird, daß $x' = r' \cos \frac{\varphi t}{2}$; $y' = r' \sin \frac{\varphi t}{2}$ ist, wenn t die Schwingungsdauer des Pendels bedeutet. Nach einer ganzen Schwingung erreicht dann der pendelnde Punkt einen Ort $x''y''$, sodaß $x'' = r \cdot \cos \varphi t$, $y'' = r \cdot \sin \varphi t$ ist. Es ändern sich also lediglich die Integrationsgrenzen, und es bleibt

$$V = \varphi \int \left(r \frac{\partial P}{\partial z} dr - r \frac{\partial P}{\partial r} dz \right). \tag{2}$$

Aber die elektrostatische Ladung nach einer Schwingung wird: $\varepsilon = -\varkappa(V' - V'')$, d. h. sie ist dieselbe als ob der Punkt auf dem Kreisbogen von xy nach $x''y''$ fortgeschritten wäre, oder als ob der Punkt in Ruhe geblieben wäre, aber das Kraftfeld rotierte. Wählen wir also den Anfangspunkt der pendelnden Bewegung so weit, daß P daselbst so klein ist, daß ein rotierendes Kraftfeld hier keine meßbare statische Ladung induzieren kann, so wird auch durch das Pendeln des Punktes im Felde keine statische Dauerladung erzeugt, sondern nur eine periodische.

Wenn jetzt in dieses Feld eine auf einen Kreisring um den Koordinatenanfangspunkt mit dem Radius a konzentrierte elektro-

statische Ladung gebracht wird von der Dichte ϱ, so wollen wir das Potential dieser statischen Ladung im Felde mit D bezeichnen und ihm die Indices 0 oder 1 geben, je nachdem der betrachtete Punkt die Koordinaten $x_0 y_0$ und $x_1 y_1$ hat. Bewegt sich nun das materielle Teilchen von $x_0 y_0$ nach $x_1 y_1$, so ist die statische Ladung des abgeleitet gedachten Punktes: $\varepsilon_1 = -\alpha(D_1 - D_0)$, und bei der Rückkehr von $x_1 y_1$ nach $x_0 y_0$ würde entstehen $\varepsilon_2 = -\alpha(D_0 - D_1)$, d. h. so lange D sich stetig ändert, kann bei der Schwingung des Punktes in dem Felde keine dauernde Ladung entstehen. Sobald aber $x_1^2 + y_1^2 = a^2$ wird, tritt Unstetigkeit ein. In dem Augenblick, wo xy den Ring berührt, erhält er eine Ladung, welche dauernd bleibt.

Denken wir uns an die Stelle des Punktes xy eine leitende Kugel gebracht, die an einem feinen Metalldraht von hinreichender Länge isoliert aufgehängt ist und mit einem Elektrometer verbunden ist, so gilt für jeden Punkt dieses Pendels das oben Abgeleitete. Bezeichnet ω die Oberfläche des Ringes, ω_1 die des Pendels mit der Elektrometernadel (resp. Quadranten, je nach der Schaltung), so ist die Gesamtladung auf dem Pendel mit Ableitung: $E = \frac{\varrho \cdot \omega \cdot \omega_1}{\omega + \omega_1}$; und dies wäre eine Dauerladung.

Bei jenen Elektrometerversuchen vom Jahre 1887 hatte ich die elektromotorische Kraft $e = 0{,}001715$ gemessen, würde diese ihren Sitz in dem beweglichen Teil des Leiters gehabt haben, so hätte diese den dort angebrachten Ring geladen, wenn die Achse ableitend zur Erde berührt war, mit einer elektrostatischen Ladung $= 0{,}039$, da die Empfindlichkeit des Elektrometers unter 0,0025 Volt lag, hätte also, wenn eine solche statische Ladung vorhanden war, das Elektrometer einen dauernden Ausschlag zeigen müssen, wenn das Pendel den Ring berührte. Ganz anders liegt die Sache, wenn die elektromotorische Kraft ihren Sitz in dem ruhenden Leiterteile im rotierenden Felde hat, dann ist der Ring und das ihn tragende Gestell unelektrisch. Dann erhält die Kugel beim Schwingen von $x_0 y_0$ bis zum Ringe nach Formel (2) die elektromotorische Kraft $E = V_1 - V_0$. Diese bewirkt auf der Kugel eine statische Ladung von der Dichte ϱ_1; berührt nun die Kugel den Ring, so vermindert sich die Dichte ϱ_1 auf den Betrag $\frac{\varrho_1 \cdot \omega_1}{\omega + \omega_1}$ nach der Berührung. Würde also das periodische Anwachsen der Ladung beim Pendeln der Kugel gegen den Ring meßbar sein, so müßte im Augenblick der Berührung eine Abnahme der Ladung eintreten.

Bericht über das Gesellschaftsjahr 1903/04.

(Zusammengestellt vom Adjunkten Dr. F. Bolte.)

Versammlung am 7. Februar 1903.

(nachträglich zum Gesellschaftsjahr 1902/03.)

Herr Dr. Franck trägt vor „über die imaginäre Berührungs-ansformation von Lie, welche gerade Linien in Kugeln überführt."

Hauptversammlung am 23. Februar 1903.

Der Jahrverwalter, Herr Dr. Repsold, erstattet den Jahresbericht r Gesellschaft über das 213. Jahr ihres Bestehens, nach welchem e Gesellschaft z. Zt. 12 Ehrenmitglieder, 17 auswärtige und 57 ein-imische ordentliche Mitglieder zählt.

Nach dem vom Mitjahrverwalter, Herrn Dr. Schröder, er-atteten Bericht beträgt der Vermögensstand etwa 1470 Mk. Zum evisor wurde Herr Professor Ahlborn erwählt.

An Stelle des satzungsmäßig ausscheidenden Jahrverwalters, errn Dr. Repsold, wurde Herr Professor Dr. Thaer Jahrverwalter.

Das 3. Heft des 4. Bandes der Mitteilungen wird verteilt.

An die Sitzung schloß sich das übliche Stiftungsfestessen.

Versammlung am 14. März 1903.

Nachdem beschlossen war, die nächste Sitzung wegen der Oster-rien nicht am 11., sondern am 18. April abzuhalten, gibt Herr Dr. ainka eine „Übersicht über die Methoden der absoluten Störungen."

Versammlung am 18. April 1903.

Der Vorsitzende macht die Mitteilung von dem Tode des Mit-iedes Wasserbaudirektor Buchheister, dessen Andenken die Ver-mmlung durch Erheben von den Sitzen ehrt. Herr Dr. Büchel, nd. prob. an der Oberrealschule vor dem Holstentore, wird als dentliches Mitglied aufgenommen.

Darauf hält Herr Dr. Pund einen Vortrag über „Bestimmung r Galoisschen Gruppe einer biquadratischen Gleichung", und Herr ofessor Schubert trägt vor über „elementare Berechnung der kadischen Logarithmen auf viele Stellen ohne Benutzung logarith-ischer Reihen."

Versammlung am 9. Mai 1903.

Es wird beschlossen, die Dissertation des Herrn Büchel „Zur pologie der durch eine gewöhnliche Differentialgleichung erster

Ordnung und ersten Grades definierten Kurvenschar“ in den „Mitteilungen der Gesellschaft“ zu veröffentlichen. Darauf gibt Herr Professor Schubert eine Ergänzung zu seinem in der letzten Sitzung gehaltenen Vortrage.

Versammlung am 13. Juni 1903.

Herr Dr. Mainka spricht über „die Methoden der absoluten Störungen, zweiter Teil“ und Herr Dreßler „über die Methoden der Psychophysik.“

Versammlung am 12. September 1903.

Herr Dreßler trägt vor „über die Methoden der Psychophysik, zweiter Teil.“

Versammlung am 17. Oktober 1903.

Vortrag des Herrn Dreßler „über die Methoden der Psychophysik, dritter Teil.“

Versammlung am 14. November 1903.

Nachdem Herr Professor Schubert zur Teilnahme an dem IV. internationalen Mathematiker-Kongreß aufgefordert, welcher vom 8. bis 13. August 1904 in Heidelberg stattfinden wird, hält Herr Büchel einen Vortrag „Zur Topologie der durch eine gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung und ersten Grades definierten Kurvenschar.“

Versammlung am 12. Dezember 1903.

Herr Dr. Franck spricht „über die normale Krümmung und die geodätische Torsion der Flächenkurven.“

Versammlung am 9. Januar 1904.

Es wird beschlossen, das Stiftungsfest am 15. Februar wieder im „Hôtel zum Kronprinzen“ abzuhalten. Darauf hält Herr Dr. Schröder einen Vortrag über „die darstellend-geometrische Behandlung der Theorie der Krümmung.“

Die Bibliothek der Gesellschaft verdankt folgenden Herren wertvolle Zusendungen:

Ahrens, Burr, Falter, Flotow, Kiepert, Krause, Kreusler, Messerschmitt, Münch, v. Piorini, Rüdiger, Schilling, Schilt, Schubert, Strouhal, Studnicka, Thaer, Weyr,

sowie allen Gesellschaften, mit denen die Gesellschaft in Schriftenaustausch steht.

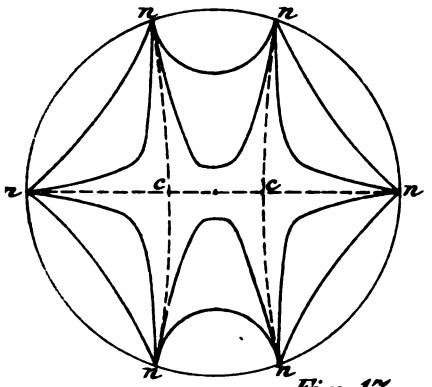


Fig. 17.

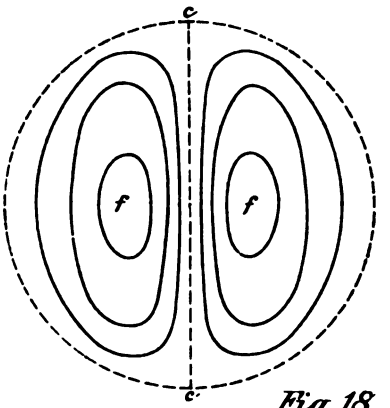


Fig. 18.

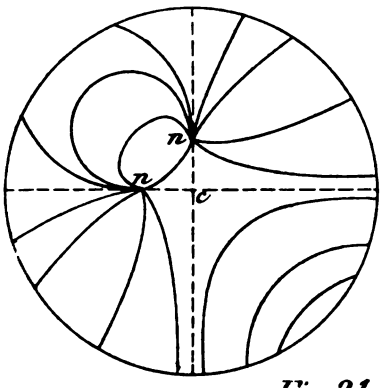


Fig. 21.

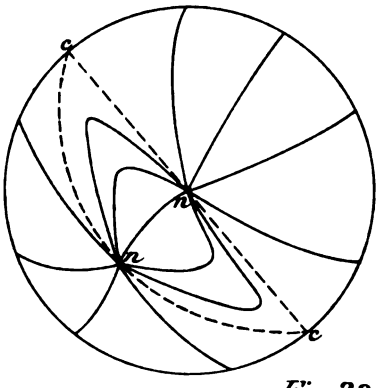


Fig. 22.

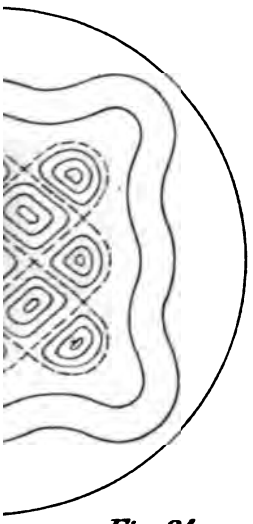


Fig. 24.

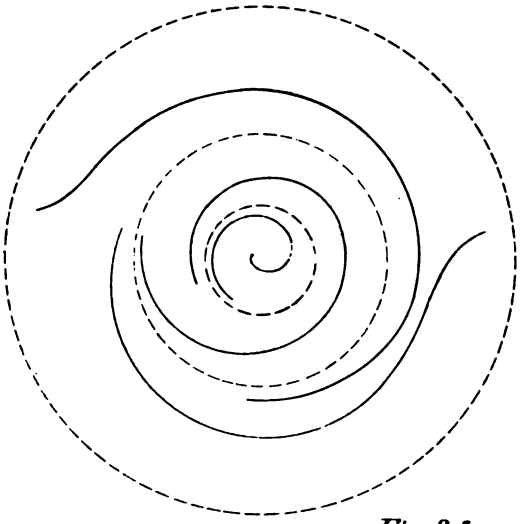


Fig 25.

Lith. u Druck v. Eschebach & Schaefer

MITTHEILUNGEN
ER MATHEMATISCHEN GESELLSCHAFT
IN HAMBURG.

ND IV. № 5. AUSGEGEBEN IM FEBRUAR 1905.

Über die imaginäre Berührungstransformation von Lie, welche gerade Linien in Kugeln überführt.

Von Paul Franck.

§ 1. Die Gleichungen der Transformation.

Die aequationes directrices der Transformation legen wir in der rm zugrunde:

$$\begin{cases} z_1 \cdot z_2 + x_1 - (x_2 + iy_2) = 0 \\ z_1 \cdot (x_2 - iy_2) - y_1 + z_2 = 0. \end{cases}$$

Linienraum R_1 betrachten wir die Gerade

$$x_1 = \alpha_1 \cdot t + a_1, \quad y_1 = \beta_1 \cdot t + b_1, \quad z_1 = \gamma_1 \cdot t + c_1.$$

zt man diese Ausdrücke für $x_1\, y_1\, z_1$ in die Gleichungen (1) ein 1 eliminiert dann t, so erhält man eine Gleichung, welche man der Form schreiben kann:

$$(x_2 - x_2')^2 + (y_2 - y_2')^2 + (z_2 - z_2')^2 = r_2^2,$$

$$\begin{cases} x_2' = \dfrac{\beta_1 + a_1\gamma_1 - c_1\alpha_1}{2\gamma_1}, & iy_2' = \dfrac{-\beta_1 + a_1\gamma_1 - c_1\alpha_1}{2\gamma_1}, \\ z_2' = \dfrac{-\alpha_1 + b_1\gamma_1 - c_1\beta_1}{2\gamma_1}, & r_2 = \mp\dfrac{\alpha_1 + b_1\gamma_1 - c_1\beta_1}{2\gamma_1} \end{cases}$$

e Gerade (2) geht also über in eine Kugel des Kugelraumes R_2. ejenigen Geraden von R_1, welche dem Komplex

$$\alpha_1 + b_1\gamma_1 - c_1\beta_1 = 0$$

gehören, liefern im Raum R_2 Kugeln vom Radius 0. Außerdem noch daran erinnert, daß die Punkte des Raumes R_1 in die inimalgeraden von R_2 übergehen.

Die homogenen Koordinaten der Flächenelemente von R_1 bezeichnen wir mit $x_1 y_1 z_1 X_1 Y_1 Z_1$ und die von R_2 mit $x_2 y_2 z_2 X_2 Y_2 Z_2$.

Wenn man nun nach Lie-Engel, Transformationsgruppen, Bd. II, S. 52, 53 die Gleichungen der Transformation in nichthomogenen Elementkoordinaten berechnet und darauf die obigen homogenen Elementkoordinaten einführt, so ergeben sich nach $x_1 y_1 z_1 X_1 Y_1 Y_1$ aufgelöst die folgenden Gleichungen:

$$(5^a)\quad \begin{cases} x_1 = x_2 + i y_2 + z_2 \cdot \dfrac{Z_2 \pm 1}{X_2 - i Y_2} = x_2 + y_2 + z_2 \cdot \dfrac{X_2 + i Y_2}{-Z_2 \pm 1}, \\ y_1 = z_2 - (x_2 - i y_2) \cdot \dfrac{Z_2 \pm 1}{X_2 - i Y_2} = z_2 - (x_2 - i y_2) \cdot \dfrac{X_2 + i Y_2}{-Z_2 \pm 1}, \\ z_1 = -\dfrac{Z_2 \pm 1}{X_2 - i Y_2} = -\dfrac{X_2 + i Y_2}{-Z_2 \pm 1}. \end{cases}$$

$$5^b)\quad \begin{cases} X_1 = \varrho \cdot Z_2 \cdot \dfrac{X_2 - i Y_2}{z_2 (X_2 - i Y_2) + (x_2 - i y_2)(-Z_2 \pm 1)} = \varrho Z_2 \cdot \dfrac{Z_2 \pm 1}{z_2 (Z_2 \pm 1) + (x_2 - i y_2)(X_2 + i} \\ Y_1 = \varrho \cdot Z_2 \cdot \dfrac{-(-Z_2 \pm 1)}{z_2 (X_2 - i Y_2) + (x_2 - i y_2)(-Z_2 \pm 1)} = \varrho Z_2 \cdot \dfrac{-(X_2 + i Y_2)}{z_2 (Z_2 \pm 1) + (x_2 - i y_2)(X_2 + i} \\ Z_1 = \varrho \cdot Z_2 \qquad\qquad = \varrho \cdot Z_2; \end{cases}$$

dabei ist noch angenommen, daß $X_2 Y_2 Z_2$ so gewählt worden sind, daß

$$X_2^2 + Y_2^2 + Z_2^2 = 1$$

ist; sonst wäre für ± 1 in den Formeln (5) überall $\pm \sqrt{X_2^2 + Y_2^2 + Z_2^2}$ einzusetzen. Die zweite Formelreihe (5) ergibt sich dann aus der ersten infolge der Relation

$$(6)\quad X_2^2 + Y_2^2 = (X_2 + i Y_2)(X_2 - i Y_2) = (Z_2 \pm 1)(-Z_2 \pm 1).$$

Nach $x_2 + i y_2$, $x_2 - i y_2$, z_2, $X_2 + i Y_2$, $X_2 - i Y_2$, Z_2 aufgelöst ergeben sich auf dieselbe Weise folgende Gleichungen:

$$(7^a)\quad \begin{cases} x_2 + i y_2 = \dfrac{z_1 (x_1 X_1 + y_1 Y_1 + z_1 Z_1) + x_1 Y_1}{z_1 X_1 + Y_1}, \\ x_2 - i y_2 = \dfrac{y_1 Y_1 - Z_1}{z_1 X_1 + Y_1}, \\ Z_2 = \dfrac{y_1 Y_1 + z_1 Z_1}{z_1 X_1 + Y_1}. \end{cases}$$

$$(7^b)\quad \begin{cases} X_2 + i Y_2 = \dfrac{Z_1}{\varrho} \cdot \dfrac{-2 z_1 Y_1}{z_1 X_1 - Y_1}, \\ X_2 - i Y_2 = \dfrac{Z_1}{\varrho} \cdot \dfrac{-2 X_1}{z_1 X_1 - Y_1}, \\ Z_2 = \dfrac{Z_1}{\varrho}. \end{cases}$$

Wir wollen nun die Transformation auf Flächen anwenden, und zwar betrachten wir im Raum R_2 eine reelle Fläche F_2 mit den Gleichungen

$$(8)\quad x_2 = x_2(uv), \quad y_2 = y_2(uv), \quad z_2 = z_2(uv).$$

Bei der betrachteten Berührungstransformation führen die Gleichungen (5) die Flächenelemente dieser Fläche in die Elemente zweier imaginären Flächen F_1' und F_1'' des Raumes R_1 über, deren Gleichungen lauten mögen:

$$(9)\qquad \begin{cases} x_1 = x_1'(uv), & y_1 = y_1'(uv), & z_1 = z_1'(uv), \\ x_1 = x_1''(uv), & y_1 = y_1''(uv), & z_1 = z_1''(uv). \end{cases}$$

Dabei soll der Fläche F_1' das obere und der Fläche F_1'' das untere Zeichen in den Gleichungen (5) entsprechen. Die Flächenelemente jeder dieser Flächen (9) gehen vermöge (7) wieder in die Elemente der reellen Fläche (8) über.

Wir wollen es nun so einrichten, daß $X_1 Y_1 Z_1$ und $X_2 Y_2 Z_2$ unmittelbar die Richtungskosinus der Flächennormalen bedeuten. Zu dem Zweck muß zunächst ϱ in den Gleichungen (5) so gewählt werden, daß $X_1^2 + Y_1^2 + Z_1^2 = 1$ ist.

Setzt man zur Abkürzung

$$(10)\qquad \begin{cases} (N_2') \equiv (X_2 - iY_2)^2 + (-Z_2 \pm 1)^2 \\ \qquad + [z_2(X_2 - iY_2) + (x_2 - iy_2)(-Z_2 \pm 1)]^2 \\ (N_2'') \equiv (Z_2 \pm 1)^2 + (X_2 + iY_2)^2 \\ \qquad + [z_2(Z_2 \pm 1) + (x_2 - iy_2)(X_2 + iY_2)]^2, \end{cases}$$

so führt obige Forderung infolge der beiden Formelreihen (6) entweder auf

$$(\varrho \cdot Z_2)^2 = \frac{1}{N_2'^2}[z_2(X_2 - iY_2) + (x_2 - iy_2)(-Z_2 \pm 1)]^2$$

oder auf

$$(\varrho \cdot Z_2)^2 = \frac{1}{N_2''^2}[z_2(Z_2 \pm 1) + (x_2 - iy_2)(X_2 - iY_2)]^2,$$

so daß man erhält:

$$(11)\qquad \begin{cases} \varrho \cdot Z_2 = (\pm)\frac{1}{N_2'}[z_2(Z_2 - iY_2) + (x_2 - iy_2)(-Z_2 \pm 1)], \\ \varrho \cdot Z_2 = (\pm)\frac{1}{N_2''}[z_2(Z_2 \pm 1) + (x_2 - iy_2)(X_2 + iY_2)]. \end{cases}$$

Setzt man diese Werte in die Formeln (5^b) ein, so erhält man an ihrer Stelle die Formeln:

$$(5^c)\qquad \begin{cases} X_1 = \frac{1}{N_2'}(X_2 - iY_2) = \frac{1}{N_2''}(Z_2 \pm 1), \\ Y_1 = -\frac{1}{N_2'}(-Z_2 \pm 1) = -\frac{1}{N_2''}(X_2 + iY_2), \\ Z_1 = \frac{1}{N_2'}[z_2(X_2 - iY_2) + (x_2 - iy_2)(-Z_2 \pm 1) \\ \qquad = \frac{1}{N_2''}[z_2(Z_2 \pm 1) + (x_2 - iy_2)(X_2 + iY_2)]. \end{cases}$$

Dabei ist das doppelte Vorzeichen in den Formeln (11) weggelassen worden.

Ebenso muß in den Gleichungen (7) ϱ so gewählt werden, daß $X_2^2 + Y_2^2 + Z_2^2 = 1$ ist. Diese Forderung führt auf

$$\begin{aligned} X_2^2 + Y_2^2 + Z_2^2 &= (X_2 + iY_2)(X_2 - iY_2) + Z_2^2 \\ &= \left(\frac{Z_1}{\varrho}\right)^2 \cdot \left[\frac{4z_1 X_1 Y_1}{(z_1 X_1 - Y_1)^2} + 1\right] \\ &= \left(\frac{Z_1}{\varrho}\right)^2 \cdot \left(\frac{z_1 X_1 + Y_1}{z_1 X_1 - Y_1}\right)^2 = 1. \end{aligned}$$

Setzt man zur Abkürzung

$$N_1 \equiv z_1 X_1 + Y_1, \tag{12}$$

so erhält man also

$$\frac{Z_1}{\varrho} = \pm \frac{z_1 X_1 - Y_1}{z_1 X_1 + Y_1} = \pm \frac{z_1 X_1 - Y_1}{N_1}.$$

Setzt man diesen Wert in die Formeln (7^b) ein, so ergibt sich:

$$(7^c) \qquad \begin{cases} X_2 + iY_2 = \pm \dfrac{-2z_1 Y_1}{N_1}, \\ X_2 - iY_2 = \pm \dfrac{-2X_1}{N_1}, \\ Z_2 = \pm \dfrac{z_1 X_1 - Y_1}{N_1}. \end{cases}$$

Aus (11) ergibt sich

$$\varrho = \frac{1}{Z_2 \cdot N_2'} [z_2(X_2 - iY_2) + (x_2 - iy_2)(-Z_2 \pm 1)]$$

und aus (13)

$$\varrho = \pm Z_1 \frac{z_1 X_1 + Y_1}{z_1 X_1 - Y_1}.$$

Wir behaupten, daß unsere Transformationsformeln den einen dieser Ausdrücke in den andern überführen. Vermöge (5^a) und (5^b) wird

$$N_1 \equiv z_1 X_1 + Y_1 = \frac{\mp 2}{N_2'},$$

$$z_1 X_1 - Y_1 = \frac{-2 \cdot Z_2}{N_2'},$$

also

$$\frac{z_1 X_1 + Y_1}{z_1 X_1 - Y_1} = \pm \frac{1}{Z_2}$$

und

$$\pm Z_1 \frac{z_1 X_1 + Y_1}{z_1 X_1 - Y_1} = \frac{Z_1}{Z_2} = \frac{1}{Z_2 N_2'} [z_2(X_2 - iY_2) + (x_2 - iy_2)(-Z_2 \pm 1)].$$

Derjenige Wert von ϱ, für den die Relation $X_1^2 + Y_1^2 + Z_1^2 = 1$ erfüllt ist, geht also tatsächlich durch unsere Transformationsformeln in denjenigen über, für den $X_2^2 + Y_2^2 + Z_2^2 = 1$ ist.

Werden die Vorzeichen so wie in (11) und (5°) gewählt, so muß man sagen, daß die Fläche F_1' in die positive Seite von F_2 und F_1'' in die negative übergeht. Bedeutet σ einen Proportionalitätsfaktor, so ergibt sich nach (9) für die Richtungskosinus der Verbindungslinie je zweier entsprechenden Punkte der Flächen F_1' und F_1''

$$\alpha_1 = \sigma(x_1' - x_1''), \quad \beta_1 = \sigma(y_1' - y_1''), \quad z_1 = \sigma(z_1' - z_1'')$$

oder nach (5ª)

$$\alpha_1 = \frac{2\sigma}{X_2 - iY_2} \cdot z_2, \quad \beta_1 = -\frac{2\sigma}{X_2 - iY_2}(x_2 - iy_2), \quad \gamma_1 = \frac{2\sigma}{X_2 - iY_2}.$$

Da die beiden Punkte $x_1'y_1'z_1'$ und $x_1''y_1''z_1''$ der Verbindungslinie angehören, so kann man für $a_1b_1c_1$ in der Formel (4) die Werte (5ª) setzen. Setzt man für $a_1b_1c_1$ die Ausdrücke (5ª) und für $\alpha_1\beta_1\gamma_1$ die obigen Werte, so zeigt sich, daß die Formel (4) erfüllt ist. Jene Verbindungslinien gehören also dem Komplex (4) an. Unter Benutzung der Formeln (5°) ergibt sich ferner:

$$\alpha_1 X_1 + \beta_1 Y_1 + \gamma_1 Z_1 = 0.$$

Die Verbindungslinie steht also auf den Flächennormalen senkrecht. Damit ist die bekannte Tatsache bewiesen, daß die Flächen F_1' und F_1'' die Brennflächen eines dem Komplex (4) angehörenden Strahlensystems sind.

§ 2. Differentialformeln.

Aus den beiden Formeln

$$\text{(a)} \qquad \begin{cases} X_1^2 + Y_1^2 + Z_1^2 = 1, \\ X_2^2 + Y_2^2 + Z_2^2 = 1 \end{cases}$$

folgt durch Differentiation

$$\text{(b)} \qquad \begin{cases} X_1 \cdot dX_1 + Y_1 \cdot dY_1 + Z_1 \cdot dZ_1 = 0, \\ X_2 \cdot dX_2 + Y_2 \cdot dY_2 + Z_2 \cdot dZ_2 = 0. \end{cases}$$

Ferner ist

$$\text{(c)} \qquad \begin{cases} X_1 \cdot dx_1 + Y_1 \cdot dy_1 + Z_1 \cdot dz_1 = 0, \\ X_2 \cdot dx_2 + Y_2 \cdot dy_2 + Z_2 \cdot dz_2 = 0. \end{cases}$$

Die zweite dieser Gleichungen ist erfüllt, weil wir eine Fläche des Raumes R_2 betrachten. Dann besteht aber auch die erste Beziehung, da bei einer Berührungstransformation Elementverein in Elementverein übergeht.

Setzt man zur Abkürzung:

$$(1)\qquad \begin{cases} dA_1 \equiv (Y_1 dZ_1 - Z_1 dY_1) - z_1 (Z_1 dX_1 - X_1 dZ_1) \\ \qquad\qquad + y_1 (X_1 dY_1 - Y_1 dX_1), \\ dB_1 \equiv -dx_1 + z_1 dy_1 - y_1 dz_1, \\ dC_1 \equiv -(X_1 dY_1 - Y_1 dX_1) \\ dD_1 \equiv dz_1, \end{cases}$$

so ergibt sich durch Differentiation der Formeln (7ᵃ) und (7ᶜ) des § 1 nach einer Rechnung, bei der die erste Relation (c) zu beachten ist:

$$(2^a)\qquad \begin{cases} dx_2 + i\,dy_2 = \frac{1}{N_1^2}(z_1^2 \cdot dA_1 - Y_1^2 \cdot dB_1), \\ dx_2 - i\,dy_2 = \frac{1}{N_1^2}(-dA_1 + X_1^2 \cdot dB_1), \\ dz_2 = \frac{1}{N_1^2}(z_1 dA_1 + X_1 Y_1 \cdot dB_1), \end{cases}$$

$$(2^b)\qquad \begin{cases} dX_2 + i\,dY_2 = \pm \frac{2}{N_1^2}(z_1^2 \cdot dC_1 - Y_1^2 \cdot dD_1), \\ dX_2 - i \cdot dY_2 = \pm \frac{2}{N_1^2}(-dC_1 + X_1^2 \cdot dD_1), \\ dZ_2 = \pm \frac{2}{N_1^2}(z_1 \cdot dC_1 + X_1 Y_1 \cdot dD_1). \end{cases}$$

Wir führen ferner noch folgende Abkürzungen ein:

$$(3^a)\qquad \begin{cases} dA_2 \equiv -i(X_2 dy_2 - Y_2 dx_2) \pm dz_2, \\ dB_2 \equiv i(X_2 dy_2 - Y_2 dx_2) \pm dz_2, \\ dC_2 \equiv -i(X_2 dY_2 - Y_2 \cdot dX_2) \pm dZ_2, \\ dD_2 \equiv i(X_2 dY_2 - Y_2 \cdot dX_2) \pm dZ_2. \end{cases}$$

Infolge der zweiten Formeln (b) und (c), kann man auch schreiben

$$(3^b)\qquad \begin{cases} dA_2 = (X_2 + iY_2)(dx_2 - i\,dy_2) + (Z_2 \pm 1)\,dz_2 \\ \quad = -(X_2 - iY_2)(dx_2 + i\,dy_2) + (-Z_2 \pm 1)\,dz_2, \\ dB_2 = -(X_2 + iY_2)(dx_2 - i\,dy_2) + (-Z_2 \pm 1)\,dz_2 \\ \quad = (X_2 - iY_2)(dx_2 + i\,dy_2) + (Z_2 \pm 1)\,dz_2, \\ dC_2 = (X_2 + iY_2)(dX_2 - i\,dY_2)(Z_2 \pm 1) \cdot dZ_2 \\ \quad = -(X_2 - iY_2)(dX_2 + i\,dY_2) + (-Z_2 \pm 1) \cdot dZ_2, \\ dD_2 = -(X_2 + iY_2)(dX_2 - i\,dY_2) + (-Z_2 \pm 1) \cdot dZ_2 \\ \quad = (X_2 - iY_2)(dX_2 + i\,dY_2) + (Z_2 \pm 1) \cdot dZ_2. \end{cases}$$

Dann ergibt sich aus (5ᵃ), § 1 unter Beachtung der zweiten Formeln (b) und (c) und der Identität (6) des § 1:

$$(4^a)\qquad \begin{cases} dx_1 = \frac{1}{M_2}\,[(-Z_2 \pm 1)\cdot dB_2 + z_2 \cdot dD_2], \\ dy_1 = \frac{1}{M_2}\,[(X_2 - iY_2)\cdot dB_2 - (x_2 - iy_2)\cdot dD_2], \\ dz_1 = -\frac{1}{M_2}\cdot dD_2, \\ M_2 \equiv (X_2 - iY_2)(-Z_2 \pm 1). \end{cases}$$

Aus den ersten Gleichungen (5^c), § 1 folgt:

$$(4^b)\qquad \begin{cases} dX_1 = \frac{1}{N_2'^2}\{N_2'(dX_2 - i\,dY_2) - (X_2 - iY_2)\cdot dN_2'\}, \\ dY_1 = \frac{1}{N_2'^2}\{N_2'\cdot dZ_2 + (-Z_2 \pm 1)\cdot dN_2'\}, \\ dZ_1 = \frac{1}{N_2'^2}\{N_2'[(X_2 - iY_2)\cdot dz_2 + (-Z_2 \pm 1)(dx_2 - i\,dy_2) \\ \qquad + z_2(dX_2 - i\cdot dY_2) - (x_2 - iy_2)\cdot dZ_2] \\ \qquad - [z_2(X_2 - iY_2) + (x_2 - iy_2)(-Z_2 \pm 1)]\cdot dN_2'\}. \end{cases}$$

Aus diesen Gleichungen und den zweiten Gleichungen (5^c) des § 1 ergibt sich unter Beachtung der Identität (6):

$$(4^c)\qquad \begin{cases} Y_1\cdot dZ_1 - Z_1\cdot dY_1 = -\frac{1}{N_2'\cdot N_2''}((-Z_2 \pm 1)\cdot dA_2 + z_2\cdot dC_2), \\ Z_1\cdot dX_1 - X_1\cdot dZ_1 = -\frac{1}{N_2'\cdot N_2''}((X_2 - iY_2)\cdot dA_2 - (x_2 - iy_2)\cdot dC_2), \\ X_1\cdot dY_1 - Y_1\cdot dX_1 = \frac{1}{N_2'\cdot N_2''}\cdot dC_2. \end{cases}$$

Aus der Definition (1), § 2 erhält man mit Hilfe der Formeln (5^a), § 1 in der ersten Form und (4^c), § 2:

$$(5)\qquad \begin{cases} dA_1 = \mp\frac{2}{N_2'\,N_2''}\cdot dA_2, \\ dC_1 = -\frac{1}{N_2'\cdot N_2''}\cdot dC_2. \end{cases}$$

Mit Hilfe derselben Formeln (5^a) und der Formeln (4^a), § 2 findet man ferner:

$$(5)\qquad \begin{cases} dB_1 = \mp\frac{2}{M_2}\cdot dB_2, \\ dD_1 = -\frac{1}{M_2}\cdot dD_2. \end{cases}$$

Nach Formel (14), § 1 ist

$$N_2' = \mp\frac{2}{N_1}$$

und aus (10), § 1 ergibt sich unter Beachtung der Identität (6), § 1

$$N_2' = \frac{-Z_2 \pm 1}{X_2 + iY_2}\,N_2'' = \frac{X_2 - iY_2}{Z_2 \pm 1}\,N_2''.$$

Aus (7°), § 1 folgt:

$$\frac{-Z_2 \pm 1}{X_2 + iY_2} = \frac{X_2 - iY_2}{Z_2 \pm 1} = -\frac{1}{z_1}.$$

Daher wird:

$$N_2' = -\frac{1}{z_1} N_2'', \quad \text{also} \quad N_2'' = -z_1 \cdot N_2' = \pm \frac{2z_1}{N_1}.$$

Man hat also:

$$(6) \qquad N_2' = \mp \frac{2}{N_1}, \quad N_2'' = \pm \frac{2z_1}{N_1}, \quad N_2' \cdot N_2'' = -\frac{4z_1}{N_1^2}.$$

Aus (7°), § 1 folgt ferner:

$$(6) \qquad M_2 \equiv (X_2 - iY_2)(-Z_2 \pm 1) = -\frac{4X_1Y_1}{N_1^2}.$$

Infolgedessen kann man die Formeln (5) auch in folgender Form schreiben:

$$(7) \qquad \begin{cases} dA_2 = \pm \frac{2z_1}{N_1^2} \cdot dA_1, \\ dC_2 = + \frac{4z_1}{N_1^2} \cdot dC_1, \\ dB_2 = \pm \frac{2X_1Y_1}{N_1^2} \cdot dB_1, \\ dD_2 = + \frac{4X_1Y_1}{N_1^2} \cdot dD_1. \end{cases}$$

Diese Formeln erhält man auch aus der Definition (3), § 2 mit Hilfe der Formeln (7°), § 1 und (2), § 2.

Aus den Definitionen (1), § 2 folgt:

$$(8) \qquad dA_1 \cdot dD_1 - dB_1 \cdot dC_1 = N_1 \cdot \sum dX_1 \cdot dx_1;$$

dabei ist die erste Formel (c) zu beachten. Aus (5), § 2 ergibt sich

$$dA_1 \cdot dD_1 - dB_1 \cdot dC_1 = \pm \frac{2}{N_2' \cdot N_2'' M_2} (dA_2 \cdot dD_2 - dB_2 \cdot dC_2).$$

Aus dieser Formel und der Formel (8) erhält man:

$$\frac{1}{N_1} \sum dX_1 \cdot dx_1 = \pm \frac{2}{N_1^2 \cdot N_2' \cdot N_2'' \cdot M_2} (dA_2 \cdot dD_2 - dB_2 \cdot dC_2).$$

Nach (6), § 2 ist

$$N_1^2 \cdot N_2' \cdot N_2'' = -4 \cdot z_1$$

oder nach (5ª), § 1

$$= +4 \frac{X_2 + iY_2}{-Z_2 \pm 1}.$$

Demnach wird unter Beachtung von (4ª), § 2:

$$(9) \quad N_1^2 \cdot N_2' \cdot N_2'' \cdot M_2 = 4 \cdot (X_2 + iY_2)(X_2 - iY_2) = 4(X_2^2 + Y_2^2),$$

so daß man erhält:

$$(10) \qquad \frac{1}{N_1} \sum dX_1 \cdot dx_1 = \pm \frac{1}{2(X_2^2 + Y_2^2)} (dA_2 \cdot dD_2 - dB_2 \cdot dC_2).$$

e Definitionen (3^b), § 2 liefern:

1)
$$dA_2 \cdot dD_2 - dB_2 \cdot dC_2$$
$$= \pm 2(X_2 + iY_2)[(dx_2 - idy_2)\,dZ_2 - dz_2\,(dX_2 - id\,Y_2)]$$
$$= \pm 2(X_2 - iY_2)[(dX_2 + id\,Y_2)\,dz_2 - dZ_2\,(dx_2 + idy_2)].$$

ıter Benutzung des ersten Wertes ergibt sich:

2) $\frac{1}{N_1}\sum dX_1 \cdot dx_1 = \frac{1}{X_2 - iY_2}[(dx_2 - idy_2)\,dZ_2 - (dX_2 - id\,Y_2)\,dz_2]$.

Aus den Gleichungen (2^a), § 2 folgt:

$$\sum dx_2^2 = (dx_2 + idy_2)(dx_2 - idy_2) + dz_2^2$$
$$= \frac{dA_1 \cdot dB_1}{N_1^4}(Y_1^2 + 2z_1 X_1 Y_1 + z_1^2 X_1^2)$$
$$= \frac{dA_1 \cdot dB_1}{N_1^2}.$$

tsprechend ergibt sich aus (2^b)

$$\sum dX_2^2 = 4 \cdot \frac{dC_1 \cdot dD_1}{N_1^2}$$

ıl aus (2^a) und (2^b)

$$\sum dX_2 \cdot dx_2 = \tfrac{1}{2}(dX_2 + id\,Y_2)(dx_2 - idy_2) + \tfrac{1}{2}(dX_2 - id\,Y_2)(dx_2 + idy_2)$$
$$+ dZ_2 dz_2 = \pm \frac{dA_1 \cdot dD_1 + dB_1 \cdot dC_1}{N_1^2}.$$

ın hat also:

3)
$$\begin{cases} \sum dx_2^2 = \frac{1}{N_1^2} \cdot dA_1 \cdot dB_1, \\ \sum dX_2 \cdot dx_2 = \pm \frac{1}{N_1^2} \cdot (dA_1 \cdot dD_1 + dB_1 \cdot dC_1), \\ \sum dX_2^2 = 4 \cdot \frac{1}{N_1^2}\, dC_1 \cdot dD_1. \end{cases}$$

ıs diesen Formeln (13) und den Formeln (7), § 2 folgt

4)
$$\begin{cases} \frac{\sum dX_2 \cdot dx_2}{\sum dx_2^2} = \pm\left(\frac{dC_1}{dA_1} + \frac{dD_1}{dB_1}\right) = +\frac{1}{2}\left(\frac{dC_2}{dA_2} + \frac{dD_2}{dB_2}\right), \\ \frac{\sum dX_2^2}{\sum dx_2^2} = 4\,\frac{dC_1}{dA_1} \cdot \frac{dD_1}{dB_1} = \frac{dC_2}{dA_2} \cdot \frac{dD_2}{dB_2}. \end{cases}$$

ese wichtigen Formeln kann man auch direkt aus den Definitionen (3^b) leiten. Man erhält:

$$A_2 \cdot dB_2 = (X_2^2 + Y_2^2)(dx_2^2 + dy_2^2) + (Z_2^2 \pm 2Z_2 + 1)\,dz_2^2$$
$$+ (Z_2 \pm 1)dz_2 \cdot [(X_2 - iY_2)(dx_2 + idy_2) + (X_2 + iY_2)(dx_2 - idy_2)]$$
$$= (X_2^2 + Y_2^2)(dx_2^2 + dy_2^2) + (Z_2^2 \pm 2Z_2 + 1)\,dz_2^2$$
$$+ 2(Z_2 \pm 1)\,dz_2\,(X_2 dx_2 + Y_2 dy_2),$$

$$dA_2 \cdot dB_2 = (X_2^2 + Y_2^2)(dx_2^2 + dy_2^2) + dz_2^2 \cdot (Z_2^2 \pm 2Z_2 + 1 - 2Z_2^2 \mp 2Z_2),$$
$$dA_2 \cdot dB_2 = (X_2^2 + Y_2^2) \cdot \sum dx_2^2.$$

Hierbei war die zweite Formel (c) zu beachten. Entsprechend findet man bei Benutzung der zweiten Formel (b):

$$dC_2 \cdot dD_2 = (X_2^2 + Y_2^2) \cdot \sum dX_2^2.$$

Die zweite Formel (b) kann man schreiben:

$$\sum X_2 \cdot dX_2 \equiv \tfrac{1}{2}(X_2 + iY_2)(dX_2 - i\,dY_2) + \tfrac{1}{2}(X_2 - iY_2)(dX_2 + i\,dY_2) + Z_2 dZ_2 = 0.$$

Daraus folgt

$$+(X_2 - iY_2)(dX_2 + i\,dY_2) = -(X_2 + iY_2)(dX_2 - i\,dY_2) - 2 \cdot Z_2 \cdot dZ_2.$$

Unter Benutzung dieser Formel und der beiden zweiten Formeln (b) und (c) erhält man:

$$\begin{aligned} dB_2 \cdot dC_2 = {} & (X_2^2 + Y_2^2)(dX_2\,dx_2 + dY_2\,dy_2) \\ & + i(X_2^2 + Y_2^2)(-dX_2\,dy_2 + dY_2\,dx_2) \\ & + (X_2 - iY_2)(dX_2 + i\,dY_2)Z_2 \cdot dz_2 \mp (X_2 - iY_2)(dX_2 + i\,dY_2)\,dz_2 \\ & + (X_2 + iY_2)(dx_2 - i\,dy_2)Z_2 \cdot dZ_2 \mp (X_2 + iY_2)(dx_2 - i\,dy_2)\,dZ_2 \\ & + (Z_2^2 \mp 2Z_2 + 1) \cdot dZ_2 \cdot dz_2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} dB_2 \cdot dC_2 = {} & (X_2^2 + Y_2^2)(dX_2 dx_2 + dY_2 dy_2) \pm (X_2 + iY_2)(dX_2 - i\,dY_2)\,dz_2 \\ & \pm 2Z_2 \cdot dZ_2\,dz_2 + (Z_2^2 \mp 2Z_1 + 1) \cdot dZ_2 \cdot dz_2 \\ & \mp (X_2 + iY_2)(dx_2 - i\,dy_2) \cdot dZ_2 + i(X_2^2 + Y_2^2)(-dX_2 dy_2 + dY_2 dx_2) \\ & + (X_2 - iY_2)(dX_2 + i\,dY_2)Z_2 \cdot dz_2 + (X_2 + iY_2)(dx_2 - i\,dy_2)Z_2 \cdot dZ_2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} dB_2 \cdot dC_2 = {} & (X_2^2 + Y_2^2) \sum dX_2 \cdot dx_2 \mp (X_2 + iY_2) \cdot [(dx_2 - i\,dy_2)\,dZ_2 \\ & - (dX_2 - i\,dY_2)\,dz_2] + 2Z_2^2\,dZ_2\,dz_2 \\ & + (X_2 - iY_2)(dX_2 + i\,dY_2)Z_2 dz_2 + (X_2 + iY_2)(dx_2 - i\,dy_2)Z_2 \cdot dZ_2 \\ & + i(X_2^2 + Y_2^2)(-dX_2\,dy_2 + dY_2\,dx_2). \end{aligned}$$

Nun wird:

$$\begin{aligned} & (X_2 - iY_2)(dX_2 + i\,dY_2)Z_2 \cdot dz_2 + (X_2 + iY_2)(dx_2 - i\,dy_2)Z_2 \cdot dZ_2 \\ & + 2Z_2^2\,dZ_2 \cdot dz_2 + i(X_2^2 + Y_2^2)(-dX_2\,dy_2 + dY_2\,dx_2) \\ & = (X_2\,dX_2 + Y_2 \cdot dY_2)Z_2 \cdot dz_2 + i(X_2\,dY_2 - Y_2\,dX_2) \cdot Z_2 \cdot dz_2 \\ & + (X_2\,dx_2 + Y_2 \cdot dy_2) \cdot Z_2 \cdot dZ_2 + i(-X_2 \cdot dy_2 + Y_2 \cdot dx_2) \cdot Z_2 \cdot dZ_2 \\ & + 2Z_2^2 \cdot dZ_2 \cdot dz_2 + i(X_2^2 + Y_2^2)(-dX_2\,dy_2 + dY_2\,dx_2) \\ & = (X_2\,dY_2 - Y_2 \cdot dX_2)(-X_2\,dx_2 - Y_2\,dy_2) \\ & + i(-X_2\,dy_2 + Y_2\,dx_2) \cdot (-X_2\,dX_2 - Y_2\,dY_2) \\ & + i(X_2^2 + Y_2^2) \cdot (-dX_2 \cdot dy_2 + dY_2 \cdot ax_2) = 0. \end{aligned}$$

Es ergibt sich also:

$$dB_2 \cdot dC_2 = (X_2^2 + Y_2^2) \sum dX_2\, dx_2$$
$$\mp (X_2 + iY_2) \cdot [(dx_2 - i dy_2) \cdot dZ_2 - (dX_2 - i dY_2) \cdot dz_2].$$

Eine entsprechende Formel ergibt sich für $dA_2 \cdot dD_2$. Es ist also:

$$(15) \qquad \begin{cases} dA_2 \cdot dB_2 = (X_2^2 + Y_2^2) \sum dx_2^2, \\ dC_2 \cdot dD_2 = (X_2^2 + Y_2^2) \sum dX_2^2, \end{cases}$$

und ferner

$$(15) \qquad \begin{cases} dB_2 \cdot dC_2 = (X_2^2 + Y_2^2) \sum dX_2\, dx_2 \\ \qquad\qquad \mp (X_2 + iY_2)[(dx_2 - i dy_2) \cdot dZ_2 - (dX_2 - i dY_2) \cdot dz_2], \\ dA_2 \cdot dD_2 = (X_2^2 + Y_2^2) \sum dX_2\, dx_2 \\ \qquad\qquad \pm (X_2 + iY_2)[(dx_2 - i dy_2) \cdot dZ_2 - (dX_2 - i dY_2)\ dz_2]. \end{cases}$$

Aus diesen Formeln folgt:

$$(16) \qquad \begin{cases} \sum dx_2^2 = \frac{1}{X_2^2 + Y_2^2} \cdot dA_2 \cdot dB_2, \\ \sum dX_2\, dx_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{X_2^2 + Y_2^2} (dA_2 \cdot dD_2 + dB_2 \cdot dC_2), \\ \sum dX_2^2 = \frac{1}{X_2^2 + Y_2^2} dC_2 \cdot dD_2. \end{cases}$$

Auch aus diesen Formeln kann man die Formeln (14) ableiten. Aus den Formeln (15) folgt auch aufs neue die Formel (11), § 2. Die Relation

$$(17) \qquad \begin{aligned} &(X_2 + iY_2)[(dx_2 - i dy_2) \cdot dZ_2 - dz_2 (dX_2 - i dY_2)] \\ &= (X_2 - iY_2)[(dX_2 + i dY_2)\, dz_2 - dZ_2 (dx_2 + i dy_2)] \\ &= + i[dz_2 (X_2 dY_2 - Y_2 dX_2) - dZ_2 (X_2 dy_2 - Y_2 dx_2)] \end{aligned}$$

verdient noch angemerkt zu werden.

Aus (13), § 2 folgt:

$$(18) \qquad \Big(\sum dX_2\, dx_2\Big)^2 - \sum dX_2^2 \cdot \sum dx_2^2 = \frac{1}{N_1^4} (dA_1\, dD_1 - dB_1 \cdot dC_1)^2.$$

Nun ist:

$$(19) \qquad \begin{vmatrix} X_2 & dX_2 & dx_2 \\ Y_2 & dY_2 & dy_2 \\ Z_2 & dZ_2 & dz_2 \end{vmatrix}^2 = \sum dX_2^2 \cdot \sum dx^2 - \Big(\sum dX_2 \cdot dx_2\Big)^2.$$

Aus (18) und (19) folgt

$$\begin{vmatrix} X_2 & dX_2 & dx_2 \\ Y_2 & dY_2 & dy_2 \\ Z_2 & dZ_2 & dz_2 \end{vmatrix}^2 = - \frac{1}{N_1^4} (dA_1 \cdot dD_1 - dB_1\, dC_1),$$

und hieraus

$$(20)\qquad \begin{vmatrix} X_2 & dX_2 & dx_2 \\ Y_2 & dY_2 & dy_2 \\ Z_2 & dZ_2 & dz_2 \end{vmatrix} = \pm\sqrt{\sum dX_2^2 \cdot \sum dx_2^2 - \left(\sum dX_2\, dx_2\right)^2} = \pm\frac{i}{N_1^2}\,(dA_1\, dD_1 - dB_1 \cdot dC_1).$$

Aus dieser Formel und Formel (8), § 2 ergibt sich schließlich:

$$(21)\qquad \frac{i}{N_1}\sum dX_1 \cdot dx_1 = \pm\sqrt{\sum dX_2^2 \cdot \sum dx_2^2 - \left(\sum dX_2\, dx_2\right)^2} = \begin{vmatrix} X_2 & dX_2 & dx_2 \\ Y_2 & dY_2 & dy_2 \\ Z_2 & dZ_2 & dz_2 \end{vmatrix}$$

Man vergleiche diese Formel mit der Formel (12) des § 2.

§ 3. Haupttangentenkurven und Krümmungslinien, konjugierte und adjungierte Systeme.

Wenn die durch einen Punkt der Fläche F_1' oder den entsprechenden von F_1'' gelegte Richtung eine Haupttangentenrichtung ist, so ist bekanntlich:

$$(1)\qquad \sum dX_1 \cdot dx_1 = 0.$$

Nach Formel (12) § 2 folgt hieraus

$$(2)\qquad (dx_2 - i\,dy_2)\,dZ_2 - dz_2\,(dX_2 - i\,dY_2) = 0$$

oder

$$dx_2 \cdot dZ_1 - dz_2\,dX_2 - i(dy_2 \cdot dZ_2 - dz_2 \cdot dY_2) = 0$$

oder

$$dx_2 \cdot dZ_2 - dz_2 \cdot dX_2 = 0$$
$$dy_2 \cdot dZ_2 - dz_2 \cdot dY_2 = 0.$$

Diese Formeln kann man schreiben:

$$(3)\qquad \frac{dx_2}{dX_2} = \frac{dy_2}{dY_2} = \frac{dz_2}{dZ_2}.$$

Das heißt aber die transformierte Richtung dx_2, dy_2, dz_2 ist eine Hauptkrümmungsrichtung der Fläche F_2. Vergleiche Bianchi, Vorlesungen über Differentialgeometrie, S. 98.

Sind die Gl. (3) erfüllt, so besteht auch die Gl. (2). Vermöge Formel (12) § 2 gilt also auch die Gl. (1). Die Beziehung ist also umkehrbar. Damit haben wir den bekannten Satz bewiesen:

Satz 1: Bei der betrachteten Berührungstransformation gehen die Haupttangentenkurven der Flächen F_1', F_1'' in Krümmungslinien von F_2 über und umgekehrt.

Der Formel (8), § 2 analog kann man folgende Formeln ableiten:

$$(4)\qquad \begin{aligned} \delta A_1 \cdot dD_1 - dB_1 \cdot \delta C_1 &= N_1 \cdot \sum \delta X_1 \cdot dx_1, \\ dA_1 \cdot \delta D_1 - \delta B_1 \cdot dC_1 &= N_1 \cdot \sum dX_1 \cdot \delta x_1. \end{aligned}$$

Aus diesen Formeln folgt:

$$5)\qquad \begin{aligned} &(\delta A_1 \cdot dD_1 - dB_1 \cdot \delta C_1) + (dA_1 \cdot \delta D_1 - \delta B_1 \cdot dC_1) \\ &\qquad = N_1 \cdot \Big(\sum \delta X_1 \cdot dx_1 - dX \cdot \delta x_1 \Big). \end{aligned}$$

erner kann man die folgenden, den Formeln (15), § 2 entsprechenden eweisen:

$$6)\qquad \begin{cases} dB_2 \cdot \delta C_2 = (X_2^2 + Y_2^2) \cdot \sum \delta X_2 \cdot dx_2 \\ \qquad\qquad \mp (X_2 + iY_2)[(dx_2 - i dy_2)\,\delta Z_2 - (\delta X_2 - i \delta Y_2)\,dz_2], \\ \delta B_2 \cdot dC_2 = (X_2^2 + Y_2^2) \cdot \sum dX_2 \cdot \delta x_2 \\ \qquad\qquad \mp (X_2 + iY_2)[(\delta x_2 - i \delta y_2)\,dZ_2 - (dX_2 - i dY_2)\,\delta z_2], \\ dA_2 \cdot \delta D_2 = (X_2^2 + Y_2^2) \cdot \sum \delta X_2 \cdot dx_2 \\ \qquad\qquad \pm (X_2 + iY_2)[(dx_2 - i dy_2)\,\delta Z_2 - (\delta X_2 - i \delta Y_2)\,dz_2], \\ \delta A_2 \cdot dD_2 = (X_2^2 + Y_2^2) \cdot \sum dX_2 \cdot \delta x_2 \\ \qquad\qquad \pm (X_2 + iY_2)[(\delta x_2 - i \delta y_2)\,dZ_2 - (dX_2 - i dY_2)\,\delta z_2]. \end{cases}$$

aus diesen Formeln folgt:

$$7)\qquad \begin{aligned} &(\delta A_2 \cdot dD_2 - dB_2 \cdot \delta C_2) + (dA_2 \cdot \delta D_2 - \delta B_2 \cdot dC_2) \\ &= (\delta A_2 \cdot dD_2 - \delta B_2 \cdot dC_2) + (dA_2\,\delta D_2 - dB_2 \cdot \delta C_2) \\ &= \pm 2(X_2 + iY_2)[(dx_2 - i dy_2)\,\delta Z_2 - (dX_2 - i dY_2)\,\delta z_2 \\ &\quad + (\delta x_2 - i \delta y_2)\,dZ_2 - (\delta X_2 - i \delta Y_2)\,dz_2]. \end{aligned}$$

Aus (8) und (10), § 2 folgt eine Formel, zu der analog man folgende erhält:

$$\frac{1}{N_1^2}(\delta A_1 \cdot dD_1 - dB_1 \cdot \delta C_1) = \pm \frac{1}{2(X_2^2 + Y_2^2)}(\delta A_2 \cdot dD_2 - dB_2 \cdot \delta C_2),$$

$$\frac{1}{N_1^2}(dA_1 \cdot \delta D_1 - \delta B_1 \cdot dC_1) = \pm \frac{1}{2(X_2^2 + Y_2^2)}(dA_2 \cdot \delta D_2 - \delta B_2 \cdot dC_2).$$

Durch Addition dieser Formeln ergibt sich:

$$(8)\qquad \begin{aligned} &\frac{1}{N_1^2}[(\delta A_1 \cdot dD_1 - dB_1\,\delta C_1) + (dA_1\,\delta D_1 - \delta B_1 \cdot dC_1)] \\ &= \pm \frac{1}{2(X_2^2 + Y_2^2)}[(\delta A_2 \cdot dD_2 - dB_2 \cdot \delta C_2) + (dA_2 \cdot \delta D_2 - \delta B_2 \cdot dC_2)] \end{aligned}$$

Wenn man in diese Formel die Werte (5) und (7) einsetzt, so gelangt man schließlich zu folgendem Resultat:

$$\frac{1}{N_1}\left[\sum \delta X_1 \cdot dx_1 + \sum dX_1 \cdot \delta x_1\right]$$

$$(9) \qquad = \frac{1}{X_2 - iY_2}\left[(dx_2 - i\,dy_2)\,\delta Z_2 - (dX_2 - i\,dY_2)\,dz_2\right.$$

$$\left. + (\delta x_2 - i\,\delta y_2)\,dZ_2 - (\delta X_2 - i\,\delta Y_2)\,dz_2\right]$$

Wir betrachten nun auf F_1', F_1'' je zwei Kurvenscharen. Längs der einen mögen $x_1 y_1 z_1 X_1 Y_1 Z_1$ die Inkremente $dx_1 dy_1 dz_1 dX_1 dY_1 dZ_1$ erfahren, längs der andern die Inkremente $\delta x_1 \delta y_1 \delta z_1 \delta X_1 \delta Y_1 \delta Z_1$. Wenn die Kurvenscharen ein konjugiertes System bilden, so ist:

$$(10) \qquad \sum \delta X_1 \cdot dx_1 = 0 \qquad \sum dX_1 \cdot \delta x_1 = 0.$$

Vergleiche Bianchi, S. 108. Dieses Kurvensystem geht in ein Kurvensystem der Fläche F_2 über. Die Inkremente längs der einen Kurvenschar dieses letzteren Systems bezeichnen wir mit $dx_2 dy_2 dz_2 dX_2 dY_2 dZ_2$ und die längs der andern Schar mit $\delta x_2 \delta y_2 \delta z_2 \delta X_2 \delta Y_2 \delta Z_2$. Dann gibt sich vermöge (10) aus Gl. (9) für diese Inkremente die Relation

$$(11^a) \quad (dx_2 - i\,dy_2)\,\delta Z_2 - (dX_2 - i\,dY_2)\,\delta z_2$$

$$+ (\delta x_2 - i\,\delta y_2)\,dZ_2 - (\delta X_2 - i\,\delta Y_2)\,dz_2 =$$

oder

$$(11^b) \qquad \begin{cases} dx_2\,\delta Z_2 - dX_2\,\delta z_2 + \delta x_2\,dZ_2 - \delta X_2\,dz_2 = 0, \\ dy_2\,\delta Z_2 - dY_2\,\delta z_2 + \delta y_2\,dZ_2 - \delta Y_2\,dz_2 = 0, \end{cases}$$

oder anders geschrieben:

$$(11^c) \qquad \begin{cases} dY_2\,\delta z_2 - dZ_2\,\delta y_2 = -(\delta Y_2\,dz_2 - \delta Z_2\,dy_2), \\ dZ_2\,\delta x_2 - dX_2\,\delta z_2 = -(\delta Z_2\,dx_2 - \delta X_2\,dz_2). \end{cases}$$

Die zweite Gleichung multiplizieren wir mit Z_2; das gibt:

$$Z_2\,dZ_2 \cdot \delta x_2 - Z_2\,\delta z_2 \cdot dX_2 = -Z_2\,\delta Z_2\,dx_2 + Z_2\,dz_2\,\delta X_2.$$

Vermöge der Relationen (b), (c) § 2

$$(b_1) \sum X_2\,dX_2 = 0, \quad (c_1) \sum X_2\,dx_2 = 0,$$

und der analogen

$$(b_2) \sum X_2\,\delta X_2 = 0, \quad (c_2) \sum X_2\,\delta x_2 = 0$$

erhält man daraus:

$$(-X_2\,dX_2 - Y_2\,dY_2)\,\delta x_2 + (X_2\,\delta x_2 + Y_2\,\delta y_2)\,dX_2$$

$$= X_2\,\delta X_2 + Y_2\,\delta Y_2)\,dx_2 + (-X_2\,dx_2 - Y_2\,dy_2)\,\delta X_2$$

oder

$$-Y_2\,dY_2\,\delta x_2 + Y_2\,dX_2\,\delta y_2 = +Y_2\,\delta Y_2\,dx_2 - Y_2\,\delta X_2\,dy_2.$$

Unter Weglassung des Faktors Y_2 findet man also:

$$(11^d) \qquad dX_2\,\delta y_2 - dY_2\,\delta x_2 = -(\delta X_2\,dy_2 - \delta Y\,dx_2).$$

Für die Inkremente auf F_2 gelten also die folgenden drei Relationen:

$$(11) \qquad \begin{cases} dY_2\,\delta z_2 - dZ_2\,\delta y_2 = -(\delta Y_2\,dz_2 - \delta Z_2\,dy_2), \\ dZ_2\,\delta x_2 - dX_2\,\delta z_2 = -(\delta Z_2\,dx_2 - \delta X_2\,dz_2), \\ dX_2\,\delta y_2 - dY_2\,\delta x_2 = -(\delta X_2\,dy_2 - \delta Y_2\,dx_2). \end{cases}$$

Gelten umgekehrt für die Kurvenscharen auf F_2 die Beziehungen (11), so ist auch Gleichung (11^a) erfüllt. Vermöge (9) ergibt sich also:

$$(12) \qquad \sum \delta X_1 \cdot dx_1 + \sum dX_1 \cdot \delta x_1 = 0.$$

Nun wird:

$$\sum \delta X_1 \cdot dx_1 = \sum \left(\frac{\partial X_1}{\partial u}\,\delta u + \frac{\partial X_1}{\partial v}\,\delta v\right)\left(\frac{\partial x_1}{\partial u}\,\delta u + \frac{\partial x_1}{\partial v}\,\delta v\right)$$

$$= du\,\delta u \sum \frac{\partial X_1}{\partial u}\frac{\partial x_1}{\partial u} + du\,\delta v \sum \frac{\partial X_1}{\partial v}\frac{\partial x_1}{\partial u}$$

$$+ \delta u\,dv \sum \frac{\partial X_1}{\partial u}\frac{\partial x_1}{\partial v} + dv\,\delta v \cdot \sum \frac{\partial X_1}{\partial v}\frac{\partial x_1}{\partial v}$$

oder nach Bianchi, S. 87

$$\sum \delta X_1\,dx_1 = -D_1\,du\,\delta u - D_1'(du\,\delta v + dv\,\delta u) - D_1''\,dv\,\delta v.$$

Genau dasselbe ergibt sich aber, wenn man $\sum dX_1 \cdot \delta x_1$ berechnet. Es ist also

$$(13) \qquad \sum \delta X_1\,dx_1 = \sum dX_1 \cdot \delta x_1$$

$$= -D_1\,du\,\delta u - D_1'(du\,\delta v + dv\,\delta u) - D_1''\,dv\,\delta v,$$

daher ist:

$$(14) \qquad \sum \delta X_1\,dx_1 + \sum dX_1\,\delta x_1 = 2 \cdot \sum \delta X_1\,dx_1 = 2 \cdot \sum dX_1\,\delta x_1.$$

Vermöge (14) ergeben sich aus (12) also wieder die beiden Relationen 10.

Um uns kurz ausdrücken zu können, führen wir folgende Bezeichnung ein:

Erklärung: Kurvensysteme, für welche die Relationen (11) gelten, nennen wir adjungierte Systeme.

Dann gilt folgender Satz:

Satz 2: Die Berührungstransformation führt konjugierte Systeme von F_1', F_1'' in adjungierte Systeme von F_2 über und umgekehrt.

Aus (11) folgt durch Multiplikation mit $X_2\,Y_2\,Z_2$ und darauf folgende Addition:

$$(15)\qquad \begin{vmatrix} X_2 & dX_2 & \delta x_2 \\ Y_2 & dY_2 & \delta y_2 \\ Z_2 & dZ_2 & \delta z_2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} X_2 & \delta X_2 & dx_2 \\ Y_2 & \delta Y_2 & dy_2 \\ Z_2 & \delta Z_2 & dz_2 \end{vmatrix}$$

Vermöge (19), § 2 folgt hieraus

$$\sum dX_2^2 \cdot \sum \delta x_2^2 - \left(\sum dX_2 \delta x_2\right)^2 = \sum \delta X_2^2 \sum dx_2^2 - \left(\sum \delta X_2 dx_2\right)^2$$

Ebenso wie (13) findet man:

$$\sum dX_2 \delta x_2 = \sum \delta X_2 \cdot dx_2.$$

Dadurch geht aus der vorigen Gleichung hervor

$$(16)\qquad \frac{\sum dX_2^2}{\sum dx_2^2} = \frac{\sum \delta X_2^2}{\sum \delta x_2^2}.$$

Nach Bianchi, S. 119, ist nun

$$(17)\qquad \begin{aligned} \sum dX_2^2 &= -K_2 \cdot \sum dx_2^2 + H_2 \cdot \sum dX_2 dx_2, \\ \sum \delta X_2^2 &= -K_2 \cdot \sum \delta x_2^2 + H_2 \cdot \sum \delta X_2 \delta x_2. \end{aligned}$$

Unter der Annahme $H_2 \neq 0$ ergibt sich also aus (16)

$$(18)\qquad \frac{\sum dX_2 dx_2}{\sum dx_2^2} = \frac{\sum \delta X_2 \delta x_2}{\sum \delta x_2^2}.$$

Nun ist:

$$(19)\qquad \begin{aligned} \frac{1}{R_2 d} &= \frac{\sum dX_2 \cdot dx_2}{\sum dx_2^2}, \\ \frac{1}{R_2 \delta} &= \frac{\sum \delta X_2 \cdot \delta x_2}{\sum \delta x_2^2}, \end{aligned}$$

wo $R_2 d$ den Krümmungsradius desjenigen Normalschnittes der reellen Fläche F_2 bedeutet, der durch den Punkt P_2 in der Richtung dx_2, dy_2, dz_2 gelegt wird, und $R_2 \delta$ den für die Richtung δx_2, δy_2, δz_2. Siehe Bianchi S. 102. Aus (18) ergibt sich also:

$$(20)\qquad \frac{1}{R_2 d} = \frac{1}{R_2 \delta}.$$

Daraus folgt der folgende Satz:

Satz 3: Adjungierte Richtungen liegen symmetrisch zu den Hauptkrümmungsrichtungen.

Läßt man die Indices 2 weg und wählt für die Gaußschen Fundamentalgrößen dieselben Bezeichnungen wie Bianchi, so ist

$$-\sum dX \cdot dx = D \cdot du^2 + 2D' \cdot du \cdot dv + D'' dv^2,$$
$$\sum dx^2 = E \cdot du^2 + 2F \cdot du \cdot dv + G \cdot dv^2.$$

Aus Formel (18) ergibt sich daher:

$$\begin{vmatrix} D \cdot du^2 + 2D' du \cdot dv + D'' dv^2 & D\,\delta u^2 + 2 \cdot D' \cdot \delta u \cdot \delta v + D'' \cdot \delta v^2 \\ E \cdot du^2 + 2F \cdot du \cdot dv + G \cdot dv^2 & E \cdot \delta u^2 + 2 \cdot F\ \ \delta u \cdot \delta v + G\ \cdot \delta v^2 \end{vmatrix} = 0.$$

Wenn man diese Determinante in eine Summe von 9 Determinanten zerlegt, so werden drei derselben gleich 0, während die übrigen 6 sich in folgender Weise zusammenfassen lassen:

$$\begin{aligned} &2 \cdot (ED' - FD)\, du\, \delta u\, (dv\, \delta u - du\, \delta v) \\ &\quad + (ED'' - GD)(dv^2 \delta u^2 - du^2 \cdot \delta v^2) \\ &\quad + 2(FD'' - GD')\, dv\, \delta v\, (dv\, \delta u - du\, \delta v) = 0 \end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned} &(dv\, \delta u - du\, \delta v)\{2(ED' - FD)\, du\, \delta u \\ &\quad + (ED'' - GD)(dv\, \delta u - du \cdot \delta v) \\ &\quad + 2(FD'' - GD')\, dv\, \delta v\} = 0. \end{aligned}$$

Sind du, dv und δu, δv zwei verschiedene Richtungen, so ist $dv\,\delta u - du\,\delta v \neq 0$, so daß sich ergibt:

(21) $$(ED' - FD)\, du\, \delta u + \tfrac{1}{2}(ED'' - GD)(dv\, \delta u + du\, \delta v) + (FD'' - GD')\, dv\, \delta v = 0.$$

Satz 4: Die adjungierten Systeme werden durch die Gleichung (19) definiert.

Daß die adjungierten Systeme wenigstens einen gewissen systematischen Wert für die Flächentheorie haben, lehren folgende Sätze:

Sätze 5: Die Haupttangentenkurven bilden ein adjungiertes System.

Die Krümmungslinien bilden ein konjugiertes System.

Die Haupttangentenrichtungen sind zu sich selbst konjugiert.

Die Hauptkrümmungsrichtungen sind zu sich selbst adjungiert.

Die Formel (21) kann man auch aus einer der Gleichungen (11) ableiten. Man erhält:

(22) $$\begin{aligned} dY \cdot \delta z - dZ \cdot \delta y &= \left(\frac{\partial Y}{\partial u} du + \frac{\partial Y}{\partial v} du\right)\left(\frac{\partial z}{\partial u} \delta u + \frac{\partial z}{\partial v} \delta v\right) \\ &\quad - \left(\frac{\partial Z}{\partial u} du + \frac{\partial Z}{\partial v} dv\right)\left(\frac{\partial y}{\partial u} \delta u + \frac{\partial y}{\partial v} \delta v\right) \\ &= \left(\frac{\partial Y}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial u} - \frac{\partial Z}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial u}\right) du\, \delta u + \left(\frac{\partial Y}{\partial v}\frac{\partial z}{\partial u} - \frac{\partial Z}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}\right) dv \cdot \delta u \\ &\quad + \left(\frac{\partial Y}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v} - \frac{\partial Z}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}\right) du\, \delta v + \left(\frac{\partial Y}{\partial v}\frac{\partial z}{\partial v} - \frac{\partial Z}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial v}\right) dv\, \delta v. \end{aligned}$$

Setzt man nun:

$$(23)\qquad \begin{cases} \alpha \equiv \dfrac{FD' - GD}{EG - F^2}, & \beta \equiv \dfrac{FD - ED'}{EG - F^2}, \\ \gamma \equiv \dfrac{FD'' - GD'}{EG - F^2}, & \delta \equiv \dfrac{FD' - ED''}{EG - F^2}, \end{cases}$$

so ist nach Bianchi S. 90:

$$(24)\qquad \frac{\partial X}{\partial u} = \alpha \frac{\partial x}{\partial u} + \beta \frac{\partial x}{\partial v}, \qquad \frac{\partial X}{\partial v} = \gamma \frac{\partial x}{\partial u} + \delta \frac{\partial x}{\partial v} \text{ etc.}$$

Infolgedessen wird:

$$\begin{aligned} \frac{\partial Y}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial u} - \frac{\partial Z}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial u} &= \alpha \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial u} + \beta \frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial z}{\partial u} - \alpha \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial u} - \beta \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v} \\ &= \beta \left(\frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial z}{\partial u} - \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}\right) \\ &= -\beta \cdot X \cdot \sqrt{EG - F^2}. \end{aligned}$$

Siehe Bianchi, S. 86. Entsprechend findet man:

$$(25)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial Y}{\partial u}\dfrac{\partial z}{\partial u} - \dfrac{\partial Z}{\partial u}\dfrac{\partial y}{\partial u} = -\beta \cdot X \cdot \sqrt{E \cdot G - F^2}, \\ \dfrac{\partial Y}{\partial v}\dfrac{\partial z}{\partial u} - \dfrac{\partial Z}{\partial v}\dfrac{\partial y}{\partial u} = -\delta \cdot X \cdot \sqrt{E \cdot G - F^2}, \\ \dfrac{\partial Y}{\partial u}\dfrac{\partial z}{\partial v} - \dfrac{\partial Z}{\partial u}\dfrac{\partial y}{\partial v} = \alpha \cdot X \cdot \sqrt{E \cdot G - F^2}, \\ \dfrac{\partial Y}{\partial v}\cdot\dfrac{\partial z}{\partial v} - \dfrac{\partial Z}{\partial v}\dfrac{\partial y}{\partial v} = \gamma \cdot X \cdot \sqrt{E \cdot G - F^2}. \end{cases}$$

Wenn man diese Werte in (22) substituiert, so erhält man:

$$(26)\quad dY \cdot \delta z - dZ\,\delta y$$
$$= X \cdot \sqrt{EG - F^2} \cdot (-\beta \cdot du\,\delta u - \delta \cdot dv\,\delta u + \alpha \cdot du\,\delta v + \gamma\, dv\,\delta v$$

Entsprechend ergibt sich:

$$(22)\quad \delta Y \cdot dz - \delta Z \cdot dy$$
$$= \left(\frac{\partial Y}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial u} - \frac{\partial Z}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial u}\right) du\,\delta u + \left(\frac{\partial Y}{\partial v}\frac{\partial z}{\partial u} - \frac{\partial Z}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}\right) du\,\delta v$$
$$+ \left(\frac{\partial Y}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v} - \frac{\partial Z}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}\right) dv\,\delta u + \left(\frac{\partial Y}{\partial v}\frac{\partial z}{\partial v} - \frac{\partial Z}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial v}\right) dv\,\delta v$$

oder vermöge (25)

$$(26)\quad \delta Y \cdot dz - \delta Z \cdot dy$$
$$= X\sqrt{EG - F^2} \cdot (-\beta \cdot du\,\delta u - \delta \cdot du\,\delta v + \alpha \cdot dv\,\delta u + \gamma\, dv\,\delta v)$$

Die erste Gleichung (11) kann man nun schreiben:

$$dY \cdot \delta z - dZ \cdot \delta y + (\delta Y\, dz - \delta Z \cdot dy) = 0.$$

etzt man hier die Werte (26) ein und läßt den gemeinsamen Faktor eg, so findet man:

27) $$-2\beta\,du\,\delta u+(\alpha-\delta)(du\,\delta v+dv\,\delta u)+2\gamma\,dv\,\delta v=0.$$

as liefert nach (23) aber wieder die Gleichung (21). Aus (21) kann ber rückwärts Formel (20) gefolgert werden. Dieselbe muß daher uch richtig sein, wenn $H_2=0$ ist.

§ 4. Die normale Krümmung und die geodätische Torsion.

Für die normale Krümmung einer Kurve der Flächen F_1', F_1'' ilt die Formel:

) $$\frac{1}{R_1}=\frac{\sum dX_1\cdot dx_1}{\sum dx_1^2}.$$

ergleiche § 3, Formel (19). Für die geodätische Torsion einer Kurve r Fläche F_2 gilt nach Kommerell, S. 135

) $$\frac{1}{T_2}=-\frac{1}{ds_2^2}\begin{vmatrix} X_2 & dX_2 & dx_2\\ Y_2 & dY_2 & dy_2\\ Z_2 & dZ_2 & dz_2\end{vmatrix}$$

$$=\mp\frac{1}{\sum dx_2^2}\sqrt{\sum dX_2^2\cdot\sum dx_2^2-\left(\sum dX_2\,dx_2\right)^2}.$$

etzt man in Formel (21), § 2 die Werte (1) und (2) ein, so erhält man:

) $$\frac{i}{N_1}\cdot\frac{1}{R_1}\cdot\sum dx_1^2=-\frac{1}{T_2}\sum dx_2^2.$$

ach einem Satz von Kommerell ist nun

) $$\frac{1}{T_2}=\mp\sqrt{-\left(\frac{1}{R_2}-\frac{1}{R_2'}\right)\left(\frac{1}{R_2}-\frac{1}{R_2''}\right)},$$

enn R_2', R_2'' die Hauptkrümmungsradien des Punktes P_2 der Fläche $_2$ sind. Aus dieser Formel folgt der bekannte Satz, daß längs einer rümmungslinie die geodätische Torsion gleich 0 ist. Längs einer laupttangentenkurve ist bekanntlich die normale Krümmung gleich 0. us der Formel (3) ergibt sich damit der Satz:

Satz 6: Der Satz $\frac{1}{R_1}=0$ für Haupttangentenkurven wird durch ie imaginäre Berührungstransformation von Lie in den Satz $\frac{1}{T_2}=0$ ür Krümmungslinien übergeführt und umgekehrt.

Unterscheiden wir konjugierte und adjungierte Richtungen ebenso ie in § 3, so folgt aus $\frac{1}{R_2 d}=\frac{1}{R_2\delta}$ unter Benutzung der Formel (4)

$$\frac{1}{T_2 d} = -\frac{1}{T_2 \delta}. \tag{5}$$

Vergleiche meine Arbeit in den Berichten der Hamburger mathematischen Gesellschaft.

Satz 7: Zwei adjungierte Kurven einer Fläche haben in ihrem Schnittpunkt gleiche normale Krümmung, während die geodätische Torsion der einen gleich dem negativen Wert der geodätischen Torsion der andern ist.

Aus Formel (3) und (5) ergibt sich

$$\frac{1}{R_1 d} \cdot \frac{\sum dx_1^2}{\sum dx_2^2} = -\frac{1}{R_1 \delta} \cdot \frac{\sum \delta x_1^2}{\sum \delta x_2^2}.$$

Nach Formel (13), § 3 ist nun

$$\sum dx_2^2 = \frac{1}{N_1^2} dA_1 \cdot dB_1, \qquad \sum dx_2^2 = \frac{1}{N_1^2} \delta A_1 \cdot \delta B_1,$$

so daß man erhält

$$\frac{1}{R_1 d} \cdot \frac{\sum dx_1^2}{dA_1 \cdot dB_1} = -\frac{1}{R_1 \delta} \cdot \frac{\sum \delta x_1^2}{\delta A_1 \cdot \delta B_1}. \tag{6}$$

Für konjugierte Kurven ist nun

$$\sum \delta X_1 \cdot dx_1 = 0, \qquad \sum dX_1 \cdot \delta x_1 = 0.$$

Ferner ist nach (e), § 2:

$$\sum X_1 \cdot dx_1 = 0, \qquad \sum X_1 \cdot \delta x_1 = 0.$$

Aus diesen Gleichungen folgt:

$$\begin{cases} \mu \cdot dx_1 = Y_1 \cdot \delta Z_1 - Z_1 \cdot \delta Y_1, \\ \mu \cdot dy_1 = Z_1 \cdot \delta X_1 - X_1 \cdot \delta Z_1, \\ \mu \cdot dz_1 = X_1 \cdot \delta Y_1 - Y_1 \cdot \delta X_1 \end{cases} \tag{7}$$

und

$$\begin{cases} \nu \cdot \delta x_1 = Y_1 \cdot dZ_1 - Z_1 \cdot dY_1, \\ \nu \cdot \delta y_1 = Z_1 \cdot dX_1 - X_1 \cdot dZ_1, \\ \nu \cdot \delta z_1 = X_1 \cdot dY_1 - Y_1 \cdot dX_1. \end{cases} \tag{8}$$

Infolge der Definitionen (1), § 2 folgt hieraus

$$\begin{aligned} dA_1 &= -\nu \cdot \delta B_1, \\ \delta A_1 &= -\mu \cdot dB_1 \end{aligned} \tag{9a}$$

und daraus (9)

$$\mu \cdot dA_1 \cdot dB_1 = \nu \cdot \delta A_1 \cdot \delta B_1. \tag{9}$$

Andererseits ergibt sich aus (7)

$$\mu \cdot \sum dx_1 \cdot \delta x_1 = \sum (Y_1 \delta Z_1 - Z_1 \delta Y_1) \cdot \delta x_1$$

$$= \begin{vmatrix} \delta x_1 & X_1 & \delta X_1 \\ \delta y_1 & Y_1 & \delta Y_1 \\ \delta z_1 & Z_1 & \delta Z_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} X_1 & \delta X_1 & \delta x_1 \\ Y_1 & \delta Y_1 & \delta y_1 \\ Z_1 & \delta Z_1 & \delta z_1 \end{vmatrix}$$

Entsprechend wie (19), § 2 gilt die Formel

$$\begin{vmatrix} X_1 & \delta X_1 & \delta x_1 \\ Y_1 & \delta Y_1 & \delta y_1 \\ Z_1 & \delta Z_1 & \delta z_1 \end{vmatrix} = \sum \delta X_1^2 \cdot \sum \delta x_1^2 - \left(\sum dX_1 \cdot \delta x_1\right)^2,$$

so daß man erhält

$$(10) \quad \mu \cdot \sum dx_1 \cdot \delta x_1 = \pm \sqrt{\sum \delta X_1^2 \cdot \sum \delta x_1^2 - \left(\sum \delta X_1 \cdot \delta x_1\right)^2}.$$

Auf dieselbe Weise folgt aus (8)

$$(10) \quad \nu \cdot \sum dx_1 \cdot \delta x_1 = \pm \sqrt{\sum dX_1^2 \cdot \sum dx_1^2 - \left(\sum dX_1 \cdot dx_1\right)^2}.$$

Aus (6) und (9) ergibt sich:

$$\frac{1}{R_1 d} \cdot \frac{1}{\nu} \cdot \sum dx_1^2 = -\frac{1}{R_1 \delta} \cdot \frac{1}{\mu} \sum \delta x_1^2$$

und hieraus vermöge (10)

$$\frac{1}{R_1 d} : \frac{\sqrt{\sum dX_1^2 \cdot \sum dx_1^2 - \left(\sum dX_1\, dx_1\right)^2}}{\sum dx_1^2}$$

$$= -\frac{1}{R_1 \delta} : \frac{\sqrt{\sum \delta X_1^2 \cdot \sum \delta x_1^2 - \left(\sum \delta X_1\, \delta x_1\right)^2}}{\sum \delta x_1^2}$$

oder

$$(11) \quad \frac{1}{R_1 d} : \sqrt{\frac{\sum dX_1^2}{\sum dx_1^2} - \left(\frac{\sum dX_1\, dx_1}{\sum dx_1^2}\right)^2}$$

$$= -\frac{1}{R_1 \delta} : \sqrt{\frac{\sum \delta X_1^2}{\sum \delta x_1^2} - \left(\frac{\sum \delta X_1\, \delta x_1}{\sum \delta x_1^2}\right)^2}.$$

Nun ist:

$$(12) \quad \frac{1}{T_1 d} = \mp \sqrt{\frac{\sum dX_1^2}{\sum dx_1^2} - \left(\frac{\sum dX_1\, dx_1}{\sum dx_1^2}\right)^2},$$

$$\frac{1}{T_1 \delta} = \mp \sqrt{\frac{\sum \delta X_1^2}{\sum \delta x_1^2} - \left(\frac{\sum \delta X_1\, \delta x_1}{\sum \delta x_1^2}\right)^2}.$$

Aus (11) folgt also:

$$(13) \quad \frac{1}{R_1 d} : \frac{1}{T_1 d} = -\frac{1}{R_1 \delta} : \frac{1}{T_1 \delta}.$$

Satz 8: Für zwei konjugierte Kurven ist in ihrem Schnittpunkt der Quotient aus der normalen Krümmung und der geodätischen Torsion der einen Kurve gleich dem negativen Wert des entsprechenden Quotienten für die andere Kurve.

Satz 9: Der Satz 8 über konjugierte Kurven geht infolge unserer Berührungstransformation aus dem Satz 7 über die geodätische Torsion adjungierter Kurven hervor und umgekehrt.

Sind R_1' und R_1'' die Hauptkrümmungsradien des Punktes P_1 der Flächen F_1', F_1'', so ist nach dem Satz von Euler:

$$\frac{1}{R_1 d} = \frac{\cos^2\alpha'}{R_1'} + \frac{\sin^2\alpha'}{R_1''}. \tag{14}$$

Aus demselben folgt:

$$\sin\alpha' \cdot \cos\alpha' = \pm \frac{1}{\frac{1}{R_1'} - \frac{1}{R_1''}} \cdot \sqrt{-\left(\frac{1}{R_1 d} - \frac{1}{R_1'}\right)\left(\frac{1}{R_1 d} - \frac{1}{R_1''}\right)}.$$

Die Formel (12) kann man fortsetzen in der Form:

$$\frac{1}{T_1 d} = \mp \sqrt{\frac{\sum dX_1^2}{\sum dx_1^2} - \left(\frac{\sum dX_1\, dx_1}{\sum dx_1^2}\right)^2} \tag{12}$$

$$= \mp \sqrt{-\left(\frac{1}{R_1 d} - \frac{1}{R_1'}\right)\left(\frac{1}{R_1 d} - \frac{1}{R_1''}\right)}.$$

Daher ergibt sich:

$$\frac{1}{T_1 d} = -\left(\frac{1}{R_1'} - \frac{1}{R_1''}\right) \sin\alpha' \cdot \cos\alpha'. \tag{15}$$

Hier bedeutet α' den Winkel, den der zu $R_1 d$ gehörige Normalschnitt mit dem zu R_1' gehörigen bildet. Ist α'' der Winkel zwischen dem zu $R_1\delta$ und dem zu R_1' gehörigen Normalschnitt, so ist entsprechend:

$$\frac{1}{T_1 \delta} = -\left(\frac{1}{R_1'} - \frac{1}{R_1''}\right) \sin\alpha'' \cdot \cos\alpha''. \tag{15}$$

Substituiert man diese Werte (15) in Formel (13), so erhält man:

$$R_1 d \cdot \sin\alpha' \cos\alpha' = -R_1\delta \cdot \sin\alpha'' \cdot \cos\alpha'' \tag{16}$$

Aus (13) und (16) folgt weiter

$$T_1 d \cdot \sin\alpha' \cdot \cos\alpha' = T_1 \delta \sin\alpha'' \cdot \cos\alpha''. \tag{16}$$

Das ergibt sich auch direkt aus (15).

In der erwähnten Arbeit in den Mitteilungen der Mathematischen Gesellschaft in Hamburg werden die Formeln (13) und (16) direkt bewiesen; auch wird dort Formel (15) als Definitionsgleichung einer Indikatrix der geodätischen Torsion gedeutet.

§ 5. Transformation der Tangenten von F_1', F_1'' in Tangentialkugeln von F_2. Konjugierte Tangenten und adjungierte Tangentialkugeln.

Eine Tangente der Flächen F_1', F_1'' im Punkte P_1', P_1'' hat die Koordinaten:

$$(1)\quad a_1 = x_1,\quad b_1 = y_1,\quad c_1 = z_1,\quad \alpha_1 = \frac{dx_1}{ds_1},\quad \beta = \frac{dy_1}{ds_1},\quad \gamma = \frac{dz_1}{ds_1},$$

Nach (2), (3), § 1 geht dieselbe also über in eine Kugel mit den Koordinaten:

$$(2)\quad \begin{cases} x_2' = \dfrac{dy_1 + x_1\,dz_1 - z_1\,dx_1}{2\,dz_1}, & i\,y_2' = \dfrac{-dy_1 + x_1\,dz_1 - z_1\,dx_1}{2\cdot dz_1}, \\ z_2' = \dfrac{-dx_1 + y_1\,dz_1 - z_1\,dy_1}{2\,dz_1}, & r_2 = \pm\dfrac{-dx_1 + z_1\,dy_1 - y_1\,dz_1}{2\cdot dz_1}. \end{cases}$$

Aus den Formeln (7^a) und (7^c) des § 1 und diesen Formeln (2) ergeben sich unter Beachtung der Relation (c) folgende Gleichungen:

$$\begin{aligned} x_2' + i\,y_2' &= x_2 + i\,y_2 + r_2\,(X_2 + i\,Y_2), \\ x_2' - i\,y_2' &= x_2 - i\,y_2 + r_2\,(X_2 - i\,Y_2), \\ z_2' &= z_2 + r_2\cdot Z_2. \end{aligned}$$

Daraus erhält man

$$(3)\quad \begin{aligned} x_2' &= x_2 + r_2\cdot X_2, \\ y_2' &= y_2 + r_2\cdot Y_2, \\ z_2' &= z_2 + r_2\cdot Z_2. \end{aligned}$$

Diese Gleichungen lehren, daß die Kugeln, welche man erhält, die Fläche F_2 im Punkte $P_2\,(x_2\,y_2\,z_2)$ berühren. Das liefert den bekannten

Satz 10: Die Tangenten der Fläche $F_1'\,(F_1'')$ im Punkte $P_1'\,(P_1'')$ gehen in Tangentialkugeln der Fläche F_2 im Punkte P_2 über.

Geht man von der Fläche F_1' aus, so hat man in (2) bei r_2 das Vorzeichen + zu wählen; transformiert man die Tangenten von F_1'', so gilt bei r_2 das Zeichen —. Betrachtet man solche Tangenten von F_1', F_1'', welche dem Komplex (4), § 1 angehören, für welche also

$$dB_1 \equiv -dx_1 + z_1\,dy_1 - y_1\,dz_1 = 0$$

ist, so erhält man $r_2 = 0$. Diese Tangenten gehen also in die Punktkugeln von F_2 über.

Wir wollen nun für die Radien r_2 weitere Ausdrücke ableiten. Dabei ist es zweckmäßig, zugleich zwei Tangenten und zwei Kugeln zu betrachten. Wir transformieren zwei konjugierte Tangenten des Punktes P_1' (P_1''). Den Radius der Kugel, welche aus der Tangente in der Richtung dx_1, dy_1, dz_1 entsteht, bezeichnen wir mit r_2'; den Radius der Kugel, welche aus der konjugierten Tangente mit der Richtung δx_1, δy_1, δz_1 hervorgeht, nennen wir r_2''. Der Richtung dx_1, dy_1, dz_1 entspricht eine Richtung dx_2, dy_2, dz_2 durch P_2, der Richtung δx_1, δy_1, δz_1 eine Richtung δx_2, δy_2, δz_2 durch P_2. Jeder dieser letzteren Richtungen ist eine Kugel zugeordnet. Da die Richtungen durch P_2 zueinander adjungiert sind, wollen wir die Kugeln als adjungierte Kugeln bezeichnen.

Dann hat die konjugierte Tangente die Koordinaten

$$(1)\quad a_1 = x_1,\quad b_1 = y_1,\quad c_1 = z_1,\quad \alpha_1 = \frac{\delta x_1}{\delta s_1},\quad \beta_1 = \frac{\delta y_1}{\delta s_1},\quad \gamma_1 = \frac{\delta z_1}{\delta s_1}.$$

Für die Radien r_2', r_2'' ergeben sich nach (2) daher die Formeln:

$$(4^a)\qquad \begin{cases} \frac{1}{r_2'} = \pm 2 \cdot \frac{dz_1}{-dx_1 + z_1\,dy_1 - y_1\,dz_1} = \pm 2 \cdot \frac{dD_1}{dB_1}, \\ \frac{1}{r_2''} = \pm 2 \cdot \frac{\delta z_1}{-\delta x_1 + z_1\,\delta y_1 - y_1\,\delta z_1} = \pm 2 \cdot \frac{\delta D_1}{\delta B_1}. \end{cases}$$

Vergleiche die Definitionen (1), § 2.

Den Formeln (9ª), § 4 entsprechend gelten nun folgende Formeln:

$$dA_1 = -\nu \cdot \delta B_1, \qquad dC_1 = -\nu \cdot \delta D_1,$$
$$\delta A_1 = -\mu \cdot dB_1, \qquad \delta C_1 = -\mu \cdot dD_1.$$

Infolgedessen ergibt sich:

$$(4^b)\qquad \begin{cases} \frac{1}{r_2'} = \pm 2 \cdot \frac{dD_1}{dB_1} = \pm 2 \cdot \frac{\delta C_1}{\delta A_1}, \\ \frac{1}{r_2''} = \pm 2 \cdot \frac{\delta D_1}{\delta B_1} = \pm 2 \cdot \frac{dC_1}{dA_1}. \end{cases}$$

Nach (5), § 2 folgt hieraus:

$$(4^c)\qquad \begin{cases} \frac{1}{r_2'} = + \frac{dD_2}{dB_2} = + \frac{\delta C_2}{\delta A_2}, \\ \frac{1}{r_2''} = + \frac{\delta D_2}{\delta B_2} = + \frac{dC_2}{dA_2}. \end{cases}$$

Nach den Definitionen (3), § 2 ist also:

$$(5)\qquad \begin{cases} \frac{1}{r_2'} = + \frac{dD_2}{dB_2} = + \frac{i(X_2\,dY_2 - Y_2\,dX_2) \pm dZ_2}{i(X_2\,dy_2 - Y_2\,dx_2) \pm dz_2}, \\ \frac{1}{r_2''} = + \frac{dC_2}{dA_2} = + \frac{-i(X_2\,dY_2 - Y_2\,dX_2) \pm dZ_2}{-i(X_2\,dy_2 - Y_2\,dz_2) \pm dz_2}. \end{cases}$$

Damit sind r_2' und r_2'' bereits durch Größen ausgedrückt, welche sich auf die Fläche F_2 beziehen.

Aus den Formeln (14), § 2 ergibt sich

$$(6)\qquad \begin{cases} \dfrac{\sum dX_2\,dx_2}{\sum dx_2^2} = +\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{dC_2}{dA_2}+\dfrac{dD_2}{dB_2}\right) = +\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{r_2'}+\dfrac{1}{r_2''}\right), \\ \dfrac{\sum dX_2^2}{\sum dx_2^2} = \dfrac{dC_2}{dA_2}\cdot\dfrac{dD_2}{dB_2} = \dfrac{1}{r_2'}\cdot\dfrac{1}{r_2''}. \end{cases}$$

Aus den Formeln (5) und (6) ergeben sich zwei Relationen zwischen $X_2\,Y_2\,Z_2$, $dX_2\,dY_2\,dZ_2$, $dx_2\,dy_2\,dz_2$, die erfüllt sind, sobald die Relationen (a), (b) und (c) bestehen. Die erste Formel (6) kann man nun schreiben:

$$(7)\qquad \frac{1}{2}\left(\frac{1}{r_2'}+\frac{1}{r_2''}\right) = \frac{1}{R_2 d}.$$

Aus den beiden Formeln (6) ergibt sich:

$$\frac{1}{4}\left(\frac{1}{r_2''}-\frac{1}{r_2'}\right)^2 = \left(\frac{\sum dX_2\,dx_2}{\sum dx_2^2}\right)^2 - \frac{\sum dX_2^2}{\sum dx_2^2}$$

und hieraus

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{r_2''}-\frac{1}{r_2'}\right) = \pm\sqrt{\left(\frac{\sum dX_2\,dx_2}{\sum dx_2^2}\right)^2 - \frac{\sum dX_2^2}{\sum dx_2^2}}$$
$$= \pm i\frac{1}{\sum dx_2^2}\sqrt{\sum dX_2^2\cdot\sum dx_2^2 - \left(\sum dX_2\,dx_2\right)^2}.$$

Nimmt man in Formel (2), § 4 die Vorzeichen unverändert, so wird also:

$$(7)\qquad \frac{1}{2}\left(\frac{1}{r_2'}-\frac{1}{r_2''}\right) = +i\,\frac{1}{T_2 d}.$$

Aus den beiden Formeln (7) folgt:

$$(8^a)\qquad \begin{cases} \dfrac{1}{r_2'} = \dfrac{1}{R_2 d} + i\,\dfrac{1}{T_2 d}, \\ \dfrac{1}{r_2''} = \dfrac{1}{R_2 d} - i\,\dfrac{1}{T_2 d}. \end{cases}$$

Vermöge (20), § 3 und (5), § 4 ist auch

$$(8^b)\qquad \begin{cases} \dfrac{1}{r_2'} = \dfrac{1}{R_2 \delta} - i\,\dfrac{1}{T_2 \delta}, \\ \dfrac{1}{r_2''} = \dfrac{1}{R_2 \delta} + i\,\dfrac{1}{T_2 \delta}. \end{cases}$$

Eliminiert man r_2' oder r_2'' aus der Formel (6), so findet man, daß r_2' und r_2'' beide der Gleichung

$$(9) \qquad \left(\frac{1}{r_2}\right)^2 \cdot \sum dx_2^2 - 2\frac{1}{r_2}\sum dX_2\, dx_2 + \sum dX_2^2 = 0$$

oder

$$(9) \qquad r_2^2 \cdot \sum dX_2^2 - 2r_2 \cdot \sum dX_2\, dx_2 + \sum dX_2^2 = 0$$

genügen. Die Formeln (8) kann man in folgendem Satz aussprechen:

Satz 11[a]: Die Krümmungen zweier adjungierten Kugeln sind konjugiert komplexe Größen, welche sich aus der Krümmung und der Torsion einer derjenigen geodätischen Linien zusammensetzen, welche in den betrachteten adjungierten Richtungen durch den Flächenpunkt gehen.

Aus den Formeln (8) folgt

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{r_2'} + \frac{1}{r_2''}\right) = \frac{1}{R_2 d}$$

$$\frac{1}{r_2'} \cdot \frac{1}{r_2''} = \left(\frac{1}{R_2 d} + i\frac{1}{T_2 d}\right)\left(\frac{1}{R_2 d} - i\frac{1}{T_2 d}\right) = \frac{1}{R_2 d^2} + \frac{1}{T_2 d^2} = \frac{\sum dX_2^2}{\sum dx_2^2}.$$

Setzt man $\frac{1}{P_2 d} = +\sqrt{\frac{1}{R_2^2} + \frac{1}{T_2^2}}$, und bezeichnet $\frac{1}{P_2 d}$ als die totale Krümmung einer Raumkurve, so erhält man also:

$$(10) \qquad \begin{aligned} \frac{1}{R_2 d} &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{r_2'} + \frac{1}{r_2''}\right) \\ \frac{1}{P_2 d} &= \sqrt{\frac{1}{r_2'} \cdot \frac{1}{r_2''}}. \end{aligned}$$

Es ist zu beachten, daß diese Größen reell sind. Den Lehrsatz 8 kann man daher durch die folgenden ihm äquivalenten Sätze ersetzen:

Lehrsätze 11[b]: Das arithmetische Mittel aus den Krümmungen zweier adjungierten Kugeln ist gleich der Krümmung der zu den betrachteten adjungierten Richtungen gehörigen geodätischen Linien. Das geometrische Mittel aus den Krümmungen dieser Kugeln ist gleich der totalen Krümmung der geodätischen Linien.

Nun war nach (7), § 5

$$\frac{1}{r_2'} + \frac{1}{r_2''} = 2\frac{1}{R_2};$$

aus der zweiten Formel (6) findet man

$$\frac{1}{r_2'}\cdot\frac{1}{r_2''} = -\frac{1}{R_2'\cdot R_2''} + \left(\frac{1}{R_2'}+\frac{1}{R_2''}\right)\cdot\frac{1}{R_2}\cdot$$

Eliminiert man aus diesen Formeln R_2, so erhält man:

$$\frac{1}{r_2'}\cdot\frac{1}{r_2''} + \frac{1}{R_2'R_2''} = \tfrac{1}{2}\left(\frac{1}{r_2'}+\frac{1}{r_2''}\right)\left(\frac{1}{R_2'}+\frac{1}{R_2''}\right)$$

$$2R_2'R_2'' + 2r_2'r_2'' = (R_2'+R_2'')(r_2'+r_2'')$$

$$(R_2'-r_2')(R_2''-r_2'') + (R_2'-r_2'')(R_2''-r_2') = 0$$

$$\frac{(R_2'-r_2')(R_2''-r_2'')}{(R_2'-r_2'')(R_2''-r_2')} = -1.$$

$$\frac{R_2'-r_2'}{R_2'-r_2''} : \frac{R_2''-r_2'}{R_2''-r_2''} = -1. \tag{12}$$

Es gilt also der Satz:

Satz 12: Die Mittelpunkte je zweier adjungierten Kugeln eines Flächenpunktes liegen harmonisch zu den Hauptkrümmungsmittelpunkten desselben.

Nach Satz 1 gehen Haupttangentenkurven von F_1 in Krümmungslinien von F_2 über. Für letztere ist nun $R_2 = R_2'$ oder $R_2 = R_2''$. Setzt man das in

$$\frac{1}{r_2} = \frac{1}{R_2} \mp \sqrt{\left(\frac{1}{R_2}-\frac{1}{R_2'}\right)\left(\frac{1}{R_2}-\frac{1}{R_2''}\right)}$$

ein, so erhält man

$$r_2 = R_2' \quad \text{oder} \quad r_2 = R_2''.$$

Daher gilt der Satz:

Satz 13: Haupttangenten von F_1', F_1'' gehen in Hauptkrümmungskugeln von F_2 über.

Nach den Definitionen auf S. 200 können wir ferner den Satz aussprechen:

Satz 14: Konjugierte Tangenten von F_1', F_1'' gehen in adjungierte Kugeln von F_2 über.

Über einen Satz der Kurventheorie.

Von G. Lony.

Die Koordinaten x, y, z des laufenden Punktes einer Raumkurve seien dargestellt als Funktionen des Bogens s. Ist ξ, η, ζ der Krümmungsmittelpunkt, r der Krümmungsradius, ϑ' die Torsion, ϱ der Radius der Schmiegungskugel, σ der Bogen der Kurve aufeinanderfolgender Krümmungsmittelpunkte (die kurz als r-Kurve bezeichnet werden möge), und drückt man die Differentiation nach s durch Striche aus, so hat man folgende Gleichungen:

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = 1,$$

$$x'x'' + y'y'' + z'z'' = 0,$$

$$\frac{1}{r^2} = x''^2 + y''^2 + z''^2,$$

$$\xi = x + r^2x'', \quad \eta = y + r^2y'', \quad \zeta = z + r^2z'',$$

$$\frac{\vartheta'}{r^2} \equiv \Delta = \begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \\ x''' & y''' & z''' \end{vmatrix},$$

$$\varrho^2\Delta^2 + \frac{1}{r^4} = x'''^2 + y'''^2 + z'''^2,$$

$$\sigma' = r^2\Delta\varrho.$$

Für den Fall nicht ebener Kurven von konstanter Krümmung ($\Delta \neq 0$, r = constans) ergeben sich außerdem folgende Beziehungen:

$$x''^2 + y''^2 + z''^2 = \text{const.},$$

$$x''x''' + y''y''' + z''z''' = 0,$$

$$x''x^{IV} + y''y^{IV} + z''z^{IV} = -\left(\varrho^2\Delta^2 + \frac{1}{r^4}\right),$$

$$x'x''' + y'y''' + z'z''' = -\frac{1}{r^2}\ (\text{const.}),$$

$$x'x^{IV} + y'y^{IV} + z'z^{IV} = 0,$$

$$x'''x^{IV} + y'''y^{IV} + z'''z^{IV} = \varrho\varrho'\Delta^2 + \varrho^2\Delta\Delta';$$

durch Ausführung der Determinantenmultiplikation

$$\Delta'^2 = \begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \\ x^{IV} & y^{IV} & z^{IV} \end{vmatrix}^2$$

erhält man endlich:

$$x^{IV\,2} + y^{IV\,2} + z^{IV\,2} = \Delta'^2r^2 + r^2\left(\varrho^2\Delta^2 + \frac{1}{r^4}\right)^2.$$

Um den Krümmungsradius $\bar{r}$ und den Krümmungsmittelpunkt $\bar{\xi}$, $\bar{\eta}$, $\bar{\zeta}$ der r-Kurve zu finden, differenzieren wir ξ, η, ζ zweimal nach σ. Die Differentiation nach σ möge durch übergesetzte Punkte angedeutet werden. Man findet:

$$\dot{\xi} = \frac{x' + r^2 x'''}{\sigma'}, \quad \dot{\eta} = \frac{y' + r^2 y'''}{\sigma'}, \quad \dot{\zeta} = \frac{z' + r^2 z'''}{\sigma'};$$

$$\ddot{\xi} = \frac{x'' + r^2 x^{IV}}{\sigma'^2} - \frac{x' + r^2 x'''}{\sigma'^3} \cdot \sigma'', \quad \ddot{\eta} = \frac{y'' + r^2 y^{IV}}{\sigma'^2} - \frac{y' + r^2 y'''}{\sigma'^3} \cdot \sigma'',$$

$$\ddot{\zeta} = \frac{z'' + r^2 z^{IV}}{\sigma'^2} - \frac{z' + r^2 z'''}{\sigma'^3} \cdot \sigma''.$$

Daraus folgt:

$$\frac{1}{\bar{r}^2} = \ddot{\xi}^2 + \ddot{\eta}^2 + \ddot{\zeta}^2 = \frac{1}{r^2},$$

$$\bar{r} = r.$$

$$\bar{\xi} = \xi + r^2 \ddot{\xi} = x + r^2 x'' + r^2 \cdot \frac{x'' + r^2 x^{IV}}{\sigma'^2} - r^2 \frac{x' + r^2 x'''}{\sigma'^3} \cdot \sigma'' \equiv x + A,$$

$$\bar{\eta} = \eta + r^2 \ddot{\eta} = y + r^2 y'' + r^2 \cdot \frac{y'' + r^2 y^{IV}}{\sigma'^2} - r^2 \frac{y' + r^2 y'''}{\sigma'^3} \cdot \sigma'' \equiv y + B,$$

$$\bar{\zeta} = \zeta + r^2 \ddot{\zeta} = z + r^2 z'' + r^2 \cdot \frac{z'' + r^2 z^{IV}}{\sigma'^2} - r^2 \frac{z' + r^2 z'''}{\sigma'^3} \cdot \sigma'' \equiv z + C.$$

Komponiert man die Werte A, B, C der Reihe nach mit x', y' z'; x'', y'', z''; x''', y''', z''', so findet man:

$$Ax' + By' + Cz' = 0,$$
$$Ax'' + By'' + Cz'' = 0,$$
$$Ax''' + By''' + Cz''' = 0.$$

Da $\Delta \neq 0$ vorausgesetzt wurde, so folgt

$$A = B = C = 0,$$
$$\bar{\xi} = x, \quad \bar{\eta} = y, \quad \bar{\zeta} = z;$$

d. h.: **Hat eine Raumkurve konstanten Krümmungsradius, so ist sie die Krümmungsmittelpunktkurve ihrer Krümmungsmittelpunktkurve.**

Diese Kurven stellen einen besonderen Fall der von Berstrand zuerst untersuchten und nach ihm benannten Raumkurven dar.

Über den Begriff des Geschlechts bei den quadratischen Formen.

Von Otto Pund.

Gauß hat in den Disquisitiones arithmeticae den Begriff der Geschlechter der binären quadratischen Formen in einer für die Anwendung unmittelbar geeigneten Gestalt gegeben, da man auf Grund seiner Charakterenkriterien sofort entscheiden kann, ob zwei gegebene quadratische Formen demselben Geschlechte angehören oder nicht. Außerdem hat diese Darstellung den Vorzug, daß sie sich auf einige sehr einfache Sätze gründet und so mit dem geringsten Aufwand von Mitteln das Ziel erreicht. Man kann aber auch auf eine andere, allerdings nicht so bequeme Weise zu dem Begriffe des Geschlechtes gelangen, wenn man sich die Frage vorlegt, unter welchen Bedingungen zwei gegebene quadratische Formen durch eine unimodulare lineare Substitution mit rationalen Koeffizienten ineinander transformiert werden können, und ich beabsichtige hier zu zeigen, wie man so auf einem nicht sehr beschwerlichen Wege zu den Gaußschen Kriterien gelangen kann.

Zunächst bringen wir eine beliebige lineare Substitution

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

mit rationalen Koeffizienten a, b, c, d und der Determinante $ad - bc = 1$ in eine feste Gestalt. Ist das aus ihnen gebildete Modulsystem

$$(a, b, c, d) = e,$$

so können wir

$$a = \alpha e, \quad b = \beta e, \quad c = \gamma e, \quad d = \delta e$$

setzen, wo $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ganze Zahlen mit dem größten gemeinschaftlichen Teiler

$$(\alpha, \beta, \gamma, \delta) = 1$$

sind, und dann wird

$$ad - bc = e^2 (\alpha\delta - \beta\gamma) = 1.$$

Da also

$$\frac{1}{e^2} = \alpha\delta - \beta\gamma$$

eine ganze Zahl und ein Quadrat ist, so muß auch

$$\frac{1}{e} = \varepsilon$$

eine ganze Zahl sein. Unsere Substitution läßt sich also auf die Form

$$\begin{pmatrix} \frac{\alpha}{\varepsilon} & \frac{\beta}{\varepsilon} \\ \frac{\gamma}{\varepsilon} & \frac{\delta}{\varepsilon} \end{pmatrix}$$

bringen, wo α, β, γ, δ ganze Zahlen ohne gemeinschaftlichen Teiler sind, deren Determinante

$$\alpha\delta - \beta\gamma = \varepsilon^2 \tag{1}$$

ein Quadrat ist.

Die Bedingungsgleichungen dafür, daß zwei primitive quadratische Formen $ax^2 + 2bxy + cy^2$ und $ax^2 + 2b'xy + c'y^2$ durch eine Substitution der betrachteten Art ineinander übergeführt werden können, wollen wir in der Gestalt

$$\begin{aligned} a'\varepsilon^2 &= a\alpha^2 + 2b\alpha\gamma + c\gamma^2, \\ b'\varepsilon^2 &= a\alpha\beta + b(\alpha\delta + \beta\gamma) + c\gamma\delta, \\ c'\varepsilon^2 &= a\beta^2 + 2b\beta\delta + c\delta^2. \end{aligned} \tag{2}$$

zu Grunde legen. Aus ihnen ergibt sich sofort, daß die beiden Formen dieselbe Diskriminante

$$d = b^2 - ac = b'^2 - a'c' \tag{3}$$

haben müssen. Von den Bedingungsgleichungen kann man die erste durch Multiplikation mit a unter Einführung von

$$a\alpha + b\gamma = \eta \tag{4}$$

verwandeln in

$$aa'\varepsilon^2 + d\gamma^2 = \eta^2 \tag{5}$$

und aus ihnen ferner noch leicht die beiden linearen Gleichungen

$$\begin{aligned} a\alpha + (b + b')\gamma &= a'\delta, \\ (b - b')\alpha + c\gamma &= -a'\beta \end{aligned}$$

ableiten, die durch Einführung von η in

$$\eta + b'\gamma = a'\delta, \tag{6}$$

$$(b - b')\eta + (bb' - d)\gamma = -aa'\beta \tag{7}$$

übergehen. Es kommt also alles darauf an, die ternäre diophantische Gleichung (5) so zu lösen, daß

$$\eta - b\gamma \equiv 0\,(a), \quad \eta + b'\gamma \equiv 0\,(a'), \tag{8}$$

$$(b - b')\eta + (bb' - d)\gamma \equiv 0\,(aa') \tag{9}$$

wird. Denn ist ein diese Bedingungen befriedigendes Lösungssystem ε, γ, η vorhanden, so kann man zunächst aus (4), (6), (7) α, δ, β als ganze Zahlen gewinnen und nun leicht rückwärts auf das Bestehen der Gleichungen (1), (2) mit Hilfe von (3) schließen, so daß damit

die Transformierbarkeit der beiden Formen ineinander durch eine unimodulare Substitution gewährleistet wird.

Die fernere Untersuchung wird nun beträchtlich dadurch erleichtert, daß man die ursprünglich gegebenen quadratischen Formen durch solche ersetzen kann, die ihnen äquivalent sind, d. h. aus ihnen durch eine unimodulare lineare Substitution mit ganzzahligen Koeffizienten hervorgehen. Dadurch wird offenbar an der Transformierbarkeit nichts geändert. Da man infolgedessen über die ersten Koeffizienten a und a' so verfügen kann, daß sie (bei der vorausgesetzten Primitivität der Formen) zu jeder beliebigen Zahl teilerfremd sind, so ist es gestattet, die größten gemeinschaftlichen Teiler (a, a'), $(a, 2d)$, $(a', 2d)$ gleich der Einheit anzunehmen, woraus sich dann wegen (3) auch (a, b), (a', b') sowie $(aa', d) = 1$ ergeben.

Die hinreichende und notwendige Bedingung für die Lösbarkeit der diophantischen Gleichung (5) lautet aber unter der Voraussetzung $(aa', d) = 1$: Es muß erstens d quadratischer Rest von aa', zweitens aa' quadratischer Rest von d und drittens, wenn $d < 0$ ist, $aa' > 0$ sein; und zwar gibt es dann Lösungen ε, γ, η in relativen Primzahlen der Art, daß bei

$$\xi^2 \equiv d\,(aa') \tag{10}$$

auch

$$\xi\eta \equiv d\gamma\,(aa') \tag{11}$$

ist.

Von diesen Bedingungen sind aber nur die zweite und dritte wesentlich; denn die erste ist infolge unserer Voraussetzungen von selbst erfüllt; wir können nämlich, wenn nur die zweite und dritte Bedingung vorausgesetzt werden, nicht nur ihr, sondern auch den Kongruenzen (8), (9) genügen, wenn wir ξ so bestimmen, daß

$$\xi \equiv b\,(a), \qquad \xi \equiv -\,b'\,(a') \tag{12}$$

wird. Aus (11) erhält man dann

$$b\eta \equiv b^2\gamma\,(a), \qquad -\,b'\eta \equiv b'^2\gamma\,(a')$$

und hiermit (8) wegen $(a, b) = (a', b') = 1$, woraus durch Multiplikation und Reduktion mit Hilfe von (5)

$$\gamma\,[(b - b')\,\eta + (bb' - d)\,\gamma] \equiv 0 \;\; (aa')$$

und damit (9) folgt, wenn ε, η, γ relative Primzahlen und somit $(\gamma, aa') = 1$ ist.

Die Lösbarkeit unserer Aufgabe ist somit davon allein abhängig gemacht, daß aa' quadratischer Rest von d und bei $d < 0$ stets $aa' > 0$ ist. Das erstere ist gleichwertig damit, daß für jede in d aufgehende ungerade Primzahl p das Symbol

$$\left(\frac{aa'}{p}\right) = 1$$

und somit

$$\left(\frac{a}{p}\right) = \left(\frac{a'}{p}\right)$$

und ferner bei $d \equiv 4\ (8)$ und $d \equiv 0\ (8)$ entsprechend $aa' \equiv 1\ (4)$ und $aa' \equiv 1\ (8)$ ist; man kann auch leicht daraus schließen, daß bei $l = 4\ (8)$ das Symbol $(-1)^{\frac{n-1}{2}}$, bei $d \equiv 0\ (8)$ die beiden Symbole $(-1)^{\frac{n-1}{2}}$ und $(-1)^{\frac{n^2-1}{8}}$ gleiche Werte erhalten müssen, wenn man für n resp. a und a' setzt.

Die Bedingung dafür, daß, wenn $d < 0$ ist, $aa' > 0$ sein muß, läßt sich nun gleichfalls noch in eine andere Form bringen mit Hilfe des Reziprozitätsgesetzes für die quadratischen Reste. Ist n eine zu d teilerfremde ungerade Zahl und P das Produkt der sämtlichen in d aufgehenden positiven ungeraden Primzahlen von ungerader Multiplizität, so ist

$$\left(\frac{d}{n}\right) = \varrho\sigma^{\frac{n-1}{2}}\tau^{\frac{n^2-1}{8}}\left(\frac{n}{P}\right),$$

wo ϱ, σ, τ auf folgende Weise bestimmt sind: Sind d und n beide negativ, so ist $\varrho = -1$, in allen anderen Fällen $= +1$; bei $d \equiv 1\ (4)$ oder $\equiv 2\ (8)$ ist $\sigma = +1$, bei $d \equiv 3\ (4)$ oder $\equiv 6\ (8)$ ist $\sigma = -1$; je nachdem d ungerade oder gerade ist, ist $\tau = +1$ oder $= -1$. Da diese Formel für den Fall, daß n positiv ist, von Dirichlet aufgestellt ist, so brauche ich hier nur anzugeben, wie sie sich auf den Fall, daß $n = -n'$ negativ ist, ausdehnen läßt. Man erhält dann nämlich

$$\left(\frac{d}{n}\right) = \left(\frac{d}{n'}\right) = \sigma^{\frac{n'-1}{2}}\tau^{\frac{n'^2-1}{8}}\left(\frac{n'}{P}\right) = \sigma\cdot\sigma^{\frac{n-1}{2}}\tau^{\frac{n^2-1}{8}}\left(\frac{n}{P}\right)\left(\frac{-1}{P}\right).$$

Der auf der rechten Seite auftretende Faktor $\left(\frac{-1}{P}\right)$ (der, da P positiv angenommen wird, auch gleich $(-1)^{\frac{P-1}{2}}$ ist) ist für $P \equiv 1\ (4)$ gleich $+1$, aber für $P \equiv 3\ (4)$ gleich -1. Wenn d also positiv ist, so ist er bei $d \equiv 1\ (4)$ und $d \equiv 2\ (8)$ gleich $+1$, bei $d \equiv 3\ (4)$ und $d \equiv 6\ (8)$ negativ, genau wie σ; es ergibt sich dann also $\varrho = +1$, wie oben behauptet. Ist aber d negativ, so verhält er sich entgegengesetzt wie σ, ist nämlich gleich $+1$, wenn $d \equiv 3\ (4)$ und $\equiv 6\ (8)$ und gleich -1 bei $d \equiv 1\ (4)$ und $d \equiv 2\ (8)$; also ist dann stets $\varrho = -1$.

Setzen wir nun in die erhaltene Formel $n = aa'$ ein und drücken die Bedingung, daß aa' und d nicht gleichzeitig negativ sein dürfen, durch $\varrho = +1$ aus, so ergibt sich, da $\left(\frac{d}{aa'}\right)$ und $\left(\frac{aa'}{P}\right)$ positiv sind, daß das Symbol

$$\sigma^{\frac{n-1}{2}} \tau^{\frac{n^2-1}{8}}$$

für $n = aa'$ den Wert $+1$ erhält, oder anders ausgedrückt, gleiche Werte hat, ob man für n a oder a' einsetzt. Eine wirkliche Beschränkung tritt hierbei nur in den Fällen auf, $d \equiv 3$ (4), $d = 2$ (8), $d \equiv 6$ (8), denen die Charaktere $(-1)^{\frac{n-1}{2}}$, $(-1)^{\frac{n^2-1}{8}}$ und $(-1)^{\frac{n-1}{2}+\frac{n^2-1}{8}}$ entsprechen.

Es bleibt jetzt nur noch der letzte Schritt übrig, nämlich die Beschränkungen, denen wir bisher a und a' unterworfen haben, wieder aufzuheben, und das kann am einfachsten durch die Betrachtung geschehen, mit der Gauß (Disq. ar. 229) seine Theorie einleitet.

Bemerkung zur Berechnung des Anfangsgliedes der allgemeinen hyperelliptischen σ-Reihe.

Von J. Schröder in Hamburg.

Der Anfangsterm der Potenzentwicklung einer zu beliebigem μ gehörigen hyperelliptischen σ-Funktion ist von den Herren Klein[1]) und Burkhardt[2]) auf verschiedenem Wege ermittelt worden; Herr Klein leitet den genannten Ausdruck auf rein invariantentheoretischem Wege her, während Herr Burkhardt ihn durch direkte Entwicklung aus der von Herrn Klein gegebenen Definition der σ-Funktionen am algebraischen Gebilde gewinnt. Herr Burkhardt untersucht, wie der Term niedrigster Ordnung der σ-Entwicklung beschaffen ist, wenn die entsprechenden algebraischen Argumente $x^{(i)}$ und $y^{(i)}$ konsekutiv werden. Dabei behält Herr Burkhardt die Festsetzung bei, daß jedes der p Argumente w_α der σ-Funktion sich aus p Teilintegralen zusammensetzt. Nimmt man dagegen für die Anzahl ν der Teilintegrale den kleinsten zulässigen Wert $\nu = \mu$, so ist die Herleitung des Anfangsterms der gedachten σ-Reihe einer gewissen Vereinfachung fähig, wie die folgende Darlegung zeigen will.

---

1) Math. Ann. Bd. 32 p. 373 ff.

2) Math. Ann. Bd. 32 p. 437 ff.

1.

Die allgemeine Definitionsgleichung der σ-Funktionen lautet bekanntlich[1]):

$$\sigma(x', \cdots x^{(\nu)};\ y', \cdots y^{(\nu)}) = \frac{(-1)^{\nu\mu+\frac{\mu(\mu+1)}{2}}}{2^{\nu-\mu}} \cdot D_{\varphi_{\mu+1-2\mu}\cdot\psi_{p+1+2\mu}} \cdot M.$$

Hierin muß, damit die Determinante D ihre Bedeutung nicht verliert, die Zahl ν mindestens gleich μ sein. Wählt man $\nu = \mu$, so ergibt sich[2]):

$$\sigma(x' \cdots x^{(\mu)};\ y' \cdots y^{(\mu)}) = (-1)^{\frac{\mu(\mu+1)}{2}} \cdot \prod_1^\mu{}_i \left(\sqrt{\varphi(x^{(i)})} \cdot \sqrt{\varphi(y^{(i)})}\right) \cdot \begin{vmatrix} x_1'^{2\mu-1} & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ x_1^{(\mu)2\mu-1} & \cdots & 1 \\ y_1'^{2\mu-1} & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ y^{(\mu)2\mu-1} & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

$$\cdot \frac{\prod_1^\mu{}_i \prod_1^\mu{}_k \Omega(x^{(i)}y^{(k)})}{\prod_1^\mu{}_i \prod_1^\mu{}_k (x^{(i)}y^{(k)}) \cdot \prod_1^\mu{}_i \prod_1^\mu{}_k{}' \left(\Omega(x^{(i)}x^{(k)}) \cdot \Omega(y^{(i)}y^{(k)})\right)},$$

wo in dem akzentuierten Doppelprodukte die Kombinationen $i = k$ ausgeschlossen sind.

Setzt man für den Primausdruck seinen Wert ein, so wird nach leichter Umformung:

$$\sigma(x', \cdots x^{(\mu)};\ y', \cdots y^{(\mu)}) =$$

$$(-1)^{\frac{\mu(\mu+1)}{2}} \cdot \prod_1^\mu{}_i \prod_1^\mu{}_k (x^{(i)}y^{(k)}) \cdot \prod_1^\mu{}_i \left(\sqrt{\varphi(x^{(i)})} \cdot \sqrt{\varphi(y^{(i)})}\right)$$

$$\cdot \frac{\prod_1^\mu{}_i \prod_1^\mu{}_k{}' \left(\sqrt[4]{f(x^{(i)})}\sqrt[4]{f(x^{(k)})}\sqrt[4]{f(y^{(i)})}\sqrt[4]{f(y^{(k)})}\right)}{\prod_1^\mu{}_i \prod_1^\mu{}_k \left(\sqrt[4]{f(x^{(i)})}\sqrt[4]{f(y^{(k)})}\right)} \cdot \frac{\prod_1^\mu{}_i \prod_1^\mu{}_k e^{\frac{1}{2}Q^{\bar{x}^{(i)}\bar{y}^{(k)}}_{x^{(i)}y^{(k)}}}}{\prod_1^\mu{}_i \prod_1^\mu{}_k{}' e^{\frac{1}{2}\left[Q^{\bar{x}^{(i)}\bar{x}^{(k)}}_{x^{(i)}x^{(k)}} + Q^{\bar{y}^{(i)}\bar{y}^{(k)}}_{y^{(i)}y^{(k)}}\right]}}.$$

Da nun:

$$\prod_1^\mu{}_i \prod_1^\mu{}_k{}' \left(\sqrt[4]{f(x^{(i)})}\sqrt[4]{f(x^{(k)})} \cdot \sqrt[4]{f(y^{(i)})} \cdot \sqrt[4]{f(y^{(k)})}\right) = \left[\prod_1^\mu{}_i \left(\sqrt[4]{f(x^{(i)})} \cdot \sqrt[4]{f(y^{(i)})}\right)\right]^{\mu-1}$$

---

1) Math. Ann. Bd. 32 p 418.

2) Math. Ann. Bd. 32 p. 368 und Diss. d. Verf. (Göttingen 1890) p. 58.

und

$$\prod_1^{\mu}{}_k \prod_1^{\mu}{}_i \left(\sqrt[4]{f(x^{(i)})} \cdot \sqrt[4]{f(y^{(k)})}\right) = \left[\prod_1^{\mu}{}_i \sqrt[4]{f(x^{(i)})} \cdot \sqrt[4]{f(y^{(i)})}\right]^{\mu}$$

ist, wird nunmehr wegen $f = \varphi \cdot \psi$:

$$\sigma(x_1' \cdots x^{(\mu)};\ y' \cdots y^{(\mu)}) =$$

$$(-1)^{\frac{\mu(\mu+1)}{2}} \cdot \prod_1^{\mu}{}_i \cdot \frac{\sqrt[4]{\varphi(x^{(i)})}\sqrt[4]{\varphi(y^{(i)})}}{\sqrt[4]{\psi(x^{(i)})}\sqrt[4]{\psi(y^{(i)})}} \cdot \frac{\prod_1^{\mu}{}_i \prod_1^{\mu}{}_k (x^{(i)} y^{(k)}) \cdot e^{\frac{1}{2} Q^{\overline{x}^{(i)}\overline{y}^{(k)}}_{x^{(i)}\,y^{(k)}}}}{\prod_1^{\mu}{}_i \prod_1^{\mu'}{}_k e^{\frac{1}{2}\left[Q^{\overline{x}^{(i)}\overline{y}^{(k)}}_{x^{(i)}\,y^{(k)}} + Q^{\overline{x}^{(i)}\overline{y}^{(k)}}_{x^{(i)}\,y^{(k)}}\right]}}.$$

2.

Setzt man jetzt:

$$x^{(i)} = y^{(i)} + dy^{(i)} \qquad (i = 1, 2, \cdots, \mu)$$

so wird:

$$\sigma(y + dy, y) = \sigma(y' + dy', \cdots, y^{(\mu)} + dy^{(\mu)};\ y' \cdots y^{(\mu)}) =$$

$$(-1)^{\frac{\mu(\mu+1)}{2}} \cdot e^{\frac{1}{2}E} \cdot \prod_1^{\mu}{}_i \frac{\sqrt[4]{\varphi(y^{(i)} + dy^{(i)})}\sqrt[4]{\varphi(y^{(i)})}}{\sqrt[4]{\psi(y^{(i)} + dy^{(i)})}\sqrt[4]{\psi(y^{(i)})}} \cdot \prod_1^{\mu}{}_i \prod_1^{\mu}{}_k (y^{(i)} + dy^{(i)},\ y^{(k)}).$$

Hierbei ist der gesamte Exponent von e der Kürze halber mit $\frac{1}{2}E$ bezeichnet; er kommt für unsere weiteren Absichten zunächst gar nicht in Betracht.

Aus dem letzten Faktor können nun für $i = k$ μ Faktoren herausgenommen werden, deren jeder von der ersten Ordnung unendlich klein ist. Um aus den übrigen Faktoren die Terme niedrigster Ordnung zu erhalten, müssen wir zunächst ihre Entwicklungen nach den dy angeben; dieselben lauten:

$$\sqrt[4]{\varphi(y^{(i)})}\sqrt[4]{\varphi(y^{(i)} + dy^{(i)})} =$$

$$\sqrt{\varphi(y^{(i)})}\left\{1 + \frac{\varphi'(y^{(i)})}{4\varphi(y^{(i)})}\, dy^{(i)} + \frac{1}{8\varphi(y^{(i)})}\left(\varphi''(y^{(i)}) - \tfrac{3}{4}\frac{\varphi'^2(y^{(i)})}{\varphi(y^{(i)})}\right) dy^{(i)2} + \cdots\right\}$$

$$\frac{1}{\sqrt[4]{\psi(y^{(i)})}\sqrt[4]{\psi(y^{(i)} + dy^{(i)})}} =$$

$$\frac{1}{\sqrt{\psi(y^{(i)})}}\left\{1 - \frac{\psi'(y^{(i)})}{4\psi(y^{(i)})} \cdot dy^{(i)} + \frac{1}{8\psi(y^{(i)})} \cdot \left(\tfrac{5}{4}\frac{\psi'^2(y^{(i)})}{\psi(y^{(i)})} - \psi''(y^{(i)})\right) dy^{(i)2} + \cdots\right\}.$$

$$e^{\frac{1}{2}E} = 1 + \tfrac{1}{2}E + \cdots$$

Hieraus entnehmen wir, daß der Anfangsterm in den $dy^{(i)}$ den folgenden Wert hat:

$$\mathfrak{G}_\mu = (-1)^\mu \cdot \prod_1^{\mu-1}{}_i \prod_{i+1}^{\mu}{}_k (y^{(i)} y^{(k)})^2 \cdot \prod_1^{\mu}{}_i \left(\frac{\sqrt{\varphi(y^{(i)})}}{\sqrt{\varphi(y^{(i)})}} \cdot dy^{(i)} \right).$$

ultipliziert man im zweiten Produkte im Zähler und Nenner mit $\sqrt{\varphi(y^{(i)})}$, so erhält man:

$$\mathfrak{G}_\mu = (-1)^\mu \prod_1^{\mu-1}{}_i \cdot \prod_{i+1}^{\mu}{}_k (y^{(i)} y^{(k)})^2 \cdot \prod_1^{\mu}{}_i \left(\varphi(y^{(i)}) \cdot \frac{dy^{(i)}}{\sqrt{f(y^{(i)})}} \right).$$

etzen wir hierin noch statt $dy^{(i)}$ das homogene Differential $-(y^{(i)} dy^{(i)})$ n, so lautet $\mathfrak{G}_\mu$ wie folgt:

$$\mathfrak{G}_\mu = \prod_1^{\mu-1}{}_i \prod_{i+1}^{\mu}{}_k (y^{(i)} y^{(k)})^2 \cdot \prod_1^{\mu}{}_i \left(\varphi(y^{(i)}) \cdot \frac{(y^{(i)} dy^{(i)})}{\sqrt{f(y^{(i)})}} \right).$$

ieser Ausdruck entspricht dem Ausdruck (126)[1]) in der Arbeit von errn Burkhardt; es fehlt bei uns allerdings das Summenzeichen auf r rechten Seite, aber auch mit Recht. Wir haben nämlich nur ne Kombination der μ Punkte $y', \cdots, y^{(\mu)}$ zur μ^{ten} Klasse und können mnach keine Summation über verschiedene Kombinationen ausführen, e es für $\nu > \mu$ immer der Fall ist.

Aus der von Herrn Burkhardt entwickelten Umsatzregel[2]) erbt sich, daß wir unseren zunächst für unendlich kleine Argumente bildeten Ausdruck $\mathfrak{G}_\mu$ nur dann in eine Funktion für endliche Werte r Argumente $w_1 \cdots w_p$ oder ihnen korrespondierenden χ umsetzen nnen, wenn wir betreffs der $y^{(i)}$ nicht über die eine Kombination r μ^{ten} Klasse, sondern über alle Variationen zur μ^{ten} Klasse mit iederholungen summieren. Wir haben demnach zu dem Ausdruck noch eine ganze Reihe ähnlicher Ausdrücke hinzuzufügen, um die plante Umsetzung ausführbar zu machen. So oft aber ein Term bildet wird, in dem zwei der $y^{(i)}$ oder auch mehrere von ihnen einder gleich sind, kommt dieser Ausdruck nicht in Betracht, da er ne weiteres verschwindet. Es bleiben also nur diejenigen Terme rig, in denen die μ Punkte $y', \cdots y^{(\mu)}$ permutiert sind. Alle diese rme sind aber gleichwertig. Wir haben demnach im ganzen $\mu!$ cht verschwindende Summanden und somit die Beziehung, daß das msatzfähige Γ_μ mit $\mathfrak{G}_\mu$ durch die Gleichung

$$\Gamma_\mu = \mu! \, \mathfrak{G}_\mu$$

rknüpft ist.

---

1) Math. Ann. Bd. 32 p. 440.
2) Math. Ann. Bd. 32 p. 441.

Γ_μ liefert aber nach der Umsetzung:

$$\Gamma_\mu = \prod_1^{\mu}{}_i (\varphi^{(i)}\chi^{(i)})^{p+1-2\mu} \cdot \prod_1^{1-\mu}{}_i \prod_{i+1}^{\mu}{}_k (\chi^{(i)}\chi^{(k)})^2.$$

Folglich lautet das Anfangsglied der allgemeinen σ-Reihe für endliche Werte der Argumente:

$$\mathfrak{G}_\mu(w_1, \cdots w_p) = \frac{1}{\mu!} \prod_1^{\mu}{}_i (\varphi^{(i)}\chi^{(i)})^{p+1-2\mu} \cdot \prod_1^{\mu-1}{}_i \prod_{i+1}^{\mu}{}_k (\chi^{(i)}\chi^{(k)})^2.$$

Eine Relation zwischen größten Ganzen.

Von J. Schröder in Hamburg.

Wir ziehen in der Ebene des in bekannter Weise konstruierten Teilerpunktsystems eine Kurve, die sich nicht selbst durchsetzt. Ihre Gleichung sei

$$f(x, y) = 0.$$

Die Anzahl der von dieser Kurve umschlossenen (bezw. zwischen ihr und den Achsen gelegenen) Teilerpunkte kann einmal so bestimmt werden, daß man die auf den einzelnen zur Abszissenachse parallelen Geraden $y = \nu$ ($\nu = 1, 2, 3, \cdots$) gelegenen Teilerpunkte abzählt; zweitens kann man so verfahren, daß man die Zahl der auf jeder durch den Anfangspunkt laufenden Geraden $x = \nu y$ ($\nu = 1, 2, 3, \cdots$) gelegenen Teilerpunkte feststellt.

Die Abszissen der α_ν reellen Schnittpunkte $P_1^{(\nu)}, P_2^{(\nu)}, \cdots, P_{\alpha_\nu}^{(\nu)}$ der Geraden $y = \nu$ mit der Kurve $f(xy) = 0$ seien geordnet nach der Größenfolge:

$$x_1^{(\nu)}, \; x_2^{(\nu)}, \; x_3^{(\nu)}, \; \cdots, \; x_{\alpha_\nu}^{(\nu)},$$

wo α_ν je nach dem Charakter der Grundkurve eine gerade oder ungerade Zahl ist. Die Anzahl der auf der Strecke $P_i^{(\nu)} P_{i-1}^{(\nu)}$ gelegenen Teilerpunkte ist dann ausgedrückt durch die Differenz:

$$d_{i,\,i-1}^{(\nu)} = \left[\frac{x_i^{(\nu)}}{\nu}\right] - \left[\frac{x_{i-1}^{(\nu)}}{\nu}\right]'.$$

Hier bedeutet $[a]$ die größte in a enthaltene ganze Zahl, während $[a]'$ die nächst kleinere in a enthaltene ganze Zahl, also $[a]' = [a] - 1$, bezeichnen soll, falls a selbst schon eine ganze Zahl ist. Durch Einführung des Symbols $[a]'$ ist dafür gesorgt, daß auf die Grundkurve

fallende Teilerpunkte mitgezählt werden. Die Anzahl aller auf der Geraden $y = \nu$ in Betracht kommenden Teilerpunkte beträgt dann:

$$\varepsilon_\nu = \sum_0^{\left[\frac{\alpha_\nu}{2}\right]} \left\{ \left[\frac{x^{(\nu)}_{\alpha_\nu - 2i}}{\nu} \right] - \left[\frac{x^{(\nu)}_{\alpha_\nu - 2i - 1}}{\nu} \right]' \right\}.$$

Auf den sämtlichen Geraden $y = \nu$ ($\nu = 1, 2, 3, \cdots$) hat man demnach die Anzahl:

$$\text{(I)} \qquad Z = \sum_{1,2,\cdots}^{\nu} \varepsilon_\nu = \sum_{1,2,\cdots}^{\nu} \sum_0^{\left[\frac{\alpha_\nu}{2}\right]} \left\{ \left[\frac{x^{(\nu)}_{\alpha_\nu - 2i}}{\nu} \right] - \left[\frac{x^{(\nu)}_{\alpha_\nu - 2i - 1}}{\nu} \right]' \right\}.$$

Zählt man andererseits die Teilerpunkte auf den Geraden $x = \nu y$ ($\nu = 1, 2, 3, \cdots$), von denen die erste die einfachen, die zweite die zweifachen $\cdots$, die ν^{te} die ν-fachen Multipla aller ganzen Zahlen trägt, so gelangt man zu einem von (I) der Form nach verschiedenen Ausdruck, der aber genau dasselbe Gesamtergebnis liefert. Hat die Gerade $x = \nu y$ mit der Kurve $f(xy) = 0$ im Ganzen β_ν reelle Schnittpunkte $Q^{(\nu)}_1$, $Q^{(\nu)}_2$, $\cdots$, $Q^{(\nu)}_{\beta_\nu}$ gemeinsam, deren der Größenfolge nach geordnete Ordinaten $y^{(\nu)}_1$, $y^{(\nu)}_2$, $\cdots$, $y^{(\nu)}_{\beta_\nu}$ sind, so ist die Gesamtzahl der bei dieser zweiten Zählung in Betracht zu ziehenden Teilerpunkte:

$$\text{(II)} \qquad Z = \sum_{1,2,\cdots}^{\nu} \sum_0^{\left[\frac{\beta_\nu}{2}\right]} \left\{ [y^{(\nu)}_{\beta_\nu - 2i}] - [y_{\beta_\nu - 2i - 1}]' \right\},$$

da das Symbol $[y^{(\nu)}_k]$ die Anzahl derjenigen Teilerpunkte angibt, welche auf der vom Anfangspunkte und dem Schnittpunkte $Q^{(\nu)}_k$ begrenzten Strecke der Geraden $x = \nu y$ liegen. Folglich entspringt aus (I) und (II) die folgende Relation[1]):

$$\text{(III)} \quad \sum_{1,2,\cdots}^{\nu} \sum_0^{\left[\frac{\beta_\nu}{2}\right]} \left\{ [y^{(\nu)}_{\beta_\nu - 2i}] - [y^{(\nu)}_{\beta_\nu - 2i - 1}]' \right\} = \sum_{1,2,\cdots}^{\nu} \sum_0^{\left[\frac{\alpha_\nu}{2}\right]} \left\{ \left[\frac{x^{(\nu)}_{\alpha_\nu - 2i}}{\nu} \right] - \left[\frac{x^{(\nu)}_{\alpha_\nu - 2i - 1}}{\nu} \right]' \right\}.$$

Diese Gleichung (III) stellt eine ganz allgemeine Relation zwischen größten Ganzen dar, aus welcher sich durch Spezialisierung der Funktion $f(xy)$, also durch besondere Verfügungen über die Grundkurve, die verschiedenartigsten Einzelsätze gewinnen lassen.

---

1) Obgleich diese Relation (III), wie mir Herr Busche schreibt, als Spezialfall in seiner ganz allgemeinen, in Bd. IV p. 65 dieser Mitteilungen publizierten Formel (I) enthalten ist, scheint mir doch, in Anbetracht der nicht so einfachen Durchführung jener Spezialisierung, die Mitteilung der direkten Herleitung von einigem Interesse zu sein.

Transformiert man die Ebene des Teilerpunktsystems durch die quadratische Substitution

$$x = \xi\eta, \quad y = \eta,$$

so gehen bekanntlich die „Teilerpunkte" der xy-Ebene in die „Gitterpunkte" der $\xi\eta$-Ebene über; aus der Geraden $x = \nu y$ gehen hervor (abgesehen von dem Bestandteile $\eta = 0$) die Geraden $\xi = \nu$, die der η-Achse parallel sind. Bei dieser Transformation geht die Gleichung (III) in eine andere über, die man erhält, wenn man einerseits $y_k^{(\nu)}$ durch $\eta_k^{(\nu)}$, und andererseits $x_k^{(\nu)}$ durch $\nu \cdot \xi_k^{(\nu)}$ ersetzt. So wird:

$$\text{(IV)} \quad \sum_{1,2,\cdots}^{\nu} \sum_{0}^{i} \left\{ \left[\eta_{\beta_\nu - 2i}^{(\nu)}\right] - \left[\eta_{\beta_\nu - 2i - 1}^{(\nu)}\right]' \right\} = \sum_{1,2,\cdots}^{\nu} \sum_{0}^{i} \left\{ \left[\xi_{\alpha_\nu - 2i}^{(\nu)}\right] - \left[\xi_{\alpha_\nu - 2i - 1}^{(\nu)}\right]' \right\}.$$

Diese Relation hätte man auch für das Gitterpunktsystem direkt ableiten können, wenn man die in Betracht kommenden Punkte einmal auf den Parallelen zur ξ-Achse, und dann auf den Parallelen zur η-Achse abgezählt hätte.

Schließlich mögen noch einige Beispiele Platz finden.

Wir wählen nur eine solche Grundkurve, die von jeder Achsenparallele in nur einem reellen Punkte getroffen wird. Es handelt sich dann um die Abzählung der in dem Gebiete zwischen den Achsen und der Kurve gelegenen Gitterpunkte.

1. Es sei $f(\xi,\eta) = \xi^r \cdot \eta^s - n = 0$, wo r, s, n positive ganze Zahlen seien. Dann ist:

$$\xi = \sqrt[r]{\frac{n}{\eta^s}} \quad \text{und} \quad \eta = \sqrt[s]{\frac{n}{\xi^r}}.$$

Folglich wird für $\eta = \nu$:

$$\xi^{(\nu)} = \sqrt[r]{\frac{n}{\nu^s}},$$

nur für $\xi = \nu$:

$$\eta^{(\nu)} = \sqrt[s]{\frac{n}{\nu^r}}.$$

Demnach ergibt sich in diesem Falle aus der Relation (IV) die Gleichung:

$$\sum_{1,2,\cdots}^{\nu} \left[\sqrt[r]{\frac{n}{\nu^s}}\right] = \sum_{1,2,\cdots}^{\nu} \left[\sqrt[s]{\frac{n}{\nu^r}}\right].$$

Hierin ist für $r = 1$ der Satz von Lipschitz[1]):

$$\sum_{1,2,\cdots}^{\nu} \left[\frac{n}{\nu^s}\right] = \sum_{1,2,\cdots}^{\nu} \left[\sqrt[s]{\frac{n}{\nu}}\right]$$

enthalten.

1) Vgl. Bachmann, Analytische Zahlentheorie p. 411.

2. $f(\xi\eta) = \eta \cdot a^{\xi} - n = 0$, wo a und n positiv ganzzahlig sind. Hierfür ist:

$$\sum_{1,2,\cdots}^{\nu} \left[{}^{a}\log \frac{n}{\nu}\right] = \sum_{1,2,\cdots}^{\nu} \left[\frac{n}{a^{\nu}}\right].$$

Für $n = 1000$, $a = 10$ treten links im ganzen 100 Summanden, nämlich einmal der Summand 3, neunmal der Summand 2, und 90 mal der Summand 1 auf, während rechts die 3 Summanden 100, 10, 1 je einmal auftreten.

3. Ist der Ausdruck: $\sum_{1,2,\cdots}^{\nu} [\varphi(n, \nu)]$ vorgelegt, wo n eine gegebene positive ganzzahlige Konstante ist, so kann man ihn auf folgende Weise transformieren. Man bilde, indem man ν durch η ersetzt:

$$\varphi(n, \eta) = \xi$$

und hierzu die inverse Funktion:

$$\psi(n, \xi) = \eta.$$

Dann ist, wie auf Grund des Vorstehenden ohne weiteres einleuchtet:

$$\sum_{1,2,\cdots}^{\nu} [\varphi(n, \nu)] = \sum_{1,2,\cdots}^{\nu} [\psi(n, \nu)].$$

Ist z. B.

$$\varphi(n, \nu) = \sum_{1,2,\cdots}^{\nu} [\sqrt[m]{n - \nu}]$$

vorgelegt, so ist: $\varphi(n, \eta) = \sqrt[m]{n - \eta} = \xi$, also $\eta = \psi(n, \xi) = n - \xi^m$ und daher:

$$\sum_{1,2,\cdots}^{\nu} [\sqrt[m]{n - \nu}] = \sum_{1,2,\cdots}^{\nu} [n - \nu^m].$$

Setzt man jetzt $m = \frac{1}{r}$, so erhält man:

$$\sum_{1,2,\cdots}^{\nu} [(n - \nu)^r] = \sum_{1,2,\cdots}^{\nu} [n - \sqrt[r]{\nu}],$$

oder, da links die Summe $S_{n-1}^{(r)}$ der r^{ten} Potenzen der ersten $(n-1)$ positiven ganzen Zahlen steht:

$$S_{n-1}^{(r)} = \sum_{1}^{n-1} \nu^r = \sum_{1,2,\cdots}^{(n-1)^r} [n - \sqrt[r]{\nu}],$$

wofür auch geschrieben werden kann:

$$\sum_{1,2,\cdots}^{n^r} [n + 1 - \sqrt[r]{\nu}] = \sum_{1}^{n} \nu^r = S_n^{(r)}.$$

Bericht über das Gesellschaftsjahr 1904/1905.

(Zusammengestellt vom Adjunkten Dr. A. Schwaßmann.)

Hauptversammlung am 15. Februar 1904.

Der Jahrverwalter Herr Direktor Dr. Thaer erstattet den Bericht über das 214. Gesellschaftsjahr. Darnach besteht die Gesellschaft aus 12 Ehrenmitgliedern, 17 auswärtigen und 57 einheimischen Mitgliedern.

Nach dem vom Mitjahrverwalter, Herrn Dr. J. Schroeder, erstatteten Bericht beträgt der Vermögensbestand der Gesellschaft 1775 Mark. Zum Revisor wurde Herr Professor Ahlborn gewählt.

An Stelle des satzungsgemäß ausscheidenden Adjunkten, Herrn Dr. Bolte, wird Herr Dr. Schwaßmann gewählt, so daß der Vorstand der Gesellschaft für das laufende Jahr aus den Herren Professor Dr. Thaer, Jahrverwalter, Dr. J. Schroeder, Mitjahrverwalter und Dr. A. Schwaßmann, Adjunkt, besteht.

Nach der Hauptversammlung findet das Stiftungsfestessen in herkömmlicher Weise statt.

Versammlung am 12. März 1904.

Nachdem die Herren Dr. K. Graff, Assistent an der Sternwarte, und Dr. P. Heidke, Assistent an der Deutschen Seewarte, als ordentliche Mitglieder in die Gesellschaft aufgenommen worden sind, spricht Herr Professor Dr. Hoppe über „die Bedeutung des Biot-Savartschen Gesetzes und die Konstitution der Magnete“.

Versammlung am 9. April 1904.

Herr Dr. A. Schwaßmann spricht über „den gegenwärtigen Stand der Erforschung der Polhöhenschwankung“.

Versammlung am 14. Mai 1094.

Herr Dr. Pund trägt vor über „quadratische Gleichungen mit zwei Unbekannten“. Darauf spricht Herr Direktor Dr. Thaer über „die Bestimmung der Konstanten eines Kegelschnittes“.

Versammlung am 11. Juni 1904.

Herr Dr. P. Franck hält den angekündigten Vortrag über „die Bestimmung derjenigen partiellen Differentialgleichungen, deren Charakteristiken Haupttangentenkurven auf den Integralflächen sind“.

Versammlung am 10. September 1904.

Es wird beschlossen, dem langjährigen Mitgliede der Gesellschaft, Herrn Deich- und Grenzinspektor Schuback, anläßlich seines achtzigjährigen Geburtstages am 20. September die Glückwünsche der Gesellschaft zum Ausdruck zu bringen.

Herr G. Lony trägt vor über „die geometrische Behandlung einiger Sätze aus der Theorie der Raumkurven".

Versammlung am 22. Oktober 1904.

Der Jahrverwalter, Herr Direktor Dr. Thaer, sieht sich aus Gesundheitsrücksichten genötigt, von seinem Amte als Jahrverwalter zurückzutreten, weshalb eine Ersatzwahl auf die Tagesordnung der nächsten Sitzung gesetzt wird.

Herr Professor Dr. Schubert spricht über die beiden Themata: 1. „Elementare Berechnung der Logarithmen lediglich mit Hilfe der elementaren Formeln für $(a+1)(a-1)$, $(a-1)^2$, $(a-1)^3$, $(a-1)^4$ als Pensum für Untersekunda". 2. „Elementare Berechnung der Logarithmen mit Hilfe des binomischen Lehrsatzes als Pensum für die Prima".

Versammlung am 12. November 1904.

An Stelle des von seinem Amte zurückgetretenen Jahrverwalters, Herrn Direktor Dr. Thaer, wird Herr Professor Dr. Hoppe gewählt. Die Gesellschaft beauftragt den neuen Jahrverwalter, Herrn Direktor Thaer den wärmsten Dank der Mitglieder für seine verdienstvolle Leitung der Gesellschaft auszusprechen und ihm die Wünsche für die baldige Wiederherstellung seiner Gesundheit zu übermitteln.

Die Gesellschaft beschließt mit der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften in Upsala in Schriftenaustausch zu treten.

Herr Professor Dr. Köpcke führt eine von ihm selbst konstruierte Vorrichtung vor, welche die Zentral- und Parallelprojektion zur Anschauung bringt.

Herr Dr. Busche spricht über „eine Verallgemeinerung der Eulerschen φ-Funktion".

Versammlung am 10. Dezember 1904.

Herr A. Wetzler, zur Zeit in Harburg, wird statutengemäß als ordentliches einheimisches Mitglied in die Gesellschaft aufgenommen.

Herr G. Lony gibt einen analytischen Beweis des Satzes: „Hat eine Raumkurve konstanten Krümmungsradius, so hat deren Krümmungskurve die ursprüngliche Kurve wieder als Krümmungskurve".

Herr Dr. P. Franck trägt seine Untersuchungen über „die Gleichung der Flächen 2ten Grades vor, die durch drei Raumgerade bestimmt sind".

Versammlung am 14. Januar 1905.

Herr A. Wetzler trägt vor über „die Integration der doppelperiodischen Funktionen".

Versammlung am 11. Februar 1905.

Herr Dr. Pund trägt vor „über die Anwendung der Gruppentheorie auf die Integration von Differentialgleichungen".

Herr Dr. Schröder macht eine Mitteilung „über eine Relation zwischen größten Ganzen".

Herr Dr. Schwaßmann referiert auf Grund einer Arbeit von Courvoisier „über die Erklärung des Kimuraschen z-Gliedes der Polhöhenschwankung durch Refraktionswirkungen innerhalb des Sonnensystems".

Die Bibliothek der Gesellschaft verdankt folgenden Herren wertvolle Zuwendungen, wofür sie den verehrten Verfassern den besten Dank auch auf diesem Wege aussprechen möchte:

W. Ahrens, H. Eichel, Edm. Hoppe, A. Hurwitz, B. Käbitz, J. Kolousek, L. Kiepert, M. Lerch, Observatoire royal de Belgique, P. Pacher, C. Schrader, H. Schubert, J. Steinhausen, G. Teixeira, O. Wagner, H. Waterstradt, M. Winkelmann.

Außerdem steht die Gesellschaft in Schriftenaustausch mit zahlreichen deutschen und ausländischen gelehrten Gesellschaften.

Mitgliederverzeichnis.

Bestand der Mathematischen Gesellschaft in Hamburg am 1. Januar 1905.

I. Ehrenmitglieder.

Bruns, H., Dr. phil., Geh. Hofrath, Professor, Direktor der Sternwarte in Leipzig.

Bubendey, J. F., Geh. Baurat und Wasserbaudirektor in Hamburg.

Cantor, M., Dr. phil., Geh. Hofrath, Professor der Mathematik in Heidelberg.

Günther, S., Dr. phil., Professor der Geographie in München.

Hübbe, H. W. C., Stadtbaumeister in Schwerin.
Hurwitz, A., Dr. phil., Professor der Mathematik in Zürich.
von Neumayer, G., Dr. phil., Professor, Wirkl. Geh. Admiralitätsrath, Exzellenz, Neustadt a. d. Haardt.
Netto, E., Dr. phil., Geh. Hofrath, Professor der Mathematik in Gießen.
Reye, Th., Dr. phil., Professor der Mathematik in Straßburg.
Schuback, D. A., Deich- und Grenzinspektor in Hamburg.
Stammann, J. O., Dr. jur., Senator in Hamburg.
Sturm, R., Dr. phil., Geh. Reg.-Rath, Professor der Mathematik in Breslau.

II. Auswärtige Mitglieder.

Ahrens, W., Dr. phil., Lehrer an der Maschinenbauschule in Magdeburg.
Ambronn, F. A. L., Dr. phil., Professor, Observator der Sternwarte in Göttingen.
Bibliothek, Königliche, in Berlin.
Blater, J., in Baden-Baden.
Harzer, P., Dr. phil., Professor, Direktor der Sternwarte in Kiel.
Ludendorff, O., Dr. phil, Assistent am astrophysikalischen Observatorium in Potsdam.
Mahlke, A., Dr. phil., Magdeburg.
Mainka, C., Dr. phil., Assistent an der Sternwarte in Göttingen.
Maurer, H., Dr. phil., Physiker am Reichsmarineamt.
Meyn, H. W., Direktor der Karlshütte in Rendsburg.
Mügge, O., Dr. phil., Professor der Mineralogie in Königsberg.
Oppenheimer, H., Dr. phil., Reallehrer in Neustadt a. H. (Pfalz).
Scheller, A., Dr. phil., Adjunct der K. K. Universitätssternwarte in Prag.
Schönwiese, R., Versicherungsmathematiker an der Alten Leipziger Lebensversicherungs-Gesellschaft zu Leipzig.
Schrader, C. W. O., Dr. phil., Geh. Reg.-Rath, Reichsprüfungsinspektor in Berlin.
Servus, H., Dr. phil., Oberlehrer am Friedrichs-Realgymnasium in Berlin und Privatdocent an der techn. Hochschule in Charlottenburg.
Sieveking, J. H., in Bielefeld.
Sprung, A., Dr. phil., Professor, Sektionschef am meteorolog. Institut in Potsdam.
Teege, H., Dr. phil., Marineoberlehrer in Wilhelmshaven.
Wirtz, C. W., Dr. phil., Observator der Sternwarte in Straßburg.

III. Einheimische Mitglieder.

Ahlborn, F. H. H., Professor am Realgymnasium des Johanneums.
Banning, F., Dr. phil., Oberlehrer an der Gelehrtenschule des Johanneums.
Bauch, F., Lehrer an der Realschule von Dr. Bieber.
Bensberg, E., Wasserbauinspektor.
Böger, R., Dr. phil., Professor am Realgymnasium des Johanneums.
Bohnert, E. F. Ph., Dr. phil., Oberlehrer an der Oberrealschule vor dem Holstenthor.
Bolte, F. G., Dr. phil., Direktor der Navigationsschule.
Brügmann, W., Oberlehrer an der Oberrealschule vor dem Holstenthor.
Büchel, W., Dr. phil., Wissenschaftlicher Hilfslehrer an der Realschule in Eppendorf.
Busche, E., Dr. phil., Oberlehrer an der Hansaschule in Bergedorf.
Classen, J., Dr. phil., Professor am physikalischen Staatslaboratorium.
Dencker, F., Chronometermacher.
Detels, F., Dr. phil., Oberlehrer an der Realschule in Eilbeck.
Dressler, M., Lehrer an der Realschule von Dr. Lange.
Fischer, F., Assecuradeur.
Franck, P., Dr. phil., Oberlehrer an der Realschule in Eilbeck.
Fulst, O., Dr. phil., Oberlehrer an der Navigationsschule.
Glage, F. E. A., Dr. phil., Oberlehrer an der Gelehrtenschule des Johanneums.
Graff, K., Dr. phil., Assistent an der Sternwarte.
Grimpen, A., Dr. phil., Lehrer.
Grimsehl, E., Professor an der Oberrealschule auf der Uhlenhorst.
Grosscurth, F., Dr. phil., Oberlehrer an den Unterrichtsanstalten des Klosters St. Johannis.
Haassengier, E., Oberlehrer an der Oberrealschule vor dem Holstenthor.
Hadenfeldt, E., Direktor der Hafen-Dampfschiffahrts-Gesellschaft.
Heidke, P., Dr. phil., Assistent an der Seewarte.
Hillers, W., Dr. phil., Oberlehrer am Realgymnasium des Johanneums.
Hoppe, E., Dr. phil., Professor am Wilhelmgymnasium.
Jaerisch, P. G. M., Dr. phil., Professor an der Oberrealschule in Eimsbüttel.
Keferstein, H. J., Dr. phil., Professor an der Oberrealschule auf der Uhlenhorst.
Köpcke, H. A., Dr. phil., Professor an der Realschule in Altona-Ottensen.

Koldewey, C. C., Admiralitätsrath, Abtheilungsvorsteher an der Seewarte.
Krüss, H., Dr. phil.
Löwer, G. F., Wasserbauinspektor.
Lony, G. F. C., Oberlehrer an der Oberrealschule auf der Uhlenhorst.
Messow, B., Assistent an der Sternwarte.
Michaelsen, A., Dr. phil., Oberlehrer am Christianeum in Altona.
Nagel, A. C., Civilingenieur.
Niebour, C. T. B., Dr. phil., Direktor a. D.
Norden, M., Oberlehrer an der Oberrealschule auf der Uhlenhorst.
Oeltjen, H., Dr. phil., Oberlehrer an der Realschule in Eimsbüttel.
Pflaumbaum, G., Dr. phil., Oberlehrer an der Realschule in St. Pauli.
Pund, O., Dr. phil., Seminaroberlehrer.
Repsold, J. A., Dr. phil.
Schader, F., Dr. phil., Professor am Wilhelmgymnasium.
Schorr, R., Dr. phil., Professor, Direktor der Sternwarte.
Schröder, J., Dr. phil., Oberlehrer an der Oberrealschule vor dem Holstenthor.
Schubert, H. C. H., Dr. phil., Professor an der Gelehrtenschule des Johanneums.
Schumpelick, A., Oberlehrer an der Gelehrtenschule des Johanneums.
Schwassmann, A., Dr. phil., Observator an der Sternwarte.
Siegmeyer, K., Oberlehrer an der Hansaschule in Bergedorf.
Sieveking, F., Dr. jur., Rechtsanwalt.
Thaer, A., Dr. phil., Professor, Direktor der Oberrealschule vor dem Holstenthor.
Timm, A., Schiffsbauingenieur.
Tuch, Th., Dr. phil.
Wagner, H. A., Dr. phil., Professor, Direktor der Realschule vor dem Lübeckerthor.
Wetzler, A., Lehrer am Institut von Dr. Kramer in Harburg.

Druck von B. G. Teubner in Leipzig.

MITTEILUNGEN
ER MATHEMATISCHEN GESELLSCHAFT
IN HAMBURG.

ND IV. № 6. AUSGEGEBEN IM FEBRUAR 1906.

direkter Beweis des Additionstheorems in der Lehre von den elliptischen Funktionen.

Von Hermann Teege in Wilhelmshaven.

Unter den mannigfachen Beweisen des Additionstheorems in Lehre von den elliptischen Funktionen gibt es nur sehr wenige ntlich direkte, unter denen wieder die Beweismethode von La- nge[1]) durch Eleganz und Kürze hervorragt. Ist sie doch fast einzige, bei der sich alle Operationen zwanglos wie aus einer eren Notwendigkeit ergeben, ohne daß die Kenntnis des Resultates auf Einfluß zu haben scheint. Sie übertrifft hierin selbst Sturms fache und in fast alle Lehrbücher übergegangene Methode.[2])

Unter solchen Umständen dürfte es hinlängliches Interesse bieten, enn im folgenden noch ein weiterer direkter Weg gezeigt wird, auf m man zu dem berühmten Additionstheorem der elliptischen Funk- nen gelangen kann. Freilich, die Kürze der ersten indirekten sung von Euler und die Eleganz des Lagrangeschen Beweises eiben unübertroffen; doch ist die nicht ganz zu vermeidende Um- ndlichkeit nicht größer als bei den meisten anderen Methoden.

Das Problem besteht bekanntlich darin, die Differentialgleichung

$$\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} + \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}} = 0$$

integrieren, wofür wir der Kürze wegen

$$\frac{dx}{\sqrt{\varphi(x)}} + \frac{dy}{\sqrt{\varphi(y)}} = 0$$

hreiben.

Da die Lösung in bezug auf x und y symmetrisch sein muß, so

1) Lagrange, Théorie des fonctions. I. § 79 ff.

2) Man vergleiche Durège, Theorie der elliptischen Funktionen, S. 98 ff.

liegt es nahe, zwei in x und y symmetrische Substitutionen zu versuchen, und zwar wählen wir

$$u = xy$$
$$2v = x^2 + y^2.$$

Es ist dann

$$\frac{dv}{du} = \frac{x\,dx + y\,dy}{x\,dy + y\,dx}$$

oder durch Einführung von $dy = -\frac{\sqrt{\varphi(y)}}{\sqrt{\varphi(x)}}\,dx$ aus der Differentialgleichung (1)

$$\frac{dv}{du} = \frac{x\sqrt{\varphi(x)} - y\sqrt{\varphi(y)}}{y\sqrt{\varphi(x)} - x\sqrt{\varphi(y)}} = \frac{(x\sqrt{\varphi(x)} - y\sqrt{\varphi(y)})(y\sqrt{\varphi(x)} + x\sqrt{\varphi(y)})}{y^2\varphi(x) - x^2\varphi(y)}.$$

Somit ergibt sich

$$\frac{dv}{du} = \frac{xy\varphi(x) - y^2\sqrt{\varphi(x)\cdot\varphi(y)} + x^2\sqrt{\varphi(x)\cdot\varphi(y)} - xy\varphi(y)}{y^2\varphi(x) - x^2\varphi(y)}$$

oder wenn man die Werte für $\varphi(x)$ und $\varphi(y)$ einsetzt,

$$\frac{dv}{du} = \frac{xy\{(1+k^2)(y^2-x^2) - k^2(y^4-x^4)\} - (y^2-x^2)\sqrt{\varphi(x)\cdot\varphi(y)}}{(y^2-x^2)(1-k^2x^2y^2)}$$

Kürzt man mit $y^2 - x^2$ und führt u und v ein, so erhält man

$$\frac{dv}{du} = \frac{u(1+k^2-k^2 2v) - \sqrt{\varphi(x)\cdot\varphi(y)}}{1-k^2u^2}$$

oder

$$(2)\qquad (1-k^2u^2)\frac{dv}{du} = (1+k^2)u - 2k^2uv - \sqrt{\varphi(x)\cdot\varphi(y)}.$$

Um auch noch die Wurzel wegzuschaffen, differentiieren wir die Gleichung (2), wodurch sich

$$(3)\qquad (1-k^2u^2)d\frac{dv}{du} = (1+k^2)du - 2k^2v\,du - d\sqrt{\varphi(x)\cdot\varphi(y)}$$

ergibt.

Nun ist

$$d(\sqrt{\varphi(x)}\cdot\sqrt{\varphi(y)}) = \sqrt{\varphi(x)}\,\frac{\varphi'(y)\cdot dy}{2\sqrt{\varphi(y)}} + \sqrt{\varphi(y)}\,\frac{\varphi'(x)\cdot dx}{2\sqrt{\varphi(x)}}$$

oder wegen der Differentialgleichung (1)

$$d(\sqrt{\varphi(x)}\cdot\sqrt{\varphi(y)}) = -\tfrac{1}{2}(\varphi'(y)dx + \varphi'(x)dy)$$
$$= -\{2k^2(x^3dy + y^3dx) - (1+k^2)(x\,dy + y\,dx)\}.$$

Weil ferner

$$2v\,du = (x^2+y^2)(x\,dy + y\,dx)$$
$$= x^3dy + y^3dx + xy^2dy + x^2y\,dx$$

so folgt

$$x^2dy + y^2dx = 2v\,du - u\,dv$$

$$d\left(\sqrt{\varphi(x)}\cdot\sqrt{\varphi(y)}\right) = -\left\{4k^2v\,du - 2k^2u\,dv - (1+k^2)du\right\}.$$

nit nimmt aber die Differentialgleichung (3) die Form an

$$(1-k^2u^2)\frac{d^2v}{du^2} + 2k^2u\frac{dv}{du} - 2k^2v = 0.$$

nochmaliger Differentiation ergibt diese Gleichung

$$(1-k^2u^2)\frac{d^3v}{du^3} = 0,$$

somit folgt als Lösung der Differentialgleichung (1)

$$v = a_0 + a_1u + a_2u^2.$$

noch die einzelnen Koeffizienten zu bestimmen, bilden wir den en und zweiten Differentialquotienten und setzen ihre Werte in Gleichung (4) ein; durch Koeffizientenvergleichung findet man rt die Beziehung

$$a_2 = a_0k^2,$$

ach die Lösung die Form annimmt

$$v = a_0 + a_1u + a_0k^2u^2.$$

Etwas umständlicher gestaltet sich die Bestimmung von a_1. Zu em Zwecke haben wir uns der Gleichung (2) zu bedienen, müssen r vorher noch $\varphi(x)\cdot\varphi(y)$ durch u und v ausdrücken. Man multiiert also $\varphi(x)\cdot\varphi(y)$ aus und findet so leicht

$$\varphi(x)\cdot\varphi(y) = (1-2v+u^2)(1-2k^2v+k^4u^2).$$

Setzt man also $u=0$, woraus $v=a_0$ folgt, so ergibt sich der rt von $\varphi(x)\cdot\varphi(y)$ zu $(1-2a_0)\cdot(1-2k^2a_0)$, und man erhält ch Einsetzen in Gleichung (2)

$$a_1 = -\sqrt{(1-2a_0)(1-2k^2a_0)}.$$

nit ist das allgemeine Integral der Differentialgleichung (1)

$$v = a_0 - \sqrt{(1-2a_0)(1-2a_0k^2)}\,u + a_0k^2u^2$$

ir

$$\frac{x^2+y^2}{2} = a_0 - \sqrt{(1-2a_0)(1-2a_0k^2)}\,xy + a_0k^2x^2y^2,$$

i auch

$$x^2+y^2 = c^2 - 2\sqrt{(1-c^2)(1-k^2c^2)}\,xy + c^2k^2x^2y^2$$

chrieben werden kann, wo also $c^2 = 2a_0$ ist.

Es ist dies dieselbe Form der Lösung, die zuerst von Euler h der anfangs erwähnten indirekten Methode gefunden worden ist.

liegt es nahe, zwei in x und y symmetrische Substitutionen zu versuchen, und zwar wählen wir

$$u = xy$$
$$2v = x^2 + y^2.$$

Es ist dann

$$\frac{dv}{du} = \frac{x\,dx + y\,dy}{x\,dy + y\,dx}$$

oder durch Einführung von $dy = -\frac{\sqrt{\varphi(y)}}{\sqrt{\varphi(x)}}\,dx$ aus der Differentialgleichung (1)

$$\frac{dv}{du} = \frac{x\sqrt{\varphi(x)} - y\sqrt{\varphi(y)}}{y\sqrt{\varphi(x)} - x\sqrt{\varphi(y)}} = \frac{(x\sqrt{\varphi(x)} - y\sqrt{\varphi(y)})(y\sqrt{\varphi(x)} + x\sqrt{\varphi(y)})}{y^2\varphi(x) - x^2\varphi(y)}.$$

Somit ergibt sich

$$\frac{dv}{du} = \frac{xy\varphi(x) - y^2\sqrt{\varphi(x)\cdot\varphi(y)} + x^2\sqrt{\varphi(x)\cdot\varphi(y)} - xy\varphi(y)}{y^2\varphi(x) - x^2\varphi(y)}$$

oder wenn man die Werte für $\varphi(x)$ und $\varphi(y)$ einsetzt,

$$\frac{dv}{du} = \frac{xy\{(1+k^2)(y^2 - x^2) - k^2(y^4 - x^4)\} - (y^2 - x^2)\sqrt{\varphi(x)\cdot\varphi(y)}}{(y^2 - x^2)(1 - k^2x^2y^2)}$$

Kürzt man mit $y^2 - x^2$ und führt u und v ein, so erhält man

$$\frac{dv}{du} = \frac{u(1 + k^2 - k^2 2v) - \sqrt{\varphi(x)\cdot\varphi(y)}}{1 - k^2u^2}$$

oder

$$(2)\qquad (1 - k^2u^2)\frac{dv}{du} = (1 + k^2)u - 2k^2uv - \sqrt{\varphi(x)\cdot\varphi(y)}.$$

Um auch noch die Wurzel wegzuschaffen, differentiieren wir die Gleichung (2), wodurch sich

$$(3)\qquad (1 - k^2u^2)d\frac{dv}{du} = (1 + k^2)du - 2k^2v\,du - d\sqrt{\varphi(x)\cdot\varphi(y)}$$

ergibt.

Nun ist

$$d(\sqrt{\varphi(x)}\cdot\sqrt{\varphi(y)}) = \sqrt{\varphi(x)}\,\frac{\varphi'(y)\cdot dy}{2\sqrt{\varphi(y)}} + \sqrt{\varphi(y)}\,\frac{\varphi'(x)\cdot dx}{2\sqrt{\varphi(x)}}$$

oder wegen der Differentialgleichung (1)

$$d(\sqrt{\varphi(x)}\cdot\sqrt{\varphi(y)}) = -\tfrac{1}{2}(\varphi'(y)dx + \varphi'(x)dy)$$
$$= -\{2k^2(x^3dy + y^3dx) - (1 + k^2)(x\,dy + y\,dx)\}.$$

Weil ferner

$$2v\,du = (x^2 + y^2)(x\,dy + y\,dx)$$
$$= x^3dy + y^3dx + xy^2dy + x^2y\,dx$$

folgt

$$x^2dy + y^2dx = 2v\,du - u\,dv$$

$$(\sqrt{\varphi(x)} \cdot \sqrt{\varphi(y)}) = -\{4k^2v\,du - 2k^2u\,dv - (1+k^2)du\}.$$

nimmt aber die Differentialgleichung (3) die Form an

$$(1-k^2u^2)\frac{d^2v}{du^2} + 2k^2u\frac{dv}{du} - 2k^2v = 0.$$

chmaliger Differentiation ergibt diese Gleichung

$$(1-k^2u^2)\frac{d^3v}{du^3} = 0,$$

mit folgt als Lösung der Differentialgleichung (1)

$$v = a_0 + a_1u + a_2u^2.$$

ɔch die einzelnen Koeffizienten zu bestimmen, bilden wir den und zweiten Differentialquotienten und setzen ihre Werte in eichung (4) ein; durch Koeffizientenvergleichung findet man die Beziehung

$$a_2 = a_0k^2,$$

ı die Lösung die Form annimmt

$$v = a_0 + a_1u + a_0k^2u^2.$$

twas umständlicher gestaltet sich die Bestimmung von a_1. Zu Zwecke haben wir uns der Gleichung (2) zu bedienen, müssen orher noch $\varphi(x) \cdot \varphi(y)$ durch u und v ausdrücken. Man multi- ; also $\varphi(x) \cdot \varphi(y)$ aus und findet so leicht

$$\varphi(x) \cdot \varphi(y) = (1 - 2v + u^2)(1 - 2k^2v + k^4u^2).$$

ɜtzt man also $u = 0$, woraus $v = a_0$ folgt, so ergibt sich der von $\varphi(x) \cdot \varphi(y)$ zu $(1-2a_0) \cdot (1-2k^2a_0)$, und man erhält Einsetzen in Gleichung (2)

$$a_1 = -\sqrt{(1-2a_0)(1-2k^2a_0)}.$$

ist das allgemeine Integral der Differentialgleichung (1)

$$v = a_0 - \sqrt{(1-2a_0)(1-2a_0k^2)}\,u + a_0k^2u^2$$

$$\frac{x^2+y^2}{2} = a_0 - \sqrt{(1-2a_0)(1-2a_0k^2)}\,xy + a_0k^2x^2y^2,$$

ıch

$$x^2 + y^2 = c^2 - 2\sqrt{(1-c^2)(1-k^2c^2)}\,xy + c^2k^2x^2y^2$$

ieben werden kann, wo also $c^2 = 2a_0$ ist.

s ist dies dieselbe Form der Lösung, die zuerst von Euler ler anfangs erwähnten indirekten Methode gefunden worden ist.

Schreibt man die Gleichung (7) in der Form

$$1-c^2+2\sqrt{(1-c^2)(1-k^2c^2)}xy+(1-k^2c^2)x^2y^2=1-(x^2+y^2)+x^2y^2,$$

so kann man links die Wurzel ziehen und findet so, da die rechte Seite gleich $(1-x^2)(1-y^2)$ ist,

$$\sqrt{1-c^2}+\sqrt{(1-k^2c^2)}\,xy=\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)},$$

wo alle Wurzeln, wenn c, k, x, y wie in der Theorie der elliptischen Funktionen kleiner als 1 angenommen werden, mit positivem Vorzeichen auszuziehen sind.

Setzt man endlich $x=\sin\varphi$, $y=\sin\psi$, $c=\sin\sigma$, so wird $\sqrt{1-x^2}=\cos\varphi$, $\sqrt{1-y^2}=\cos\psi$, $\sqrt{1-c^2}=\cos\sigma$, und man erhält die Lagrangesche Lösung

$$\cos\sigma=\cos\varphi\cdot\cos\psi-\sin\varphi\cdot\sin\psi\cdot\sqrt{1-k^2\sin^2\sigma}. \tag{8}$$

Schreibt man diese Gleichung in der Form

$$\sin\varphi\cdot\sin\psi\cdot\sqrt{1-k^2+k^2\cos^2\sigma}=\cos\varphi\cdot\cos\psi-\cos\sigma,$$

so ergibt sich durch Quadrieren folgende Bestimmungsgleichung für $\cos\sigma$

$$(1-k^2\sin^2\varphi\cdot\sin^2\psi)\cos^2\sigma-2\cos\varphi\cdot\cos\psi\cdot\cos\sigma+\cos^2\varphi\cdot\cos^2\psi$$
$$-(1-k^2)\sin^2\varphi\cdot\sin^2\psi=0$$

und hieraus nach einigen leichteren Reduktionen

$$\cos\sigma=\frac{\cos\varphi\cdot\cos\psi\pm\sin\varphi\cdot\sin\psi\sqrt{(1-k^2\sin^2\varphi)(1-k^2\sin^2\psi)}}{1-k^2\sin^2\varphi\cdot\sin^2\psi}.$$

Übrigens ist hierin, wie ein Vergleich mit (8) lehrt, die Wurzel mit negativem Vorzeichen auszuziehen, und es wird somit

$$\cos\sigma=\frac{\cos\varphi\cdot\cos\psi-\sin\varphi\cdot\sin\psi\sqrt{(1-k^2\sin^2\varphi)(1-k^2\sin^2\psi)}}{1-k^2\sin^2\varphi\cdot\sin^2\psi}, \tag{9}$$

welche Gleichung als der Ausdruck des Additionstheorems der elliptischen Funktionen angesehen werden kann.

Lösung einer Aufgabe über Teileranzahlen.

Von E. Busche.

Die Aufgabe, mit der ich mich beschäftigen will, lautet so: Mehrere Zahlen, m, n, p, ..., und ihre Teiler sind gegeben. Multipliziert man dann alle Teiler von m mit allen Teilern von n, die Produkte mit allen Teilern von p usw., so entstehen lauter Teiler von $mnp\ldots$; es soll angegeben werden, wie oft ein beliebiger Teiler dieses Produktes so erhalten wird. Wenn bloß zwei Zahlen gegeben sind, so bietet die in § 1 angegebene Lösung keine Schwierigkeit. Da hierbei die gesuchte Anzahl in Gestalt einer Teileranzahl gefunden wird, so kann man, was in § 2 geschieht, hieraus einige neuartige Sätze über Teileranzahlen ableiten. Etwas schwieriger gestaltet sich die Behandlung des allgemeinen Falles (§ 3). Es wird dabei ein Satz über die Zerlegung einer Zahl in Summanden gebraucht, der vielleicht neu und auch an sich von Interesse ist. Diesen Satz beweise ich nachträglich in § 4.

§ 1.

Mit $(a, b, c\ldots)$ werde der größte gemeinsame Teiler der ganzen rationalen Zahlen a, b, $c\ldots$ bezeichnet, mit $t(a)$ die Anzahl der Teiler von a, mit $t(a, b, c\ldots)$ die Anzahl der Teiler von $(a, b, c\ldots)$ oder der gemeinsamen Teiler von a, b, $c\ldots$

Bezeichnet man die Teiler von m mit 1 anfangend und mit m schließend, sonst in beliebiger Reihenfolge mit $1, \ldots e, \ldots e', \ldots m$, die von n mit $1, \ldots f, \ldots f', \ldots n$, so ist der gestellten Aufgabe gemäß folgende Tabelle zu bilden:

$$(T)\qquad \begin{array}{ccccccc} 1 & \ldots & e & \ldots & e' & \ldots & m \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ f & \ldots & ef & \ldots & e'f & \ldots & mf \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ f' & \ldots & ef' & \ldots & e'f' & \ldots & mf' \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ n & \ldots & en & \ldots & e'n & \ldots & mn. \end{array}$$

T enthält jeden Teiler a von mn. Ist nämlich $e = (m, a)$, so kommt in der mit e beginnenden Kolonne der Teiler a vor. Denn $\frac{a}{(m, a)}$ ist relativ prim zu $\frac{m}{(m, a)}$, und da a in mn, also $\frac{a}{(m, a)}$ in $\frac{m}{(m, a)}n$

aufgehen soll, so muß $\frac{a}{(m, a)}$ ein Teiler f von n sein; es ist also $ef = a$. In einer Kolonne, deren Anfangsglied e' nicht ein Teiler von $e = (m, a)$ ist, kann a nicht auftreten. Denn dann enthielte e' mindestens einen in m aufgehenden Primfaktor in einer höheren Potenz als a und $a : e'$ wäre keine ganze Zahl. Dagegen kann man aus dem Vorhandensein von $a = ef$ die Zahl a möglicherweise noch an anderen Stellen von T nachweisen. Nimmt man nämlich aus e einen Teiler e_1 heraus und vereinigt ihn mit f, und geht dann $e_1 f = f_1$ in n, also e_1 in $n : f$ auf, so ist $\frac{e}{e_1} \cdot f_1 = a$ und a kommt auch in der mit $\frac{e}{e_1}$ beginnenden Kolonne vor. Die Anzahl der a ist daher, weil in keiner Kolonne dieselbe Zahl mehr als einmal auftritt, gleich der Anzahl der gemeinsamen Teiler von e und $n : f$, d. h. gleich $t\left(e, \frac{n}{f}\right)$.

Dieser Ausdruck kann noch so umgeformt werden, daß nur m, n, a darin vorkommen. Es ist $e = (m, a)$, $f = \frac{a}{(m, a)}$, $\frac{n}{f} = \frac{n \cdot (m, a)}{a}$ $= \left(\frac{nm}{a}, n\right)$, also $\left(e, \frac{n}{f}\right) = \left(\frac{nm}{a}, n, m, a\right)$. Nach einem Satz von Kronecker ist nun

$$(x, y)(u, v) = (xu, xv, yu, yv)$$

und daher $\left(\frac{nm}{a}, n, m, a\right) = \frac{(m, a)(n, a)}{a}$. Somit ist der Satz bewiesen

Die Anzahl, die angibt, wie oft man den Teiler a von mn erhält, wenn man alle Teiler von m mit allen Teilern von n multipliziert, ist $t\left(\frac{(m, a)(n, a)}{a}\right)$.

§ 2.

Um von dem eben bewiesenen Satze einige Anwendungen zu machen, nehme ich zu den beiden Zahlen m und n eine dritte p hinzu deren Teiler $1, \ldots g, \ldots g', \ldots p$ auf einer in dem mit 1 bezeichneten Punkt auf der Ebene der Tabelle T senkrecht stehenden geraden Linie angeordnet gedacht werden, so daß der Teiler 1 mit der Zahl 1 der Tabelle zusammenfällt. Multipliziert man dann die Teiler von p mit den Zahlen von T und schreibt z. B. das Produkt efg in einer durch den mit g bezeichneten Punkt zu der Ebene von T parallel gelegten Tabelle T_g senkrecht über den Punkt ef von T, so entsteht ein parallelepipedisch angeordnetes Schema S, das lauter Teiler von mnp enthält. Um zu erfahren, wie oft ein Teiler a von mnp in S vorkommt, bedenke man, daß in T_g die Zahl a ebenso oft vorhanden

ist wie $\frac{a}{g}$ in T, also z. B. überhaupt nicht, wenn g nicht in a aufgeht. Daher ist die gesuchte Zahl gleich

$$\sum_{g/(p,a)} t\left(\frac{\binom{m, \frac{a}{g}}\binom{n, \frac{a}{g}}}{\frac{a}{g}}\right) = \sum_{g/(p,a)} t\left(\frac{(mg, a)(ng, a)}{ag}\right),$$

wo die Summe über alle Teiler g von (p, a) zu erstrecken ist. Dabei ist zu bemerken, daß dieser Ausdruck nicht als eine endgültige Lösung der gestellten Aufgabe für 3 Zahlen m, n, p anzusehen ist, da in ihm die drei Zahlen nicht gleichmäßig vorkommen. Man kann aber daraus Sätze über Teileranzahlen ableiten.

Da das Schema S in bezug auf m, n, p symmetrisch ist, so kann man die eben gefundene Anzahl auch unter Bevorzugung der Zahlen m und n statt p berechnen und erhält so die Gleichungen

$$(1)\quad \sum_{e/(m,a)} t\left(\frac{(ne, a)(pe, a)}{ae}\right) = \sum_{f/(n,a)} t\left(\frac{(pf, a)(mf, a)}{af}\right) = \sum_{g/(p,a)} t\left(\frac{(mg, a)(ng, a)}{ag}\right).$$

Dieses Gleichungssystem hat nur dann eine Bedeutung, wenn a in mnp aufgeht. Setzt man aber $p = a$, so ist diese Bedingung erfüllt, und man erhält ein System, in dem a eine beliebige ganze positive Zahl ist, nämlich

$$(2)\quad \sum_{e/(m,a)} t\left(n, \frac{a}{e}\right) = \sum_{f/(n,a)} t\left(m, \frac{a}{f}\right) = \sum_{g/a} t\left(\frac{(mg, a)(ng, a)}{ag}\right),$$

da $\frac{(ae, a)}{a} = \frac{(af, a)}{a} = 1$ ist.

Setzt man in (2) $a = n$, so folgt

$$\sum_{e/(m,n)} t\left(\frac{n}{e}\right) = \sum_{f/n} t\left(m, \frac{n}{f}\right).$$

Die dritte Summe in (2) wird hierbei mit der zweiten identisch. Da $\frac{n}{f}$ mit f zugleich Teiler von n ist, so kann man die letzte Gleichung auch so schreiben:

$$\sum_{e/(m,n)} t\left(\frac{n}{e}\right) = \sum_{f/n} t(m, f).$$

Wenn man $t(x) = 0$ setzt, falls x keine ganze Zahl ist, also auch $t(x, y, \ldots) = 0$, wenn auch nur eine der Zahlen x, y, ... nicht ganz ist, so kann man statt der ersten Gleichung (2) setzen:

$$(3)\quad \sum_{e/m} t\left(n, \frac{a}{e}\right) = \sum_{f/n} t\left(m, \frac{a}{f}\right).$$

Macht man nun — eine zuerst wahrscheinlich von Hermite benutzte Bemerkung verwertend — davon Gebrauch, daß $\left[\frac{m}{x}\right] - \left[\frac{m-1}{x}\right]$ nur dann von Null verschieden und zwar gleich 1 ist, wenn x in m aufgeht, so kann (3) umgeformt werden in

$$\sum_{x=1}^{m}\left(\left[\frac{m}{x}\right] - \left[\frac{m-1}{x}\right]\right) \cdot t\left(n, \frac{a}{x}\right) = \sum_{f/n} t\left(m, \frac{a}{f}\right),$$

und wenn man die entsprechenden Gleichungen für $m-1, m-2, \ldots 2, 1$ hinschreibt, wobei aber links immer bis m summiert werden darf, und dann alle diese Gleichungen addiert, so erhält man

$$\sum_{x=1}^{m}\left[\frac{m}{x}\right] \cdot t\left(n, \frac{a}{x}\right) = \sum_{x=1}^{m}\sum_{f/n} t\left(x, \frac{a}{f}\right). \tag{4}$$

Setzt man hierin für n eine Primzahl $> m$ und $a = m!$, so geht (4) über in die bekannte Gleichung

$$\sum_{x=1}^{m}\left[\frac{m}{x}\right] = \sum_{x=1}^{m} t(x),$$

da links immer $\left(n, \frac{m!}{x}\right) = 1$ ist und rechts für den Teiler 1 von n sich $(x, m!) = x$ und für den Teiler n sich $t\left(x, \frac{m!}{n}\right) = 0$ ergibt.

Für $a = n$ erhält man aus (4):

$$\sum_{f/n}\left[\frac{m}{f}\right] \cdot t\left(\frac{n}{f}\right) = \sum_{x=1}^{m}\sum_{f/n} t(x, f), \tag{5}$$

indem man links nur die Werte f von x zuläßt, für die $t\left(\frac{n}{x}\right)$ von Null verschieden ist, und rechts f für $\frac{n}{f}$ setzt. Wenn man endlich in (5) noch $m = n$ annimmt, so erhält man, indem man wieder x durch f ersetzt:

$$\sum_{f n} f \cdot t(f) = \sum_{x=1}^{n}\sum_{f/n} t(x, f).$$

Zählt man die Zahlen der Tabelle T des § 1 auf doppelte Weise ab, so ergibt sich noch die Gleichung[1])

$$t(m)\,t(n) = \sum_{a/m\,n} t\left(\frac{(m, a)(n, a)}{a}\right),$$

und einen ähnlichen Satz für 3 Zahlen erhält man aus dem Schema S.

1) Für das Produkt $t(m)\,t(n)$ gibt es einen Ausdruck, der einfacher ist als der des Textes, nämlich

§ 3.

Bei der Behandlung der auf zwei Zahlen bezüglichen Aufgabe war es nicht nötig, die Zahlen in ihre Primfaktoren zu zerlegen. Das scheint aber bei mehr als zwei Zahlen unerläßlich zu sein, damit man das Problem auf den Fall, wo die gegebenen Zahlen Potenzen derselben Primzahl sind, zurückführen könne. Es ist leicht einzusehen, daß die gesuchte Zahl, die ich mit $\chi(mnp\ldots; a)$ bezeichnen will, gleich dem auf alle in m, n, p, …, a aufgehenden Primzahlen r_i $(i = 1, 2, \ldots \sigma)$ bezüglichen Produkte

$$\prod_{i=1}^{\sigma} \chi(r_i^{\mu_i} r_i^{\nu_i} r_i^{\pi_i} \ldots; r_i^{\alpha_i})$$

ist, wo die Exponenten μ_i, ν_i, π_i, … α_i auch zum Teil gleich Null sein können.

Denn wenn man zwei auf beliebig viele Dimensionen verallgemeinerte Schemata S und S', wo die Zahlen von S alle relativ prim zu denen von S' sind und S nicht von niedrigerer Dimension als S' ist, in der Weise miteinander multipliziert, daß man jede Zahl von S ersetzt durch das ganze Schema S', nachdem alle Zahlen von S' mit der zu ersetzenden Zahl von S multipliziert sind, so stehen in den mit 1 beginnenden Kanten des so entstehenden Schemas SS', das die Dimension von S hat, die Teiler der Zahlen, die sich ergeben, wenn man die das Schema S bestimmenden Zahlen mit den entsprechenden Zahlen, durch die S' bestimmt wird, multipliziert. Dabei wird jeder durch 1 gehenden Kante von S eine bestimmte durch 1 gehende Kante von S' zugewiesen, und wenn S von höherer Dimension als S' ist, wird angenommen, daß die fehlenden Kanten von S' durch den Punkt mit der Zahl 1 vertreten werden. Das Schema SS' hat dann

$$t(m)\,t(n) = \sum_{\delta\,/\,(m,\,n)} t\left(\frac{m\,n}{\delta^2}\right),$$

und diese Formel hat den Vorzug, daß sie sich auf die Summen von Teilerpotenzen verallgemeinern läßt:

$$\int_h^{\bullet} m \int_h^{\bullet} n = \sum_{\delta\,/\,(m,\,n)} \delta^h \int_h^{\bullet} \frac{m\,n}{\delta^2},$$

wo nach Euler die Summe der $h$ten Potenzen der Teiler von m mit $\int_h^{\bullet} m$ bezeichnet ist. Herr Professor Bachmann, dem ich vor einigen Jahren diese Formel mitteilte, und der auch die Freundlichkeit hatte, mir einen einfachen Beweis dafür anzugeben, hält es für wahrscheinlich, daß die Gleichung schon bekannt ist.

wieder die Eigenschaft von S und S', daß irgend eine seiner Zahlen das Produkt von Teilern, die an den Kanten stehen, ist. Jede Zahl von S ist mit jeder Zahl von S' multipliziert, und die Zahl aa' kommt in SS' so oft vor wie das Produkt aus der Anzahl der a in S mit der Anzahl der a' in S' angibt, da alle Zahlen von S relativ prim zu den Zahlen von S' sind und die Zahl aa' also nur dadurch entsteht, daß man a mit a' multipliziert.

Man braucht hiernach nur noch die Aufgabe für den Fall zu lösen, daß die Zahlen $m, n, p, \ldots$ und deshalb auch a Potenzen derselben Primzahl r sind. Für den Fall zweier Zahlen ergibt sich aus

$$\chi(r^\mu r^\nu;\ r^\alpha) = t\left(\frac{(r^\mu, r^\alpha)(r^\nu, r^\alpha)}{r^\alpha}\right),$$

daß diese Zahl gleich $\alpha + 1$ ist, wenn $\alpha \gtrless \mu$ und $\alpha \gtrless \nu$ ist, dagegen gleich $\mu + 1$, wenn $\alpha \gtrless \nu$ und $\alpha \lesseqgtr \mu$ ist, ferner gleich $\nu + 1$, wenn $\alpha \gtrless \mu$ und $\alpha \lesseqgtr \nu$ ist, endlich gleich $\mu + \nu - \alpha + 1$, wenn $\alpha \lesseqgtr \mu$ und $\alpha \lesseqgtr \nu$ ist. In jedem Falle ist $\alpha \gtrless \mu + \nu$, da a ein Teiler von mn ist. Diese Resultate können zusammengefaßt werden in:

$$(1)\quad \chi(r^\mu r^\nu;\ r^\alpha) = \binom{\alpha+1}{1} - \binom{\alpha-\mu}{1} - \binom{\alpha-\nu}{1} + \binom{\alpha-1-\mu-\nu}{1},$$

wenn festgesetzt wird, daß ein Binomialkoeffizient mit negativer oberer Zahl gleich Null ist. Das letzte Glied bewirkt, daß die rechte Seite verschwindet, wenn $\alpha > \mu + \nu$ ist, sodaß jetzt von der Bedingung $\alpha \gtrless \mu + \nu$ abgesehen werden kann.

Die Gleichung (1) kann nun auf beliebig viele, etwa τ, Zahlen r^μ, r^ν, r^π ... verallgemeinert werden. Das Schema S kann man jetzt durch ein anderes ersetzen, in dem an Stelle der Teiler von $mnp\ldots$, die ja alle Potenzen von r sind, einfach die Exponenten von r gesetzt werden. Der Exponent α von $a = r^\alpha$ kommt dann in diesem Schema so oft vor, wie es möglich ist, die Zahl α aus τ nicht negativen Summanden, deren erster $\gtrless \mu$, deren zweiter $\gtrless \nu$ usw. ist, zusammenzusetzen. Diese Anzahl ist, wie im nächsten Paragraphen bewiesen werden wird, gleich

$$(2)\qquad \chi(r^\mu r^\nu r^\pi \ldots;\ r^\alpha) = \binom{\alpha+\tau-1}{\tau-1}$$
$$- \binom{\alpha+\tau-2-\mu}{\tau-1} - \binom{\alpha+\tau-2-\nu}{\tau-1} - \binom{\alpha+\tau-2-\pi}{\tau-1} - \cdots$$
$$+ \binom{\alpha+\tau-3-\mu-\nu}{\tau-1} + \binom{\alpha+\tau-3-\mu-\pi}{\tau-1} + \binom{\alpha+\tau-3-\nu-\pi}{\tau-1} + \cdots$$
$$- \binom{\alpha+\tau-4-\mu-\nu-\pi}{\tau-1} - \cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$+ (-1)^\tau \cdot \binom{\alpha-1-\mu-\nu-\pi\ldots}{\tau-1}.$$

In diesem Aggregat von $(\tau - 1)$ten Binomialkoeffizienten, die gleich Null zu setzen sind, wenn die obere Zahl negativ ist, stehen in der $\varkappa$ten Zeile als obere Zahlen alle Differenzen zwischen $\alpha + \tau - \varkappa$ und allen Summen von je $\varkappa - 1$ der Zahlen $\mu, \nu, \pi \ldots$ und alle Glieder dieser Zeile haben das Vorzeichen $(-1)^{\varkappa-1}$. Um das Aggregat bequem schreiben zu können, kann man es in ein symbolisches Produkt von τ Faktoren

$$\text{symb}\,(\alpha - \mu)(\alpha - \nu)(\alpha - \pi) \ldots$$

zusammenfassen, wo also nach dem Ausmultiplizieren das Glied $(-1)^{\varkappa-1} \cdot \alpha^{\tau-\varkappa+1} \cdot \mu \cdot \nu \cdot \pi \ldots$, das $\varkappa - 1$ Faktoren $\mu, \nu, \pi \ldots$ enthält, zu ersetzen ist durch $(-1)^{\varkappa-1} \cdot \binom{\alpha + \tau - \varkappa - \mu - \nu - \pi \ldots}{\tau - 1}$.

Damit ist nun auch für den allgemeinen Fall, daß in $m, n, p \ldots, a$ verschiedene Primfaktoren r_i $(i = 1, 2, \ldots a)$ vorkommen mit den Exponenten $\mu_i \gtrless 0$, $\nu_i \gtrless 0$, $\ldots$ $\alpha_i \gtrless 0$, die gestellte Aufgabe gelöst:

Multipliziert man alle Teiler von m mit allen Teilern von n usw., so kommt unter diesen Produkten die Zahl a

$$\chi(mnp \ldots; a) = \prod_{i=1}^{a} \text{symb}\,(\alpha_i - \mu_i)(\alpha_i - \nu_i)(\alpha_i - \pi_i) \ldots$$

mal vor. Es braucht nicht hinzugefügt zu werden, daß a ein Teiler von $mnp \ldots$ sein soll, denn wenn ein $\alpha_i > \mu_i + \nu_i + \pi_i + \cdots$ ist, wird das Produkt gleich Null.

§ 4.

Es ist nun noch der in § 3 gebrauchte Satz über die Zerlegung einer Zahl in Summanden zu beweisen. Es sei

$$x_0 + x_1 + \cdots + x_{\tau-1} = \alpha \tag{1}$$

und $0 \gtrless x_0 \gtrless \mu$, $0 \gtrless x_1 \gtrless \nu$, $0 \gtrless x_2 \gtrless \pi$, $\ldots$

Denkt man sich die $x_0, x_1 \ldots$ als rechtwinklige Koordinaten eines τ-dimensionalen Raumes[1]), so ist die Gleichung (1) die Gleichung einer $(\tau - 1)$-dimensionalen Ebene dieses Raumes, die Gleichungen $x_0 = 0$, $x_0 = \mu$; $x_1 = 0$, $x_1 = \nu$ usw. sind ebenfalls die Gleichungen von 2τ Ebenen, die ein rechtwinkliges Parallelepipedon bestimmen. Die Anzahl der auf der Ebene (1) liegenden Gitterpunkte, die inner-

1) Ebenso verfährt Herr Hans Wolff in seiner Dissertation: Über die Anzahl der Zerlegungen einer ganzen Zahl in Summanden (Halle 1899). Dort wird aber das viel schwierigere Problem behandelt, die Anzahl der Zerlegungen unter den Bedingungen $0 \gtrless x_0 \gtrless x_1 \cdots \gtrless x_{\tau-1}$ zu bestimmen. Die hier gelöste Aufgabe ist eine Kompositions-, nicht eine Partitionsaufgabe.

halb oder auf der Begrenzung des Parallelepipedons liegen, ist die gesuchte Zahl. Ist nun zunächst α kleiner als alle Zahlen μ, ν, ..., so schneidet die Ebene aus dem Parallelepipedon ein $(\tau-1)$-dimensionales gleichseitiges Dreieck heraus (z. B. für $\tau=3$ ein eigentliches Dreieck, für $\tau=4$ ein Tetraeder), dessen Begrenzungen auf den Koordinatenebenen liegen. Auf einer Begrenzung dieses Dreiecks, die selbst ein Dreieck von $\tau-2$ Dimensionen ist, liegen $\binom{\alpha+\tau-2}{\tau-2}$ Gitterpunkte, das Dreieck enthält also nach demselben bekannten Satze über Binomialkoeffizienten, aus dem die angegebene Anzahl auf der Begrenzung folgt,

$$\binom{\tau-2}{\tau-2}+\binom{\tau-1}{\tau-2}+\cdots\binom{\alpha+\tau-2}{\tau-2}=\binom{\alpha+\tau-1}{\tau-1}$$

Gitterpunkte, und das ist in diesem Falle, wo die Zahlen x_i nur die Bedingung $x_i \gtrless 0$ $(i=0,1,2\ldots\tau-1)$ zu erfüllen haben, schon die gesuchte Zahl von Lösungen der Gleichung (1).[1])

Ist aber α größer als einige oder alle Zahlen μ, ν, ..., aber kleiner als die Summe von irgend zwei dieser Zahlen, so sind nicht alle Gitterpunkte des Dreiecks zu zählen, sondern die Gitterpunkte einer Anzahl von $(\tau-1)$-dimensionalen Dreiecken, mit denen das soeben betrachtete Dreieck jetzt über das Parallelepipedon hinausragt, sind wieder abzuziehen. Dabei ist zu beachten, daß die Gitterpunkte, die auf den Grenzflächen des Parallelepipedons liegen, nicht mit in Abrechnung zu bringen sind. So erklärt sich die zweite Zeile auf der rechten Seite der Gleichung (2) von § 3 und der Umstand, daß dort die obere Zahl der Binomialkoeffizienten den Minuenden $\alpha+\tau-2$ statt $\alpha+\tau-1$ hat. Die übrigen Zeilen verschwinden jetzt alle, weil die obere Zahl negativ oder wenigstens kleiner als die untere ist. Ist ferner α auch noch größer als eine oder mehrere der Summen von je zwei Zahlen μ, ν, ..., so greifen die Dreiecke, deren Gitterpunkte soeben abgerechnet wurden, zum Teil oder alle übereinander — was man sich für $\tau=3$ leicht veranschaulichen kann — und deshalb ist die dritte Zeile der erwähnten Gleichung hinzuzufügen, da man sonst die Gitterpunkte, die zugleich zu zwei solchen Dreiecken gehören und die wieder in einem Dreieck liegen, zweimal abgezogen hätte. In genau derselben Weise kann man nun fortfahren, sich von der Richtigkeit der Gleichung (2) des § 3 zu überzeugen.

---

1) Vergl. Wolff a. a. O. S. 5 und J. Hermes, Math. Ann. Bd. 45 S. 371. Während des Druckes habe ich bemerkt, daß der besondere Fall $\mu=\nu=\pi=\cdots$ des Zerlegungssatzes (für $x_i>0$) in Herrn Nettos Lehrbuch der Kombinatorik, S. 132, angegeben und anders als hier bewiesen ist.

Ist $\alpha > \mu + \nu + \pi \ldots$, so ist zuletzt ein Dreieck zu berücksichtigen mit $\binom{\alpha - 1 - \mu - \nu - \pi \cdots}{\tau - 1}$ Gitterpunkten, das allen vorher betrachteten Dreiecken gemeinsam ist. Auch wenn diese Zahl nicht gleich Null ist, ist nun doch die rechte Seite der Gleichung gleich Null, weil jeder dieser anscheinend übrig gebliebenen Gitterpunkte $1 - \binom{\tau}{1} + \binom{\tau}{2} \cdots = (1-1)^\tau = 0$ mal, d. h. ebenso oft mit positivem wie mit negativem Vorzeichen, in Rechnung gezogen worden ist.

Die Kant-Laplacesche Theorie und die Gasgesetze.

Von Edmund Hoppe.

Bei der Herausgabe der „Allgemeinen Naturgeschichte und Theorie des Himmels“ von J. Kant für Ostwalds Klassiker hat Ebert[1]) bereits darauf aufmerksam gemacht, daß es nicht richtig ist von einer Theorie Kant-Laplace zu reden, da prinzipielle Unterschiede zwischen beiden bestehen. Man kann getrost weitergehen und diese Theorien in vollen Gegensatz stellen. Die Verschiedenheit geht so weit, daß man sehr wohl Laplace verwerfen kann und Kant anerkennen und umgekehrt. Auch der Name „Nebularhypothese“ deckt weder die eine noch die andere Hypothese. Solche Nebulartheorien sind nämlich viel älter als Kant und Laplace. Sogar schon nach dem Ptolemäischen Weltsystem kommen Nebulartheorien vor z. B. bei dem Kirchenvater Gregor von Nyssa (4. sec).[2]) Seit Descartes[3]) war es ganz gebräuchlich sich die Weltentstehung als aus chaotischen Nebeln in wirbelnder Bewegung vorzustellen.[4]) Wir müssen beide

1) Ostwalds Klassiker 12. p. 95.

2) Zöckler, Geschichte der Bez. zwischen Theol. und Naturwiss. I 1877. p. 200.

3) Le monde de M. Descartes, Paris 1664.

4) Es ist bekannt, daß Kant sich später viel mit Swedenborgs Prophezeiungen beschäftigt hat, um so merkwürdiger ist es, daß er in seiner Arbeit über das Weltsystem den Namen Swedenborgs nicht erwähnt, obgleich dieser 1734 ein Weltentstehungssystem veröffentlicht hat, das in manchen Punkten an die Kantschen Vorstellungen sehr lebhaft anklingt. Dies System ist in dem großen dreibändigen Werke Swedenborgs: Principia rerum naturalium Lib. I pars III in den § 1—4 enthalten, welches in seinem 2ten und 3ten Bande dem Bergbau, speziell der Eisen-, Kupfer- und Silbergewinnung gewidmet ist. Er stellt sich ebenfalls das Weltall nach der Schöpfung des Chaos als ein aus

Theorien also genau auseinanderhalten. Gewöhnlich wird in einem Athem mit Kant-Laplace auch Lambert mit seinen kosmologischen Briefen[1]) genannt, aber Lambert hat mit dieser ganzen Theorie garnichts zu tun. Er weist nach, daß die Anschauung, daß Kometen die Ursache der Planeten- und Satellitenbildungen seien, unstatthaft ist und versucht, wie er selbst sagt (im 10ten Briefe) „romanhaft", das Planetensystem auf das System der Fixsterne zu erweitern, die sich um einen dunkeln Zentralkörper, dessen Ort durch die Abweichung der Planeten von der reinen Ellipsenbahn auffindbar sein müßte, drehen sollen. Angeregt wurde Lambert zu seinen Briefen durch die Entdeckung der Verrückung der Fixsterne durch Mayer (Göttingen) und durch die Schriften von Fontenelle, Whiston, Burnet und Derham, den Namen Kants erwähnt Lambert nirgend.

Auch Kant ist zu seiner Schrift angeregt durch Wright von Durham.[2]) Dieser hatte darauf aufmerksam gemacht, daß die Milchstraße eine Sphäre sei, in welcher die Anhäufung der Fixsterne wie in einer flachen Scheibe stattgefunden habe, eine Anschauung, die sich schon bei Swedenborg findet. Von dieser Bemerkung geht Kant aus und sagt: diese Ordnung des sichtbaren Kosmos muß einen Grund haben, welcher durch die Art des Entstehens gegeben ist, und die flache Scheibe des Sonnensystems ist nur eine Wiederholung dieses großen Zirkels im kleinen. Darum will er eine „Weltentstehung" zu ergründen suchen. Zunächst hat Gott das Chaos ge-

Elementarteilen gebildetes Gas vor. Von diesen Elementarteilen lehrt er: elementa illa sunt prima, universalissima, simplicissima (p. 376). Diese Elementarteile bilden Wirbel. Die Milchstraße ist ein großer Wirbel, in welchem die meisten Sterne zusammengedrängt sind, weil die Wirbel um Achsen drehen, die der Achse der Milchstraße parallel gerichtet sind, die Achse dieser Milchstraße ist die eigentliche Himmelsachse, zu ihr stehen alle Wirbel in Beziehung (p. 379). Auch die Bildung der Zentralkörper ist ganz analog der Kantschen Vorstellung. Er unterscheidet aktive und passive Elementarteilchen, d. h. solche die stärkere Attraktion ausüben und die mehr angezogen werden, und dann fährt er fort: quod activa altioris potentiae aut dimensionis in eodem spatio cum activis primi et secundi, propter differentiam in celeritate, circuli et massa esse nequeant, quin statim per influxum activorum minorum, primi scilicet et secundi omni sua vi activa orbentur (p. 391). Darum nennt er die Natur eine lebendige, wie auch Kant. Freilich die Bildung der Planeten ist bei ihm eine andere, sie gemahnt in etwas an Laplace: Die auf den Zentralkörper fallenden Massen umgeben denselben schließlich in einem Ringe, wenn sie eng genug aneinander gedrängt sind, und bilden Krusten oder dichteste Wolken, die schließlich vermöge ihrer Elastizität zerreißen und dann Planeten sind.

1) Kosmologische Briefe über die Einrichtung des Weltbaues, Augsburg 1761.

2) Wright: An original theory or new hypothesis of the universe, London 1750.

schaffen, d. h. die Materie in ihrem elementarischen Grundstoff, der den ganzen (unendlichen) Raum gefüllt hat. Die Verschiedenheit in den Gattungen der Elemente trägt zur Weiterbildung des Chaos am meisten bei. Die von größter spezifischer Dichtigkeit und Anziehungskraft, welche an und für sich weniger Raum einnehmen, sind in dem Raume zerstreuter als die leichteren Arten. Diese Elemente dichterer Art sammeln aus einer Sphäre um sich alle Materie von minderer spezifischer Schwere, sie selbst aber werden zu Punkten gezogen, wo noch dichtere Arten sich befinden, so entstehen Klumpen, die nach ihrer Bildung auf immer unbewegt bleiben. (Kant setzt also ausdrücklich nicht eine ursprünglich vorhandene Bewegung voraus, wie von vielen Darstellern behauptet wird.)[1]) Um nun rotierende Bewegung zu erzeugen, beachtet Kant die Elastizität der „Dünste". Vermöge der Zurückstoßungskraft derselben werden die zu ihren Anziehungspunkten sinkenden Elemente, wenn der Widerstand, den sie im Fallen gegeneinander seitwärts ausüben, nicht genau von allen Seiten gleich ist, von der gradlinigen Bewegung abgelenkt, und der senkrechte Fall schlägt in Kreisbewegungen um. Den ersten Anfang zur Bildung von Attraktionszentren lieferte die chemische Anziehung, aber für die Folge spielt diese keine Rolle mehr. Jene zu den Attraktionszentren hingezogenen leichteren Teile werden also durch jene Zurückstoßungskräfte im Wirbel um das Attraktionszentrum geschleudert. So entstehen alle möglichen Kreisbewegungen in den verschiedensten Ebenen. Diese wirken aufeinander einschränkend bis alle in gleicher Richtung fortgehen, und zweitens werden die Elemente, welche nicht seitwärts abgebogen sind, auf die Stellen größerer Attraktion hinfallen, also als selbständige Wesen verschwinden; die aber, welche hinreichend Schwungkraft erhalten haben, werden um den Zentralkörper kreisen. Es muß also alle Materie, die nicht in dieser Ebene liegt, durch Attraktion auf den Zentralkörper fallen. Die Lage der Planeten hängt ab von der Lage der ersten Attraktionspunkte und von der Dichtig-

1) Es ist wunderbar, wie solche verkehrten Darstellungen sich von Geschlecht zu Geschlecht fortpflanzen, und nur erklärbar durch eine unverzeihliche Nachlässigkeit, mit der die Späteren, ohne die Originalarbeiten einzusehen, sich für berechtigt halten, Darstellungen solcher Theorien zu geben, indem sie sich nur auf andere Darsteller berufen. So hält sich Darwin in seinem populären Buche (Ebbe und Flut p. 303) für berechtigt, die Nebularhypothese darzubieten, ohne Kant und Laplace je gelesen zu haben. Infolgedessen läßt er Kant Ringbildungen als erste Phase der Planeten statuieren, während davon in Kants Schriften mit keinem Wort die Rede ist, ebenso behauptet Darwin, Kant benutze die Saturnsringe als Beweise für seine Theorie der Planetenbewegung, und andere Unrichtigkeiten mehr.

keit, sodaß die Körper mit größerer Dichte näher an der Sonne liegen müssen als die leichteren. Die leichtere Materie wird aus dem ganzen Raum mehr auf den Zentralkörper fallen, und da sie das Feuer zu unterhalten imstande ist, wird der Zentralkörper zu brennen anfangen. Von der leichteren Materie werden die entfernten Planeten mehr anziehen können als die Sonnennahen, daher haben sie die größeren Maße. Für das Gleichgewicht der Materie ist dann notwendig, daß die Dichtigkeit der Sonne nahezu gleich der Dichtigkeit der Planetenmassen ist. Die Exzentrizität der Planetenbahnen ist Folge der Unvollkommenheit der Anpassung, daher je weiter entfernt der Planet desto mehr Exzentrizität. Die gleiche Bildung vollzieht sich im ganzen Weltenraum, und die verschiedenen Sonnensysteme bilden wieder ein Milchstraßensystem, und verschiedene Milchstraßensysteme wieder ein größeres System von Welten. —

Ich mache gleich jetzt darauf aufmerksam, daß von verschiedenen Seiten die Kantsche Theorie der Mondretardation und die bewundernswürdige Berechnung der Rotation des Saturnsringes als Beweise für die Richtigkeit des Systems angeführt sind.[1]) Aber beides hat mit dieser Theorie nichts zu tun. Die Flutwirkung auf den Mond ist eine einfache Anwendung der Newtonschen Attraktionstheorie auf den fertigen Weltkörper, und den Saturnsring läßt Kant ausdrücklich nicht nach seiner Theorie entstehen, sondern durch Dünste, die aus dem fertigen Himmelskörper aufsteigen und die Rotation des Körpers mitmachen. Diese beiden „glänzenden" Ergebnisse sind also von der Vorstellung der Weltentstehung gänzlich unabhängig und beweisen nur, wie trefflich Kant die Gravitationstheorie durchdacht hatte; sie bleiben in uneingeschränkter Gültigkeit, wenn man auch seine Weltentstehungstheorie verwirft. Auch muß darauf aufmerksam gemacht werden, daß Kant ohne weiteres einen Zentralkörper für das Weltsystem annimmt, der als „größte und leuchtendste" Sonne vorhanden sein müßte[2]), aber nicht sagt, wo und welche es ist, während Lambert sehr wohl einsieht, daß er diese Frage bei der Übertragung des Planetensystems auf den Kosmos beantworten muß. Da ein solcher leuchtender Zentralkörper nicht gefunden wird, erörtert Lambert zwei Möglichkeiten: 1) daß der Mittelpunkt des Weltsystems ohne Masse ist, also die Fixsterne ein System bilden, welches um seinen Schwerpunkt rotiert; 2) daß in diesem Mittelpunkt ein dunkler Körper von großen Dimensionen ruht. Er entscheidet sich für die 2te Alternative aus mechanischen Gründen.

1) cf. Ebert a. a. O. p. 97.

2) Vergleiche p. 64 mit 70 ff. l. c.

Ganz anders ist das System von Laplace[1]), er beabsichtigt nicht die Weltentstehung zu erklären, er beschränkt sich auf das Planetensystem und nimmt hierfür die Sonne als gegeben an, d. h. als einen Kern mit einer Atmosphäre, die den ganzen Raum des Planetensystems einnahm und schon eine Rotation hatte. Die Grenze dieser Atmosphäre ist dort anzusetzen, wo die Zentrifugalkraft gleich der Gravitation ist. An dieser Grenze findet durch die Abkühlung eine Kondensation statt, und es bildet sich ein Ring. Aber diese Ringbildung kann nur in der Äquatorebene der Sonne stattfinden, denn auf den Parallelkreisen ist die Gravitation stets größer als die Zentrifugalkraft, hier also müssen die Moleküle dauernd zum Zentrum gezogen werden. Durch weitere Abkühlung wird die Atmosphäre sich mehr und mehr zusammenziehen, und in demselben Maße, wie die Zusammenziehung erfolgt, muß die Rotation wachsen, da die Radii vectores der Moleküle stets gleiche Flächenstücke beschreiben müssen. Durch diese Vergrößerung der Rotation wird die Zentrifugalkraft wieder stärker, und es tritt von neuem die Grenzbedingung auf, daher eine erneute Ringbildung. Ein solcher Ring kann als Ring nur bestehen, wenn er durchaus homogen ist, dabei haben die inneren Teile eine geringere Geschwindigkeit als die äußeren. In der Regel wird die Homogenität nicht vorhanden sein, dann muß der Ring wegen der inneren Anziehung und der ungleichen Reibung zerreißen und einen oder mehrere Körper bilden, deren Rotation im Sinne der Revolution stattfindet; ersteres ist das gewöhnliche und wird immer eintreten, wenn eine Masse die andern Attraktionszentren im Ringe erheblich übertrifft, während letzteres nur bei den kleinen Planetoiden zwischen Mars und Jupiter eingetreten ist. Im Anfangsstadium einer solchen Planetenbildung ist also auch ein sich fortgesetzt vergrößernder Kern mit einer glühenden Atmosphäre vorhanden, und es kann sich hier wiederholen, was zur Absonderung der Planeten führte. So entstehen die Satelliten. Auch diese können sich nur wenig von der Äquatorebene entfernen. Die Abweichungen sind durch Dichtigkeits- und Temperaturdifferenzen entstanden.

Die Kometen gehören nach Laplace überhaupt nicht zum Sonnensystem, sie sind Weltkörper, welche in beliebigen Bahnen in das Sonnensystem hineinstürzen und durch die Attraktion der Sonne aus ihrer Bahn gelenkt, zu hyperbolischen oder elliptischen Bahnen gezwungen werden. Letzteres tritt ein bei größerer Annäherung an die

1) Laplace: Exposition du système du monde. Note VII. s. Oeuvres complètes T. VI p. 498. 1835.

Sonne. Wir sehen nur die Kometen, welche nahe bei der Sonne vorbeigehen, darum überwiegt die elliptische Bahn bei weitem. — Diese Laplacesche Theorie hat durch Verbindung mit dem Plateauschen Öltropfenversuch in den meisten modernen Darstellungen eine Veränderung erfahren, allein nachdem man sich davon überzeugt hatte, daß der Plateausche Versuch wegen der gänzlich anderen Versuchsbedingungen keine brauchbare Analogie gab, ist in neuerer Zeit wieder das Zurückgehen auf die Laplacesche Originalhypothese, als der richtigere Weg anerkannt.[1]) Wir haben also zu prüfen, wie sich diese und die Kantsche Hypothese mit den seither gemachten Erfahrungen verträgt. Es ist hierbei nicht nötig, die Kosmogonie Kants zu berücksichtigen, denn es hat sich gezeigt, daß die von Kant bei den Fixsternen oder in den kosmischen Nebeln gesuchten Analogien zu unserm Planetensystem nirgend vorhanden sind. Insbesondere hat die photographische Platte gezeigt, daß im oft angerufenen Andromedanebel durchaus nicht ein Laplacescher Ring um seinen Zentralkörper rotiert, ebenso zeigt das seit seiner ersten Darstellung unveränderte Bild des Spiralnebels im Sternbild der Jagdhunde, daß wir es hier nicht mit rotierenden Wirbeln zu tun haben. Selbst die Meinung Darwins, daß wir in den hellen Linien dieses Nebels die „Strömungskurven" einer mit enormer Geschwindigkeit sich bewegenden Materie sähen, muß unmöglich erscheinen, wenn wir uns die Frage vorlegen, wo bleibt diese ungeheuer große Masse bei ihrer schnellen Strömung. Es ist also lediglich Sache der Spekulation resp. Phantasie sich hiervon ein Bild zu entwerfen, und es gibt kein Mittel, die Sache wissenschaftlich zu behandeln. Wir beschränken uns also allein auf das Sonnensystem.

Das erste sehr gewichtige Bedenken richtet sich gegen die Laplacesche Theorie und ist von Babinet der Akademie in Paris vorgetragen.[2]) Er erinnert an eine Bemerkung Le Verriers, daß es mit der Laplaceschen Vorstellung leichter sei die Bildung kleiner Planeten und kleiner in der Nähe der Sonne um diese kreisenden isolierten Massen zu begreifen, als die Erzeugung beträchtlicher

1) Es mag ausdrücklich darauf hingewiesen werden, daß es sich bei Plateau nicht um Gravitation und Zentrifugalkraft, sondern um Kapillarität und Zentrifugalkraft handelt, daß bei Plateau die Dichte überall konstant ist und die Versuchsbedingungen zunächst Beschleunigung, dann plötzliche Arretierung und darauf wieder zunehmende Rotation der Scheibe verlangen, sodaß also keinerlei Analogie besteht und nur eine formale Ähnlichkeit zu dieser trügerischen Vergleichung geführt hat.

2) Babinet. Compt. rend. 1861 I p. 481.

Planetenkörper. Dann legt er sich die Frage vor, wie mußte sich eine Rotation der Sonne ausnehmen, wenn die gasförmige Atmosphäre bis zur Neptunsbahn gereicht hätte unter Zugrundelegung des ja auch von Laplace angerufenen Flächensatzes, also unter der Bedingung, daß die Summe der von allen Molekülen beschriebenen Radii-vectores-Sektoren konstant bleibt. Die Summe dieser von den Radiivektoren beschriebenen Flächen ist durch das bestimmte Integral von $x = 0$ bis $x = r$ gegeben über den Ausdruck

$$2\pi \cdot \omega \cdot \partial \cdot x^3 \cdot dx \sqrt{r^2 - x^2},$$

wo mit ∂ die Dichtigkeit bezeichnet werden soll.

Das Integral

$$\int 2x^3 \cdot dx \cdot \sqrt{r^2 - x^2} \quad \text{ist} \quad = -\tfrac{2}{5} x^2 (r^2 - x^2)^{\frac{3}{2}} - \tfrac{4}{15} (r^2 - x^2)^{\frac{5}{2}} + e.$$

Setzen wir hierin die Grenzen $x = 0$ und $x = r$, so ist

$$\int_0^r 2\pi\omega \cdot \partial \cdot x^3 dx \sqrt{r^2 - x^2} = \tfrac{4}{15}\pi \cdot \omega \cdot \partial \cdot r^5.$$

Für irgend einen andern Radius r_1 und eine andere Winkelgeschwindigkeit ω_1 würde sein die Summe der Flächen $= \frac{4}{15}\pi\omega_1\partial_1 \cdot r_1^5$ und da die Flächensumme konstant sein muß, so folgt

$$\tfrac{4}{15}\pi\omega \cdot \partial \cdot r^5 = \tfrac{4}{15}\pi\omega_1 \cdot \partial_1 \cdot r_1^5.$$

Da nun $\partial_1 = \partial \frac{r^3}{r_1^3}$ sein muß, so folgt

$$\omega_1 r_1^2 = \omega \cdot r^2.$$

Babinet nimmt den Radius der Sonne = 112 Erdradien, und den der Erdbahn = 24 000 Erdradien, dann müßte also sein

$$\omega_1 \cdot 24000^2 = \omega \cdot 112^2,$$

und da die Umlaufszeit der Sonne jetzt = 25,3 Tagen ist, müßte die Umlaufszeit dann gewesen sein 1 162 000 Tage = 3183 Jahre! Hätte sich aber gar die Nebelmasse bis zum Neptun erstreckt, dessen Entfernung ca. 30 Erdweiten beträgt, dann hätte die Umlaufszeit mehr als 27 Millionen Jahre gedauert. Babinet schließt daraus, daß dann die Geschwindigkeit so gering gewesen wäre, daß die Zentrifugalkraft niemals einen Ring von der Masse hätte absondern können. Allein da auch die Attraktion im Verhältnis des Quadrats der Entfernung abnimmt, so würde sich daraus nur ergeben, daß beider Verhältnis nicht geändert wird; daß also, wenn jetzt die Gravitation größer ist als die Zentrifugalkraft, durch einfache Ausdehnung bis zur Neptuns-

bahn an diesem Zustand nichts geändert wurde. Richtiger ist wohl, darauf hinzuweisen, daß der abgelöste Körper nun die Geschwindigkeit des Ringes hätte beibehalten müssen, wie Laplace auch richtig sagt, tatsächlich sehen wir aber die Erde in 365,25 Tagen und den Neptun in 60 181 Tagen umlaufen. Will man aber die Flut- und Ebbe-Reibung berücksichtigen, wie bei einer bis nahe an den Planeten reichenden Sonne doch wohl nötig wäre, so würde diese Reibung nicht eine Beschleunigung, sondern eine Verzögerung bedingt haben. Es wäre also niemals möglich, daß statt 3183 Jahren eine Umlaufszeit von 365,25 Tagen entstanden wäre.

Auf ein anderes Bedenken hat zuerst Meißel aufmerksam gemacht.[1]) Nach Laplace sollte nach der ersten Ringabsonderung ein Zustand eintreten für den übrig bleibenden Kern, bei welchem die Attraktion eine fortgesetzte Kondensation bewirkte. Durch diese sollte die Rotation beschleunigt werden bis wieder die Zentrifugalkraft größer als die Attraktion würde und eine erneute Ringabsonderung stattfinde. Wenn wir r den Radius und ω die Winkelgeschwindigkeit für die äußere Begrenzung im ersten Falle nennen, so ist also dann $\omega^2 r$, d. h. die Zentrifugalkraft kleiner gewesen als die Gravitation d. h. (abgesehen von Konstanten) $\omega^2 r < \frac{M}{r^2}$; oder $\omega^2 r^2 < \frac{M}{r}$. Wird nun der Radius verkürzt auf r_1, so sei die Winkelgeschwindigkeit ω_1. Ist diese Verkürzung isotherm verlaufen, so muß die ganze Kontraktionsarbeit, wie es Laplace auch annimmt, zur Vermehrung der Rotation dienen, es muß dann also die lebendige Kraft dieselbe bleiben, also $\omega^2 r^2 = \omega_1^2 \cdot r_1^2$ sein, also ist $\omega_1^2 r_1^2 < \frac{M}{r} < \frac{M}{r_1}$, also $\omega_1^2 r_1 < \frac{M}{r_1^2}$. Das heißt in dem neuen Zustande muß die Zentrifugalkraft immer kleiner bleiben als die Gravitation. Wurde ein Teil der Arbeit zur Temperaturerhöhung verbraucht, so würde erst recht die Zentrifugalkraft kleiner sein als die Gravitation, es kann also durch einfache Verkürzung des Radius, d. h. durch innere Kräfte weder isotherm, noch viel weniger mit Temperaturerhöhung eine solche Beschleunigung eintreten, daß die Ringabsonderung erfolgt. Diese wäre also nur durch Verwandlung von Wärme in Arbeit zu ermöglichen, d. h. für ein sich selbst überlassenes System unmöglich, es bedarf also eines äußeren Impulses.

Weitere Schwierigkeiten erwachsen sowohl der Laplaceschen

---

1) Meißel: Über Reihen, die bei dem Problem der 3 Körper auftreten *p. 11.* Kiel 1882.

wie der Kantschen Theorie aus der Entdeckung der retrograden Bewegung der Uranus- und Neptuntrabanten. Während die Umlaufsebenen der Planeten selbst um die Sonne weniger von der mittleren Eulerschen Ebene[1]) abweichen als die Erde, müßten die Bahnen der Uranustrabanten um mehr als 100° gedreht werden, um in die normale Lage zu kommen, und der Neptunstrabant müßte seine Bahn um 145° neigen, wenn er als rechtläufig betrachtet werden sollte, d. h. seine Bahn ist um 35° geneigt gegen die Ekliptik, aber er geht verkehrt herum. Seit nun für den Uranus die lange vermutete Rotation in gleichem Sinne wie die Trabanten durch Deslandres[2]) nachgewiesen ist, hat diese retrograde Bewegung eine noch schwerere Bedeutung. Was zunächst Laplaces Theorie angeht, so kann beim Zerreißen des Körpers ohne äußere Kräfte oder ohne neue Hypothesen keine retrograde Rotation entstehen, da die äußeren Teile immer größere lineare Geschwindigkeit haben als die inneren. Aber auch die Kantsche Entstehung läßt solche retrograde Bewegung nicht zu, denn bei ihr ist die Eigenrotation der Planeten, welche durch die Reibung resp. die Zurückstoßungskräfte entstanden ist, ja gerade die Veranlassung zur Bewegung um die Sonne, ohne solche Eigenrotation würde der Planet einfach auf die Sonne gezogen sein. Erst durch die Reibung von Ebbe und Flut kann die Eigenrotation, nachdem der Umlauf hergestellt war, vernichtet werden, wie es beim Monde geschehen ist. Freilich nimmt Kant für die Planeten die Existenz aller möglichen Bahnen an, weil bei ihnen die Masse zu gering ist und die Entfernung zu groß, als daß die Massen der Planeten und Sonne sie in die gleiche Bahn gebracht hätten. [Allerdings sind ihm die 19 damals bekannten, verkehrt um die Sonne laufenden Kometen doch recht unbequem, und er meint sogar, es könne diese verkehrte Umlaufsrichtung nur optischer Schein (!) sein (l. c. p. 33).] Aber hier bei den äußeren Planeten ist nicht, wie Kant für die hypothetischen Planeten außerhalb des Saturn annahm, die Bahn um die Sonne stark exzentrisch und geneigt, sondern im Gegenteil am wenigsten geneigt und fast kreisförmig, ihre Umlaufsbahn ist also in stärkstem Kontrast zu ihrer Eigendrehung, es ist also nicht zu erklären, wie gerade bei den Planeten, deren Umlaufsbewegungen um die Sonne sich den Forderungen seiner Theorie am vollkommensten angeschlossen haben, die Eigenrotation genau das Gegenteil bedingen würde. Daß auch Kants Forderungen über die Dichtigkeiten der Planeten und ihre

1) L. Euler. De cirulo maximo. Nov. Comment. Soc. Petr. XX. p. 509.
2) Compt. rend. 1902 II. p. 500.

Massen sich durchaus nicht bewahrheitet haben, sei nur nebenbei erwähnt.

Noch muß auf ganz gewichtige mechanische Bedenken gegen die Ringabsonderung hingewiesen werden. Bekanntlich behandelte Dirichlet in seiner letzten Arbeit das Problem der Bewegung eines flüssigen Ellipsoids in der ausgesprochenen Absicht diese Betrachtung auf die Himmelskörper anzuwenden. Riemann[1]), der das unvollendete Problem aufnahm, führte es so weit durch, daß er bestimmte Bedingungen zwischen Umlaufszeit, Rotation, Exzentrizität und Dichtigkeit aufstellen konnte, welche entscheiden, ob das Ellipsoid in labilem oder stabilem Gleichgewicht sich befindet, wenn man für stabiles Gleichgewicht die Bedingung annimmt, daß unendlich kleiner Änderung von Gestalt und Bewegungszustand auch nur unendlich kleine Schwankungen entsprechen. W. Thomson[2]) hat dasselbe Problem dann zahlenmäßig behandelt und findet z. B. als Grenzwert für $\frac{\omega^2}{2\pi\varrho}$, wo ω die Winkelgeschwindigkeit, ϱ die Dichte ist, den Wert 0,2247, sodaß, wenn $\omega > \sqrt{0{,}2247 \cdot 2\pi\varrho}$ ist, ein Rotationsellipsoid unmöglich ist. Auf diese Thomsonschen Arbeiten gründet Love eine ausführliche Rechnung für Erde und Mond. Für die Zeit als der Mond sich abgelöst hat von dem Gesamtsphäroid, welches in Rotation war, will er die Rotationsdauer bestimmen, die den stabilen Zustand noch zuläßt. Love[3]), welcher mit dem Verhältnis der gegenwärtigen Dichtigkeit zur Umlaufszeit rechnet, findet, daß, für die Dichtigkeit des Mondes = 3,7 gesetzt, das Gleichgewicht bereits unstabil wird, wenn die Umlaufszeit > ist als 3 Stunden, und für eine Dichtigkeit = der Erddichte kommt als Grenzwert nahezu 2 Stunden heraus. Aus diesen genauen Berechnungen ergibt sich ihm, daß die Laplacesche Theorie unmöglich ist, da eine so kleine Rotationszeit als Anfangsstadium kaum zulässig erscheint.

Von ganz andern Gesichtspunkten kommt Darwin[4]) zu dem gleichen Resultat. Darwin sagt die einzige, wirklich verfolgbare

---

1) Riemann, Abhandl. d. Ges. d. Wissensch. Göttingen 1861. Gesammelte Werke p. 168.

2) Thomson: Handbuch der theoretischen Physik. I_2. p. 315 (deutsche Ausgabe) 1874.

3) Phil. Magazine 1889 Nr. 27 p. 254.

4) Phil. Transactions 1879 I p. 1. II p. 447 und 539. Die weiteren Untersuchungen über die Gleichgewichtsfiguren, wie sie von Roche, von Poincaré, von Schwarzschild und anderen ausgeführt sind, liegen außerhalb der Grenzen dieser Betrachtung, da sie weder mit der Kantschen noch der Laplaceschen Theorie direkte Beziehungen haben.

Wirkung zweier Himmelskörper aufeinander ist die Flut- und Ebbeerscheinung, sie macht er zum Gegenstand einer Reihe von trefflichen Untersuchungen, die sich zunächst nur auf das Verhältnis von Erde und Mond beziehen. Im Verlauf der Entwicklung gelingt es ihm eine Gleichung aufzustellen, welche gestattet, die Winkelgeschwindigkeit der Erde (n) und die Winkelgeschwindigkeit des Mondumlaufs (ω) zu irgend einer beliebigen Zeit mit den gleichen Größen zur Zeit 0, d. h. mit n_0 und ω_0, in Beziehung zu setzen unter Vernachlässigung der Neigung der Mondbahn. Diese Gleichung lautet:

$$\frac{n}{n_0} = 1 + \mu\left(1 - \left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^{\frac{1}{3}}\right);$$

wo μ eine Konstante ist, die allein abhängt von n_0, ω_0, dem mittleren Radius der Erde a, der Masse der Erde (M) und der Masse des Mondes (m); ist $\frac{M}{m} = \nu$, so ist:

$$\mu = \frac{1}{\frac{2}{5}\left\{\left(\frac{a}{g}\right)^2 \nu^2(1+\nu)\right\}^{\frac{1}{3}} n_0 \cdot \omega_0^{\frac{1}{3}}}.$$

Setzt man in jener Gleichung $n = \omega$, so bekommt man einen Zustand, wo Erde und Mond wie ein starrer Körper um den Mittelpunkt der Erde kreisen, wo also die Ebbe und Flut aufhört. Die Gleichung hat zwei reelle Wurzeln, es ergibt sich als Umlaufszeit $5^h\,36'$ und $55\frac{1}{2}$ mittlerer Sterntag. Der erstere Wert ist der, wo der Mond in unmittelbarer Nähe der Erdoberfläche mit dieser gleiche Rotation hat, der zweite Wert ist das Endziel unserer Erde, wo die Verzögerung durch die Flutreibung die Rotation der Erde so verlangsamt hat, daß sie sich in $55\frac{1}{2}$ Tagen einmal um ihre Achse dreht und der Monat die gleiche Länge bekommt. Dabei muß der Mond immer weiter von der Erde abrücken. Auch die Zeit, welche seit jener Anfangsperiode verflossen ist, berechnet Darwin zu 54 Millionen Jahren. Dabei ist aber von Wichtigkeit, daß dieser Anfangszustand instabil ist. Was aber vorher geschehen sein kann, darüber kann die Berechnung der Reibung keinen Aufschluß geben. Ein Satellit, welcher schneller als der Planet rotiert, muß notwendig auf den Planeten fallen, das würde also das Schicksal des Phobos beim Mars sein. Da bei jener Rotationsgeschwindigkeit die Erde noch nicht die Instabilitätsgrenze erreicht hat, ist die Ringabtrennung nicht wohl möglich, dagegen vermutet Darwin, daß durch die Übereinstimmung der Sonnenflut mit der freien Schwingungsdauer der als homogene Flüssigkeit vorausgesetzten Erde, welche von Thomson zu $1^h\,34'$

berechnet ist, ein Hervorbrechen von Masse aus der in 3 bis 4 Stunden rotierenden Kugel veranlaßt worden ist. Die gleiche Entstehungsart für die Planeten aus der Sonne anzunehmen, ist aber nicht möglich. Die enorme Rotationsgeschwindigkeit, welche für die Erde und in gleicher Weise für die andern Planeten in ihrem Entwicklungsstadium zur Zeit der Satellitenentstehung notwendig war, macht natürlich die Annahme einer Ringabsonderung von der Sonne nach Laplace unmöglich, aber auch nach Kant. Denn bei Kant entsteht die Rotation allmählich aus der Ablenkung der fallenden Partikeln. Wie man nun, wenn die Theorie bei den beiden Körpern, wo wir die zuverlässigsten Berechnungen machen können, nämlich bei der Erde und dem Monde, versagt, trotzdem bei den übrigen Planeten die „Nebularhypothese" aufrecht erhalten will, ist mir nicht verständlich.

Eine eigenartige Korrektion an Laplaces Theorie bringt Faye an.[1]) Er erkennt an, daß die retrograden Bewegungen der Satelliten der äußersten Planeten mit Laplaces Theorie völlig unvereinbar seien, aber er meint, man könne die Ausnahmen erklären. Zunächst kann man, wie schon Cassini getan hat, die Saturnsringe nicht als Gasmassen, sondern als Anhäufungen von Satelliten ansehen[2]), dann wäre selbstverständlich, daß die äußeren Teile langsamer gingen als die inneren. Wenn dann aber eine Zerreißung des Ringes erfolgt, so müßte für den sich bildenden Körper eine retrograde Bewegung entstehen. Außer der retrograden Bewegung ist eine Ausnahme gegen das Laplacesche System die schnelle Rotation des Phobos um den Mars. Nach Laplace muß jeder Satellit langsamer rotieren als es der Planet tut, aber Phobos gebraucht dreimal weniger Zeit zum Umlauf als der Mars selbst. Ein Analogon würde in dem schnelleren Umlauf einer der Saturnsringe bestehen, wie Roche sie bestimmt hat. Um nun zu untersuchen, ob und wann eine Ringabsonderung stattgefunden habe, setzt Faye voraus, daß die Sonne in einem flüssigen Zustande ist, dessen Dichtigkeit sich stetig ändert. Diese Dichtigkeit will er in die Form bringen $\varrho = D\left(1 - (1-\alpha)\sqrt[n]{\frac{r}{R}}\right)$, wo D die Dichtigkeit im Zentrum, R der Radius des Sonnenäquators, r die Entfernung des betrachteten Punktes, α eine Konstante $\leqq 1$, n eine positive willkürliche Zahl ist. Dann ist die Masse der Kugelschale vom Radius $r = 4\pi r^2 dr \cdot D\left(1 - (1-\alpha)\sqrt[n]{\frac{r}{R}}\right)$. Durch Inte-

1) Faye: Compt. rend. 90 p. 566 und 637. 1880.
2) Cassini, Elémens d'astronomie. Paris 1740.

gration ergibt sich die Masse $M = \frac{4}{3}\pi R^3 D \frac{1+3\alpha n}{1+3n}$. Daraus berechnet er die Zentrifugalkraft $\omega^2 R = \frac{p^2}{M^2\beta^2} \cdot \frac{1}{R^3}$, wo p eine Konstante, β nur von α und n abhängig ist. Wendet man das auf den gegenwärtigen Zustand an, wo die entsprechenden Größen durch den Index 1 bezeichnet sind, und berechnet gleichzeitig die Gravitation, so verhalten die beiden sich wie $\frac{1}{28\,000}$. Für diesen Fall ist also $\frac{p^2}{M^2\beta_1^2}\frac{1}{R_1^2} = \frac{1}{28\,000} \cdot \frac{fM}{R_1^2}$, oder wenn wir aus den beiden letzten Gleichungen p eliminieren; so ist $\frac{\text{Zentrifugalkraft}}{\text{Attraktion}} = \frac{1}{28\,000} \cdot \frac{\beta_1^2}{\beta^2} \cdot \frac{R_1}{R}$.

Da β' und β, welche Werte man auch n beilegen mag, nicht sehr verschieden werden, ergibt sich, daß die Sonne niemals etwas von ihrer Masse verloren haben könnte. Dies mit dem Meißelschen Resultat übereinstimmende Ergebnis ist für die Laplacesche Theorie sehr verhängnisvoll.

In einer folgenden Arbeit versucht Faye dagegen, die Schwere als eine Funktion der Entfernung darzustellen in der Form $\mu(r^{-2} + \mu' r)$ und leitet daraus ab, daß die lineare Geschwindigkeit der Rotation der einzelnen Teile bis zu einer bestimmten Entfernung vom Mittelpunkt wächst, während sie von diesem Grenzwert an abnehmen müßte und will daraus die retrograde Rotation der äußersten Planeten ableiten. Allein schon der Grenzwert, welchen er berechnet, nämlich

$$r = R\left(\frac{2}{3 \cdot \beta}\frac{1+3n}{1+2n}\right)^n$$

wird für $n = \frac{1}{3}$ (ein Wert, welchen er selbst vorschlägt) zu $R\left(\frac{4}{5\beta}\right)^{\frac{1}{3}}$; da β nahezu 1 ist, ist r also $< R$, da R der gegenwärtige Sonnenradius ist, ergibt sich schon hieraus, daß diese willkürlichen Annahmen gänzlich unstatthaft sind.

Von größter Bedeutung sowohl für die Laplacesche Vorstellung wie für die Kants sind die ausführlichen Untersuchungen Ritters.[1]) Derselbe geht aus von der Berechnung der Höhe der Atmosphäre und setzt dabei voraus, daß diese 1) ein vollkommenes Gas sei, 2) Wasserdampf sei, 3) ein Gemisch von Dämpfen und Gasen. Zunächst macht Ritter davon eine Reihe sehr interessanter Anwendungen auf die Himmelskörper, aber für unseren Zweck interessiert wesentlich die vorletzte Arbeit, wo er die gasförmigen Weltkörper

1) Ritter: Wiedemann Annalen 5. 1878 p. 405 u. 543; 6. 1879 p. 135; 7. 1879 p. 304; 8. 1879 p. 157; 10. 1880 p. 130; 11. 1880 p. 332 u. 978.

behandelt. Ein solcher Körper kann nur beständig sein, wenn seine kleinsten Teile adiabatisch im Gleichgewicht sich befinden, und für diesen Zustand ergibt sich zunächst, daß das Verhältnis der beiden spezifischen Wärmen $c_p : c_v >$ als $\frac{6}{5}$ sein muß $= k$. Bezeichnet nun p den Druck per Quadratmeter in der Entfernung ϱ vom Zentrum, γ das Gewicht eines Kubikmeters in der gleichen Entfernung, so ist für ein Mariotte-Gay-Lyssacsches Gas $\frac{p}{\gamma} = RT$. Wenn M die Masse der Kugel vom Radius ϱ, E die vom Radius r ist und S die Gesamtmasse mit der äußersten Entfernung λr bezeichnet, so berechnet Ritter zwei Ausdrücke für die innere Wärme erstens aus der bekannten Gleichung

$$U = \frac{c_v}{A} \int_{\varrho=0}^{\varrho=\lambda r} T \cdot dM = \frac{r^2}{kE} \int_0^{\lambda r} \frac{M^2 d\varrho}{\varrho^2}.$$

Durch zweimalige partielle Integration ergibt sich:

$$U = \frac{r^2}{kE} \left\{ -\frac{S^2}{\lambda r} + 2 \int_{\varrho=0}^{\varrho=\lambda r} \frac{M \cdot dM}{\varrho} \right\},$$

und wenn man das Potential der Kugel mit $\mathfrak{A}$ bezeichnet, so ist

$$\mathfrak{A} = \frac{r^2}{E} \int_{\varrho=0}^{\varrho=\lambda r} \frac{M \cdot dM}{\varrho},$$

dann ist

$$U = -\frac{S^2 r}{kE \cdot \lambda} + \frac{2\mathfrak{A}}{k}.$$

Andererseits ist aus der mechanischen Wärmetheorie ableitbar die Beziehung $\frac{\mathfrak{A}}{U} = 3(k-1)$; d. h. $U = \frac{\mathfrak{A}}{3(k-1)}$. Daraus folgt durch Gleichsetzung und Auflösung nach $\mathfrak{A}$

$$\mathfrak{A} = \frac{3(k-1)S^2 r}{(5k-6)E\lambda}.$$

Es ergibt sich also hieraus, daß $\mathfrak{A} = \infty$ wird für $k = \frac{6}{5}$; da k zwischen 1 und $\frac{5}{3}$ schwanken kann, sind die Grenzwerte aufzusuchen; für $k = \frac{4}{3}$ ist $\mathfrak{A} = U$; ist $k < \frac{4}{3}$ so ist $\mathfrak{A} < U$, also ist dann das Gleichgewicht labil. Also erhalten wir für

$\frac{5}{3} \geqq k \geqq \frac{4}{3}$	der adiabatische	Gleichgewichtszustand	ist	indifferent
$\frac{4}{3} > k \geqq \frac{6}{5}$	„	„	„	ist labil
$\frac{6}{5} > k \geqq 1$	„	„	„	ist unmöglich.

Nun ändert sich k aber für ein Gas, wenn es in den Zustand des gesättigten Dampfes übergeht, und dieser Zustand muß ezreicht werden durch fortgesetzte Ausdehnung, die nur mit Abkühlung verbunden sein kann. Bei Wasserdampf unter der Siedetemperatur ist $k = 1{,}038$, d. h. $<$ als $\frac{6}{5}$. Bei anderen Gasen liegt die Sache wahrscheinlich ebenso, d. h. es gibt für einen solchen Gaskörper eine bestimmte Volumengrenze, über den er nicht hinaus ausgedehnt werden kann, ohne sich in den Weltenraum zu zerstreuen. Daraus folgt bereits mit Sicherheit, daß der Kantsche Anfangszustand unmöglich ist, denn bei ihm sollte der unendliche Raum mit der Materie erfüllt sein.

Noch ein weiteres Resultat Ritters hat die Veranlassung geboten zu einer Kontrollrechnung. Setzt man nämlich voraus, daß die Dichtigkeitszunahme im Zentrum bei Kontraktion des Gasballes nicht bis ∞ fortgeht, sondern eine Grenze hat, so ergibt sich, daß bei der Kontraktion bis zur Erreichung dieses Grenzwertes die Temperatur fortgesetzt steigen muß, um von da an abzunehmen. Rechnet man von der Gegenwart also zurück, so erhält man eine Grenze des Volumens, bei welcher die Temperatur nahezu 0 ist, ganz 0 kann sie natürlich nur werden, wenn die Materie unendlich verdünnt ist. Da ergibt sich nun, daß schon, ehe die Neptunsbahn erreicht wird, diese sehr niedrige Temperatur vorhanden sein mußte, sodaß also der Laplacesche glühende Nebelball bis zum Neptun nicht möglich ist.[1])

Von sehr großer Bedeutung ist endlich eine Arbeit von Lemke.[2]) Es seien gegeben eine Anzahl fester Körper im Endlichen von unveränderter Lage, dazwischen breite sich ein homogenes Mariotte-Gay-Lussacsches Gas aus, das nur durch die Gravitation beeinflußt wird. Lemke bestimmt den Druck p des Gases für den Gleichgewichtszustand, ε sei Dichtigkeit, p Druck, Φ Potential im Punkte xyz, dann ist Gleichgewicht, wenn $dp = \varepsilon \cdot d\Phi$ ist $= \varepsilon(dU + dV)$, wenn dU die Kraftkomponenten von den festen Körpern, dV die von der Gasmasse sind. Nun ist $p = a^2 \cdot \varepsilon$, wo $a^2 = \text{Const.}$ ist, d. h. $a^2 d \log p = dU + dV$; da xyz außerhalb der Körper liegt, ist $\Delta U = 0$; $\Delta V = -4\pi f \varepsilon$, wo f die Gravitationskonstante ist. Daraus folgt, wenn $\log p = u$ gesetzt wird

$$a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) = -4\pi f \frac{p}{a^2} = -\frac{4\pi f e^u}{a^2}$$

oder

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = -2\lambda e^u; \qquad \left(\lambda = \frac{2\pi f}{a^4}\right)$$

1) Stoney u. Bryan s. Arrhenius, kosmische Physik 1903 p. 224.

2) Lemke, Journal für reine und angewandte Mathematik Bd. 124 p. 143.

als Gleichgewichtsbedingung, welcher der Druck als Funktion der drei Raumkoordinaten zu genügen hat. Nun zeigt Lemke zunächst, daß jedes Integral dieser Gleichung im Unendlichen wie $-2\log r$ unendlich wird, und dann, daß jedes Integral, welches auf einer Anzahl geschlossener Flächen vorgeschriebene Werte annimmt, die Druckverteilung einer im Gleichgewicht befindlichen Gasmasse bestimmt.

Verwandelt man nämlich die dreifache Integration

$$\iiint \Delta u \, dx \, dy \, dz$$

in eine Flächenintegration, also

$$\iiint \Delta u \, dx \cdot dy \cdot dz = -\int \frac{\partial u}{\partial n} \cdot d\omega \tag{1}$$

und setzt für Δu wieder $-\frac{4\pi f \cdot \varepsilon}{a^2}$ ein, so ist $\int f\varepsilon dx \cdot dy \cdot dz =$ der Gesamtmasse M, diese ist also durch den Wert von $\frac{\partial \log p}{\partial n}$ auf der Begrenzung vollständig bestimmt. Sobald nun die Begrenzung gebildet wird von den Oberflächen der festen Körper und der unendlich großen Kugel, würde $\int \frac{\partial u}{\partial n} \cdot d\omega$ mit R unendlich werden; soll also

$$\iiint \Delta u \, dx \cdot dy \cdot dz = \frac{Ma^2}{4\pi}$$

sein, so kann die Gleichung (1) nur erfüllt werden, wenn $p = 0$ und $\varepsilon = 0$ ist. D. h. eine endliche Masse kann nur dann im unendlichen Raume einen Gleichgewichtszustand haben, wenn ihr Druck $= 0$ ist und ihre Dichtigkeit $= 0$.

In einer späteren Arbeit[1]) geht Lemke dann dazu über, die Integrale jener Differentialgleichung für endliche Begrenzung wirklich herzustellen. Uns interessiert hier das angegebene Resultat, weil dadurch erwiesen ist, daß die ursprüngliche Annahme Kants überhaupt unmöglich ist.

Damit scheinen mir die Versuche, die Laplacesche Theorie durch Hilfsannahmen zur Erklärung der retrograden Bewegung der äußersten Planeten zu retten, von geringem Interesse, ehe nicht dies Bedenken gegen den hypothetischen Anfangszustand beseitigt werden, da es mir ungereimt zu sein scheint, einen als unmöglich erkannten Anfangszustand sich entwickeln zu lassen.

---

1) Lemke, Über das Gleichgewicht der Atmosphären der Himmelskörper, Berlin 1904.

Elementar-geometrische Herleitung einer nichteuklidischen Längenmaßbestimmung.

Von Gustav Lony.

Bekanntlich läßt sich die hyperbolische Geometrie herleiten aus der Geometrie der Kreisbündel der Euklidischen Ebene. Am einfachsten geht man dabei aus von demjenigen Orthogonalbündel, das von allen die Achse senkrecht schneidenden Kreisen gebildet wird.[1]) Wählt man als „Pseudogerade" die oberhalb der X-Achse gelegenen Halbkreise dieses Kreisbündels uud trifft außerdem die Festsetzung, daß die X-Achse und damit auch die Endpunkte jener Halbkreise zum unendlich fernen Gebiet der betrachteten Halbebene gehören sollen, so erhält man eine Geometrie, in der alle Axiome der Euklidischen Geometrie gelten außer dem Parallelenaxiom. Durch einen Punkt außerhalb einer Pseudogeraden gibt es zwei verschiedene Parallele (d. h. Grenzgerade zwischen schneidenden und nichtschneidenden Geraden), die mit dem Lot von dem Punkt auf die Pseudogerade gleiche Winkel bilden. Als Längenmaß für die Entfernung zweier Punkte P_1 und P_2 benutzt man in dieser Geometrie die Funktion $\log \frac{\operatorname{tg} \frac{\varphi_1}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\varphi_2}{2}}$. Darin bedeutet φ_1 den Winkel, den die (euklidische) Verbindungsgerade des Punktes P_1 und des Mittelpunktes des durch P_1 und P_2 bestimmten pseudogeraden Halbkreises mit der positiven X-Achse bildet; entsprechend ist die Bedeutung von φ_2 (Fig. 1).

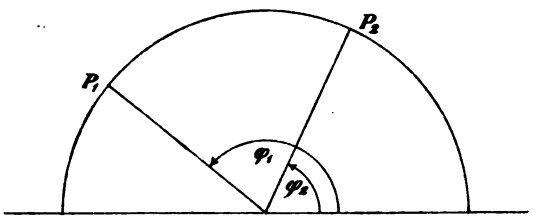


Fig. 1.

Die vorliegende Notiz soll für die Funktion $\log \frac{\operatorname{tg} \frac{\varphi_1}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\varphi_2}{2}}$ eine elementargeometrische Herleitung geben, zu der uns folgende Überlegung hinführt. Jede Figur der Euklidischen Ebene läßt sich in

1) Näheres, auch über die Literatur, bei H. Liebmann: Nichteuklidische Geometrie, Sammlung Schubert XLIX, § 10.

der oben beschriebenen Geometrie abbilden. Wir wählen in der Euklidischen Geometrie ein Geradenbüschel, tragen vom Scheitel auf allen Geraden gleiche Strecken ab und erhalten als Ort für die Endpunkte einen Kreis, also eine die gegebene Kurvenschar (Geradenschar) orthogonal schneidende Kurve. Als Bild des Geradenbüschels erhalten wir in unserer Kreisbündelgeometrie eine Pseudogeradenschar oder, euklidisch ausgedrückt, ein Kreisbüschel, und zwar ein solches mit reellen Grundpunkten, von denen jedoch der eine (untere) für uns ausscheidet, da wir uns ja auf die Betrachtung der oberhalb der X-Achse gelegenen Halbkreise beschränken. Der noch übrig bleibende Grundpunkt P entspricht dann dem Scheitel des Euklidischen Geradenbüschels. Von jeder unser Kreisbüschel orthogonal schneidenden Kurve wollen wir sagen, ihre Punkte seien von P „gleichweit entfernt". Die orthogonalen Trajektorien eines Kreisbüschels mit reellen Grundpunkten bilden aber bekanntlich ein zweites Kreisbüschel, und zwar ein solches mit Nullkreisen; diese Nullkreise fallen mit den Grundpunkten des ersten Büschels zusammen.

Es seien durch den Punkt P zwei Pseudogeraden gezogen und ein diese beiden orthogonal schneidender Kreis, dessen Mittelpunkt dann auf dem von P auf die X-Achse gefällten Lot liegt.

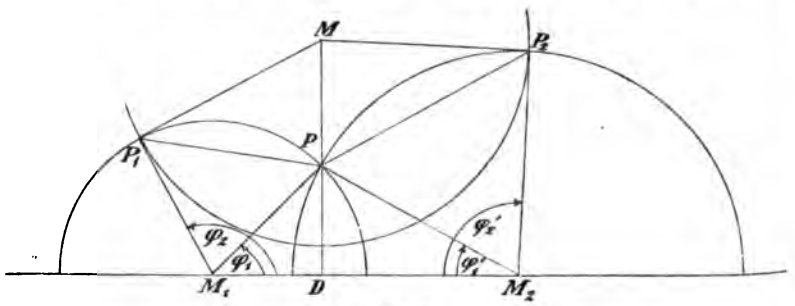


Fig. 2.

Da $\triangle P_1 M_1 P$ gleichschenklig, $\sphericalangle M_1 D P = 90^0$ und $\sphericalangle P_1 M P = 2R - \varphi_2$, so ergibt sich leicht

$$\sphericalangle P_1 P M = \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}, \quad \sphericalangle P P_1 M = \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2}.$$

Die Anwendung des Sinussatzes auf $\triangle P_1 P M$ ergibt

$$\frac{\sin \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}}{\sin \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2}} = \frac{P_1 M}{M P}.$$

benso erhält man aus $\triangle P_2 PM$

$$\frac{\sin\frac{\varphi_1' + \varphi_2'}{2}}{\sin\frac{\varphi_2' - \varphi_1'}{2}} = \frac{P_2 M}{MP}.$$

Wegen $P_1 M = P_2 M$ folgt:

$$\frac{\sin\frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}}{\sin\frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2}} = \frac{\sin\frac{\varphi_1' + \varphi_2'}{2}}{\sin\frac{\varphi_2' - \varphi_1'}{2}} \quad \text{oder} \quad \frac{\operatorname{tg}\frac{\varphi_1}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\varphi_2}{2}} = \frac{\operatorname{tg}\frac{\varphi_1'}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\varphi_2'}{2}}.$$

s für die Punktepaare (PP_1) und (PP_2), deren Entfernungen gleich in sollen, da Funktion $\frac{\operatorname{tg}\frac{\varphi_1}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\varphi_2}{2}}$ denselben Wert hat, liegt es nahe, diese unktion als Maß für die Entfernung zweier Punkte zu benutzen. ie erfüllt jedoch noch nicht die von der Entfernungsfunktion zu rdernde Beziehung $(P_1 P_2) + (P_2 P_3) = (P_1 P_3)$. Wohl aber leistet es die Funktion $\log\frac{\operatorname{tg}\frac{\varphi_1}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\varphi_2}{2}}$, die auch, wie es nach den oben ge- offenen Festsetzungen sein soll, unendlich wird, wenn einer der iden Punkte P_1 oder P_2 auf die X-Achse rückt.

Führt man in die für Fig. 2 abgeleitete Gleichung $\log\frac{\operatorname{tg}\frac{\varphi_1}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\varphi_2}{2}}$ $\log\frac{\operatorname{tg}\frac{\varphi_1'}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\varphi_2'}{2}}$ statt φ_1' und φ_2' die Winkel ψ_1 und ψ_2 ein, die $M_2 M$ d $M_2 P_2$ mit der positiven X-Achse bilden, so erhält man $\zeta\frac{\operatorname{tg}\frac{\varphi_1}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\varphi_2}{2}} = -\log\frac{\operatorname{tg}\frac{\psi_1}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\psi_2}{2}}$. Die Funktion $\log\frac{\operatorname{tg}\frac{\varphi_1}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\varphi_2}{2}}$ liefert nämlich die ntfernung positiv oder negativ, jenachdem $P_1 P_2$ im Sinne des chsenden oder abnehmenden φ durchlaufen wird.

Zur Berechnung der Potenzsummen der Teiler von 1 bis n.

Von J. Schröder.

Die Summe der νten Potenzen der n ersten positiven ganze Zahlen wird gegeben durch die Formel:

$$S^{(\nu)}(n) = \sum_{1}^{n} \varrho^{\nu} \cdot \left[\frac{n}{\varrho}\right].$$

Bei der rechts stehenden Summe lassen sich nun folgende drei Arte von Bestandteilen unterscheiden. Zu dem ersten, A_1, gehören al diejenigen Summanden, deren ϱ ein Teiler von n ist; da in jede solchen Falle $\varrho \cdot \left[\frac{n}{\varrho}\right] = n$ ist, muß das betreffende Glied den We $\varrho^{\nu-1} \cdot n$ haben. Werden mit $\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_\lambda$ die Teiler von n b zeichnet, so ist

$$A_1 = n \cdot \sum_{1}^{\lambda} \varrho_x^{\nu-1}$$

oder:

$$A_1 = n \cdot s^{(\nu-1)}(n),$$

wenn $s^{(\alpha)}(n)$ die Summe der αten Potenzen der Zahl n ist.

Der zweite Hauptbestandteil A_2 der Summe $S^{\nu}(n)$ umfaßt a diejenigen Summanden, bei welchen $\left[\frac{n}{\varrho}\right] = 1$ ist. Das trifft zu f alle Werte von ϱ, die der Bedingung genügen:

$$\left[\frac{n}{2}\right] + 1 \leqq \varrho \leqq n - 1.$$

Der Wert $\varrho = n$ darf hierbei nicht mitgezählt werden, da er Teiler von n schon bei A_1 berücksichtigt ist. Demnach ist

$$A_2 = \sum_{\left[\frac{n}{2}\right]+1}^{n-1} \varrho^{\nu}.$$

Der noch übrig bleibende letzte Term A_3 vereinigt in sich a solchen Glieder von $S^{(\nu)}(n)$, die Werten von ϱ entsprechen, wel Nichtteiler von n sind und die Bedingung:

$$2 \leqq \varrho \leqq \left[\frac{n}{2}\right]$$

erfüllen. Diesen Bestandteil A_3 schreiben wir in der Form

$$A_3 = \sum_{1}^{\left[\frac{n}{2}\right]}{}' \varrho^{\nu} \left[\frac{n}{\varrho}\right].$$

Der Akzent am Summenzeichen soll darauf hinweisen, daß die Summation nur auf die unter den Zahlen von 1 bis $\left[\frac{n}{2}\right]$ vorhandenen Nichtteiler von n zu erstrecken ist.

Auf Grund des Vorstehenden ist also:

$$S^{(\nu)}(n) = n s^{\nu-1}(n) + \sum_{\left[\frac{n}{2}\right]+1}^{n-1} \varrho^{\nu} + \sum_{1}^{\left[\frac{n}{2}\right]}{}' \varrho^{\nu}\left[\frac{n}{\varrho}\right].$$

Zu dieser Formel seien noch einige Spezialbemerkungen gemacht.

Im Falle $\nu = 1$ ist $s^{(0)}(n)$ nichts anderes als die Anzahl $\vartheta(n)$ der Teiler der Zahl (n) und der zweite Term eine arithmetische Reihe 1. O., sodaß dann:

$$S^{(1)}(n) = n\vartheta(n) + \tfrac{1}{2}\left(n + \left[\tfrac{n}{2}\right]\right)\left(n - \left[\tfrac{n}{2}\right] - 1\right) + \sum_{1}^{\left[\frac{n}{2}\right]}{}' \varrho\left[\frac{n}{\varrho}\right].$$

Hieraus geht für $n \equiv 0 \pmod 2$ wegen $\left[\frac{n}{2}\right] = \frac{n}{2}$ hervor:

$$S^{(1)}(n) = n\vartheta(n) + \tfrac{3}{8}n(n-2) + \sum_{1}^{\frac{n}{2}}{}' \varrho\left[\frac{n}{2}\right].$$

Beispiel: $n = 12$.

$$S^{(1)}(12) = 12 \cdot 6 + \tfrac{3}{8} \cdot 12 \cdot 10 + 5 \cdot 2 = 127.$$

Für $n \equiv 1 \pmod 2$ erhält man wegen $\left[\frac{n}{2}\right] = \frac{n-1}{2}$

$$S^{(1)}(n) = n\vartheta(n) + \tfrac{1}{8}(3n-1)(n-1) + \sum_{1}^{\frac{n-1}{2}}{}' \varrho\left[\frac{n}{2}\right].$$

Beispiel: $n = 9$.

$$S^{(1)}(9) = 9 \cdot 3 + \tfrac{1}{8} \cdot 26 \cdot 8 + 2 \cdot 4 + 4 \cdot 2 = 69.$$

Ganz entsprechend ergibt sich für $n \equiv 0 \pmod 2$

$$S^{(2)}(n) = n s^{(1)}(n) + \frac{n(7n-1)(n-2)}{24} + \sum_{1}^{\frac{n}{2}}{}' \varrho^2\left[\frac{n}{\varrho}\right]$$

$$S^{(3)}(n) = n s^{(2)}(n) + \frac{3n^2(5n-2)(n-2)}{64} + \sum_{1}^{\frac{n-1}{2}}{}' \varrho^3\left[\frac{n}{\varrho}\right]$$

und für $n \equiv 1 \pmod 2$

$$S^{(2)}(n) = ns^{(1)}(n) + \frac{n(n-1)(7n-5)}{24} + \sum_{1}^{\frac{n}{2}}{}' \varrho^2 \left[\frac{n}{\varrho}\right]$$

und

$$S^{(3)}(n) = ns^{(2)}(n) + \frac{(n-1)^2(5n+1)(3n-1)}{64} + \sum_{1}^{\frac{n-1}{2}}{}' \varrho^3 \left[\frac{n}{\varrho}\right].$$

Über eine Methode einen Wert für den Brechungsexponenten der die Sonne umgebenden Materie zu erhalten.

Von A. Schwaßmann.

Die Sonne ist nach allen Seiten von einer fein verteilten Materie umgeben, welche man mit dem Kollektivnamen Korona bezeichnet. Die Dichtigkeit dieser Materie nimmt, wie man aus den photographisch-photometrischen Messungen der Koronaaufnahmen gelegentlich totaler Sonnenfinsternisse schließen kann, nach außen zu rasch ab — nach Turner[1]) umgekehrt der 6. Potenz der Entfernung vom Sonnenzentrum —; dennoch vermag man ihre wirkliche Grenze nicht anzugeben. Es bestehen gewisse Anzeichen dafür, daß die Sonne sogar bis über die Erdbahn hinaus noch von einer äußerst fein verteilten Materie umgeben ist. Die Frage, ob hierdurch eine nachweisbare Ablenkung der sie durchdringenden Lichtstrahlen insbesondere der Fixsterne stattfindet, ist vor ungefähr Jahresfrist von Courvoisier[2]) angeschnitten worden und hat, abgesehen von den die Deutung der von ihm diskutierten Beobachtungen betreffenden Bemerkungen von Pannekoek[3]), hauptsächlich von Harzer[4]) besondere Beachtung gefunden, welcher in einer theoretischen Untersuchung auf Grund plausibler Annahmen über die Brechungsverhältnisse dieser Materie zu interessanten Resultaten über die Größenordnung der zu erwartenden Ablenkungen gekommen ist.

---

1) H. H. Turner: „On the Brightness of the Corona of January 22, 189[illegible] Preliminary Note." Month. Not. Roy. Astr. Soc. LXI App. p. [4].

2) L. Courvoisier: „Kimuras Phänomen und die 'jährliche Refraktion' der Fixsterne." Astr. Nachr. Bd. 167 p. 81, vergl. auch Bd. 168 p. 51 u. p. 36[illegible]

3) A. Pannekoek: „Einige Bemerkungen zur jährlichen Refraktion." Astr. Nachr. Bd. 167 p. 389, vergl. auch Bd. 168 p. 257.

4) P. Harzer: „Über die kosmische Strahlenbrechung." Astr. Nachr. Bd. 168 p. 261.

Das große physikalische Interesse, welches der brechenden Kraft dieser Materie anhaftet, und die hohe astronomische Bedeutung, welche ihre Refraktionswirkung sowohl für die Bahnbestimmung sonnennaher Körper, insbesondere Kometen, als auch für die Bestimmung der Fixsternörter besitzen würde, veranlaßt mich in den folgenden Zeilen auf eine Möglichkeit hinzuweisen, zu einem ersten Annäherungswerte für den Brechungsexponenten und zwar zunächst der die Sonne in größerer Nähe umgebenden, eigentlichen Koronamaterie zu gelangen.

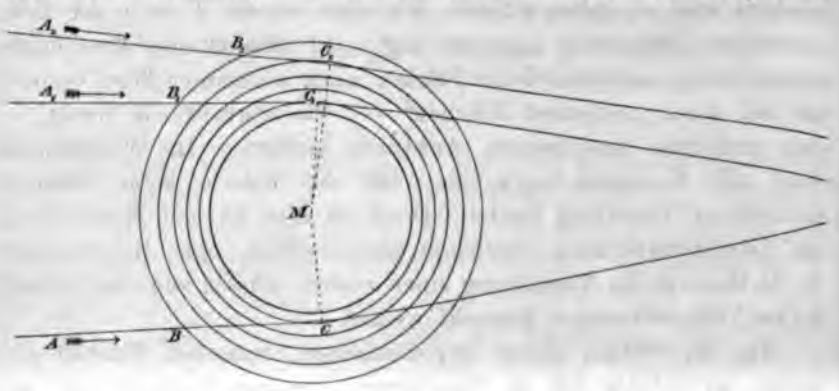
Es ist selbstverständlich, daß man hierbei von einer analogen Annahme wird ausgehen müssen, wie man sie der Theorie der Erdatmosphären-Refraktion zugrunde legt, daß nämlich der Brechungsexponent längs kontinuierlicher Flächen einen konstanten Wert besitze, und daß diese „optischen Flächen" — wie Harzer sie nennt — einen einfachen analytischen Ausdruck besitzen. In Wirklichkeit zeigen alle Koronaphotographien, daß die Materie keine derartig gleichmäßige Verteilung besitzt. Doch ist dies für die Möglichkeit, eine Refraktionswirkung überhaupt nachzuweisen, ohne Belang, und für die theoretische Ausnützung einer solchen müssen zunächst einmal gewisse Voraussetzungen gemacht werden.

Was die Gestalt dieser hypothetischen, optischen Flächen anbelangt, so möchte ich in Erweiterung der von Courvoisier gemachten Voraussetzung der Annahme Harzers den Vorzug geben, daß man von mit der Sonne konzentrischen, koaxialen, abgeplatteten Rotationsellipsoiden, statt von konzentrischen Kugelschalen ausgehen soll. Doch fällt der Unterschied für die folgenden Betrachtungen nicht so sehr ins Gewicht, da die Abplattung dieser Rotationsellipsoide auch nach Harzer in der Sonnennähe als gering anzusehen ist und erst bei größerem Abstande stark zunimmt.

Setzt man eine Dichtigkeitsverteilung in der Koronamaterie von der Art voraus, daß man die optischen Flächen als Rotationsellipsoide mit geringer Exzentrizität in der Nähe des Sonnenrandes und mit senkrecht zur Ekliptik stehender Rotationsachse ansehen darf, und nimmt man ferner an, daß der Brechungsexponent vom Sonnenzentrum nach außen hin abnimmt, so wird jeder die Koronamaterie durchkreuzende Lichtstrahl innerhalb ihres Gebietes eine Kurve beschreiben müssen, deren konkave Seite nach dem Sonnenmittelpunkte zu gelegen ist, und deren Tangente im Punkte der größten Annäherung an das Sonnenzentrum senkrecht auf dem nach dem Sonnenmittelpunkt gezogenen Radius stehen muß. Infolgedessen wird für den auf der Erde befindlichen Beobacher der Winkelabstand eines durch die

Koronamaterie hindurchscheinenden Sternes vom Sonnenmittelpunkt stets größer sein, als er ohne eine solche Refraktionswirkung der Koronamaterie gemessen würde.

Betrachtet man speziell (siehe untenstehende Figur) zwei Strahlen AB und A_1B_1 oder genauer gesagt zwei dünne Bündel paralleler Strahlen, welche von zwei Sternen kommen, die, in der Ebene der Ekliptik gelegen, sich vom Erdmittelpunkt aus auf zwei sich gegenüberliegende Seiten der Sonne projizieren, so wird jeder der Strahlen beim Durchgang durch die Koronamaterie eine Brechung in dem Sinne erfahren, daß der scheinbare Winkelabstand σ_1', unter



welchem die beiden Objekte dem Erdbeobachter erscheinen werden, größer sein wird als der wahre Winkelabstand σ_1.

Betrachtet man andererseits zwei Strahlen A_1B_1 und A_2B_2, welche von zwei auf der gleichen Seite der Sonne gelegenen Sternen kommen, so wird ihr Winkelabstand ebenfalls durch die Refraktionswirkung der Koronamaterie beeinflußt sein. Ob ihr scheinbarer Winkelabstand σ_2' kleiner sein wird als ihr wahrer Winkelabstand σ_2 oder größer als derselbe, hängt davon ab, ob das Koronagebiet eine Grenzfläche in näherer Umgebung der Sonne besitzt, außerhalb derer die Dichtigkeit so gering ist, daß von einer angebbaren Ablenkung überhaupt nicht mehr die Rede sein kann, und in welcher Weise der Brechungsexponent von innen nach außen zu abnimmt. Existiert eine solche Grenzfläche, so wird für zwei auf der gleichen Seite der Sonne liegende Sterne der scheinbare Winkelabstand σ_2' — entgegengesetzt dem Falle zweier Sterne auf verschiedenen Seiten der Sonne — kleiner sein als der wahre Winkelabstand σ_2.

Nimmt man zunächst eine beschränktere Ausdehnung der Koronamaterie im Sinne der oben genannten Grenzfläche an, so wird allgemein der Unterschied zwischen der scheinbaren und wahren Distanz

rischen einem durch die Sonnenkorona hindurchscheinenden Sterne
id einem zweiten, dessen Strahlen sie nicht mehr passieren,

$$\sigma' - \sigma$$

n Maß geben für die Gesamtwirkung der außerhalb der Fläche vom
ıdius $MC = \Delta$ liegenden Materie, wenn MC der kürzeste Abstand
s Strahles vom Sonnenzentrum ist. Würde man sich die Sonne
s zum Radius Δ ausgedehnt denken, so würde $\sigma' - \sigma$ gleich dem
)ppelten Betrage der Horizontalrefraktion in diesem Punkte sein,
ıter Übertragung des aus der Theorie der terrestrischen Strahlen-
rechung bekannten Begriffs der Horizontalrefraktion auf die Sonne.

Wenn aber eine solche Grenzfläche, wenigstens in größerer Nähe
es Sonnenrandes, nicht existiert, so kann man durch $\sigma' - \sigma$ nur die
ifferenz der Horizontalrefraktion für zwei Punkte C bez. C_1 und C_2 be-
immen. Jedoch wäre es möglich, das Gesetz der Veränderung der
orizontalrefraktionen mit zunehmendem Radius zu bestimmen, wenn
an nur mit zwei auf verschiedenen Seiten der Sonne und möglichst fern
)n ihr gelegenen Sternen der Reihe nach Sterne von geringer, allmäh-
:h wachsender Distanz kombinieren könnte. Auch würde man durch
inzuziehung absoluter Ortsbestimmungen die anfangs vernachlässigte
efraktion des äußersten Sternes noch bestimmen können und ließe
:h auf diese Weise durch eine zweite Durchrechnung eine größere
nnäherung an die absoluten Beträge der Horizontalrefraktionen finden,
)rauf zum Schlusse noch zurückzukommen sein wird.

Die Ausführung solcher Distanzmessungen liegt aber gegenwärtig
cht mehr außerhalb des Bereiches der Möglichkeit. Der Gedanke,
ırch Auffindung eines intramerkuriellen Planeten möglicherweise die
ıomalien der Bewegung des Merkurperihels ohne Zuhilfenahme
derer als Attraktionskräfte erklären zu können, hat W. H. Pickering
d C. D. Perrine zur Erprobung einer Objektivsorte geführt, welche
otographische Aufnahmen von Fixsternen in der Nachbarschaft der
nne bis zur neunten Größenklasse hinab während der Dauer der
talität totaler Sonnenfinsternisse gestattet, und die spezielle Be-
tzung dreiteiliger Objektive für diesen Zweck durch die Ham-
rgische Sonnenfinsternisexpedition im Jahre 1905 hat gezeigt, daß
n mit dem Vorteil eines großen Gesichtsfeldes und genügender Licht-
rke auch den einer guten kreisförmigen Abbildung der Sterne bis
n Rande der Platte hin verbinden kann. Die in Frage kommenden
jektive haben bei einer Öffnung von 10 cm ein Brennweitenver-
ltnis 1 : 40 und geben also bei einer Brennweite von 4 m einen
nügend großen Maßstab, um bei guter Bildform Messungen von

großer Genauigkeit zu ermöglichen. Die anwendbaren Platten von 50×50 cm geben andrerseits die Möglichkeit Sterne bis zu $4^1/_2$ Grad Abstand vom Sonnenzentrum zu photographieren, wenn man die Sonne in die Mitte der Platte nimmt, oder sogar bis zu $6^1/_2$ Grad Abstand, wenn man die Sonne bei jeder einzelnen Aufnahme mehr gegen den Rand der Platte zu liegen läßt und sich also bei der einzelnen Platte mehr auf eine Seite der Sonne beschränkt. Andrerseits werden sich bei allen Sonnenfinsternissen innerhalb der ersten neun Größenklassen genügend Sterne in der Umgebung der Sonne photographieren lassen, um die Refraktionsbestimmungen jedes Mal auf eine größere Anzahl von Sterndistanzen gründen zu können. Natürlich werden diejenigen Finsternisse für den vorliegenden Fall besonders geeignet sein, bei denen in unmittelbarster Nachbarschaft der Sonne sich helle Sterne befinden, da diese selbst durch die stärkere Intensität der inneren Koronastrahlen nicht ausgelöscht werden. So hat sich z. B. bei der letzten totalen Sonnenfinsternis von 1905 der Stern 6. Größe $B.D. + 9^\circ{,}2374$ in 26′ Abstand vom Sonnenrande auf den Platten der Hamburgischen Expedition abgebildet, und da auch amerikanische Expeditionen solche Sternaufnahmen bei der Finsternis erhalten haben, so steht zu hoffen, daß vielleicht schon die Platten von 1905 eine Verwertung im vorliegenden Sinne finden können, wozu ich hiermit wenigstens die Anregung geben möchte.

Es ist selbstverständlich, daß man von einer einzigen Sonnenfinsternis nichts Definitives wird erwarten können; denn bei der relativen Kleinheit der Größe der Ablenkungen, um die es sich vermutlich handeln wird, wird es nötig sein, eine große Zahl von Umständen genau zu diskutieren, welche das gesuchte Resultat beeinflussen können.

Will man die Ausmessung solcher Platten zu dem vorliegenden Zwecke benutzen, so kommt es nach dem Vorstehenden erstens darauf an, einen exakten Wert für die von der Strahlenbrechung in der Koronamaterie freie Distanz σ zweier Sterne der Sonnenumgebung zu kennen, wie sie sich zur Zeit eines großen Winkelabstandes von der Sonne und bei vollkommen winkeltreuer, photographischer Abbildung auf den Platten darstellt, und zweitens muß man die auf der Finsternisplatte wirklich gemessene Distanz σ' der beiden Sterne von allen Fehlerquellen befreien können.

Um die Sterndistanz σ zu erhalten, muß man natürlich in erster Linie einwandsfreie Positionsbestimmungen der betreffenden Sterne besitzen, eine Forderung, die durch den gegenwärtigen Genauigkeitsgrad der Meridianbeobachtungen gewährleistet wird, zumal alle

Frage kommenden Sterne auf einem relativ kleinen Gebiete des Himmels zusammenliegen und absolute Ortsbestimmungen für die zu den Distanzmessungen herangezogenen Sterne nicht erforderlich sind. Die sich aus den bekannten scheinbaren Örtern ergebende wahre Sterndistanz s muß dann weiter in aller Strenge für den Einfluß der irdischen Strahlenbrechung korrigiert werden, um die gesuchte Sterndistanz σ zu erhalten. Obgleich es nun möglich sein wird, den Fehler in der anzuwendenden photographischen Refraktionskonstanten dadurch herabzudrücken, daß man die gleiche Sterngegend mit dem gleichen Objektiv zu verschiedenen Jahreszeiten und bei verschiedenen Zenithdistanzen photographiert und ausmißt, so wird es doch unumgänglich sein, den Fehler in der Annahme für die Refraktionskonstante als weitere Unbekannte in das Problem einzuführen.

Um andrerseits aus den auf der Platte vorgenommenen Distanzmessungen die Sterndistanz σ' zu erhalten, wird es naturgemäß nötig sein, vorerst unabhängig von der ganzen Aufgabe die Abbildungsfehler des Objektivs für alle Teile der Platte, tunlichst aus zenitalen Sternaufnahmen, genau zu bestimmen. Hierin ist keine besondere Schwierigkeit zu erblicken, da dies eine Aufgabe ist, die für alle exakten photographischen Sternmessungen notwendig, und die durchaus mit aller Schärfe ausführbar ist. Ebenso wird es möglich sein, die Reduktion jeder Distanzmessung wegen der Abweichung der Plattenebene von der Kugelfläche in voller Strenge vorzunehmen. Für die Umwandlung der bereits so reduziert gedachten, in irgend einer linearen Einheit ausgedrückten Distanzmessung ist dann vor allem eine genaue Kenntnis des Winkelwertes der Skaleneinheit erforderlich. Für seine Bestimmung würde die sicherste Methode m. E. die sein, daß man am Abend vor und nach der Finsternis auf die inzwischen unangerührte Finsternisplatte eine Zenitgegend photographierte, und daß man außerdem, unabhängig von allem anderen, eine genaue Bestimmung des Temperaturkoeffizienten des Skalenwertes vornähme. Ist eine solche zenitale Aufnahme nicht gemacht, so bleibt kein anderer Weg, als den Skalenwert aus all denjenigen Sternen abzuleiten, die die Sonne in möglichst weitem Kreise umschließen, und den Fehler des so bestimmten Skalenwertes als weitere Unbekannte einzuführen. Es wird sich überhaupt empfehlen, die Platte einer möglichst vollständigen Triangulation zu unterziehen, um eine ausreichende Kontrolle für die Messungen zu besitzen. Bei den erheblichen Dimensionen der zur Verwendung kommenden Platten von 50×50 cm werden die für die Ausmessung vorhandenen Hilfsmittel allerdings kaum gestatten sämtliche möglichen Sterndistanzen auszumessen. Doch dürfte man

es wohl immer einrichten können, die Messungen bis zu Distanze von 30 cm (gleich etwa 4°) fortzuführen. Ich selbst beabsichtige di bei der vorjährigen totalen Sonnenfinsternis von mir gemachten Au nahmen mit dem für Platten von 24×30 cm eingerichteten Zeis schen Stereokomparator der Hamburger Sternwarte zu vermessen, a welchen sich die 50×50 Platten mittels eines einfachen Aufba leicht aufmontieren lassen.

Was nun die Bestimmung der gesuchten Strahlenablenkung a den Messungen betrifft, so kommen hierfür natürlich in erster Lin die radial zur Sonne liegenden Distanzen in Betracht. Man wi daher einen der Sonne naheliegenden Stern stets mit möglichst viel ferngelegenen Sternen verbinden und seine durch die Koronamater bewirkte Verschiebung in der Richtung des durch ihn und d Sonnenmittelpunkt gehenden größten Kreises aus einer möglich großen Anzahl von Distanzmessungen bestimmen. Bezeichnet m mit $(\Delta\sigma)_\varrho$ die gesuchte Refraktionswirkung der Koronamaterie in de genannten größten Kreise für einen Stern, der einen Winkelabstand vom Sonnenmittelpunkt hat, und ist $\Delta\varkappa$ bez. ΔR der Fehler d **Refraktionskonstanten bez. des Skalenwertes, so liefert jede Verbindu eines solchen Sternes mit einem möglichst weit abgelegenen eine B dingungsgleichung von der Form**

$$A \cdot (\Delta\sigma)_\varrho + B \cdot \Delta\varkappa + C \cdot \Delta R = \sigma' - \sigma$$

unter der Voraussetzung, daß man die Verschiebung der fern g legenen Sterne zunächst vernachlässigen kann. Die Koeffizient A, B, C sind dabei Funktionen der Stern- und Sonnenkoordinate A ist abhängig von der Lage der Distanz zum Sonnenmittelpunk B von ihrer Lage zum Zenit und zu dem durch die Sonne gehend Vertikalkreis und C ist einfach proportional der Größe der Distan

Kann man im ganzen i sonnennahe Sterne der Reihe nach mit bestimmten entfernteren kombinieren, so wird man i Gruppen von n Gleichungen erhalten, aus deren Gesamtheit man zunächst $\Delta\varkappa$ u ΔR nach der Methode der kleinsten Quadrate bestimmen kann. Dara wird man in analoger Weise die i Werte von $\Delta\sigma$ für $\varrho_1 \ldots \varrho_i$ erhalte

Was nun die Ableitung des Brechungsexponenten der Koron materie aus den so gefundenen Werten $\Delta\sigma$ anbelangt, so bietet d oben zitierte Abhandlung von Harzer über die kosmische Strahle brechung hierfür bereits alles, was als theoretische Grundlage no wendig ist, weshalb ich hier nur die Ergebnisse seiner Betrachtunge wiederzugeben brauche, um zu zeigen, wie man die gewonnene Messungsresultate weiter wird verwerten können.

Die bereits erwähnte „optische Fläche“ mit konstantem Brechungsexponenten habe die Gleichung:

$$f(x, y, z, p) = 0,$$

wo x, y, z rechtwinklige Koordinaten in bezug auf den Sonnenmittelpunkt sind und p ein Parameter ist, von dem allein der Brechungsexponent n abhängt. Sind dann λ, μ, ν die Richtungskosinus der Flächennormalen im Einfallspunkte eines Strahles, der vor und nach der Brechung die Richtungskosinus $\alpha\beta\gamma$ und $\alpha_1\beta_1\gamma_1$ habe, und zwar im Sinne des vom Beobachter aus rückwärts verfolgten Strahles, so sind $\alpha_1 - \alpha$, $\beta_1 - \beta$, $\gamma_1 - \gamma$ als Differentiale $d\alpha, d\beta, d\gamma$ zu betrachten, wenn sich der Brechungsexponent von einer Fläche zur unendlich benachbarten ebenfalls um das Differential dn ändert. Geht man nun in der Richtung des Strahles, aber entgegengesetzt der Fortpflanzungsrichtung des Lichtes von einer Fläche zur benachbarten um die unendlich kleine Strecke ds vorwärts, wodurch sich x, y, z, p um $dx = \alpha ds$, $dy = \beta ds$, $dz = \gamma ds$, dp ändern, so kommt man zu der Harzerschen Ausgangsgleichung für alle weiteren Betrachtungen:

$$\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz + \frac{\partial f}{\partial p} dp = 0,$$

welche in Verbindung mit den Relationen:

$$\frac{1}{\lambda}\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{\mu}\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{\nu}\frac{\partial f}{\partial z} = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}$$

und den aus dem Brechungsgesetz folgenden Gleichungen:

$$\frac{d\alpha}{\lambda - \alpha\varepsilon} = \frac{d\beta}{\mu - \beta\varepsilon} = \frac{d\gamma}{\nu - \gamma\varepsilon} = \frac{d \log n}{\varepsilon},$$

wo ε den Kosinus des Einfallswinkels:

$$\varepsilon = \alpha\lambda + \beta\mu + \gamma\nu$$

bezeichnet, zu den nachstehenden Bestimmungsgleichungen für $\frac{d\alpha}{ds}$, $\frac{d\beta}{ds}$, $\frac{d\gamma}{ds}$ führt:

$$\frac{\frac{d\alpha}{ds}}{\alpha\varepsilon - \lambda} = \frac{\frac{d\beta}{ds}}{\beta\varepsilon - \mu} = \frac{\frac{d\gamma}{ds}}{\gamma\varepsilon - \nu} = \frac{\frac{\partial \log n}{\partial p}}{\frac{\partial p}{\partial f}} \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}.$$

Indem Harzer den Verlauf des Strahles vom Beobachtungsorte rückwärts bis zu seinem Ausgangspunkte verfolgt, kommt er dann zu den Totalablenkungen $\Delta\alpha, \Delta\beta, \Delta\gamma$, welche der von einem in der Entfernung $s = \varrho$ vom Beobachter befindlichen Objekte kommende Lichtstrahl erleidet:

$$\Delta\alpha = \int_0^\varrho \left(1 - \frac{s}{\varrho}\right) \frac{d\alpha}{ds}\, ds, \quad \Delta\beta = \int_0^\varrho \left(1 - \frac{s}{\varrho}\right) \frac{d\beta}{ds}\, ds,$$

$$\Delta\gamma = \int_0^\varrho \left(1 - \frac{s}{\varrho}\right) \frac{d\gamma}{ds}\, ds.$$

Für den speziellen Fall der als unendlich entfernt zu betrachtenden Fixsterne reduzieren sich die Werte von $\Delta\alpha$, $\Delta\beta$, $\Delta\gamma$ auf die folgenden Integrale:

$$\Delta\alpha = \int_0^\infty \frac{d\alpha}{ds}\, ds, \quad \Delta\beta = \int_0^\infty \frac{d\beta}{ds}\, ds, \quad \Delta\gamma = \int_0^\infty \frac{d\gamma}{ds}\, ds,$$

welche sich in relativ einfacher Weise durch mechanische Quadratur berechnen lassen.

Die Berechnung der Totalablenkungen ist also möglich, sobald man einerseits eine Voraussetzung über die Gestalt der Flächen macht, auf welchen der Brechungsexponent in der Koronamaterie konstant ist, und wenn man andrerseits das Gesetz kennt, nach welchem sich der Brechungsexponent mit dem Parameter p ändert. Die aus den Distanzmessungen sich ergebenden Ablenkungen werden also verschiedene Werte für den Brechungsexponenten der Koronamaterie ergeben, je nachdem welche Gleichung man für die optische Fläche zugrunde legt. Wie weit sich diese Unbestimmtheit wird beseitigen lassen, wird von dem Beobachtungsmaterial abhängen, welches man im Laufe der Zeit für die Diskussion wird erhalten können. Geht man aber von einer zulässigen Voraussetzung für die optischen Flächen aus, so kann man den Brechungsexponenten bestimmen, indem man das für ihn zugrunde gelegte Gesetz so variiert, daß die nach der Harzerschen Methode berechneten Totalablenkungen für verschiedene Werte des Winkelabstandes vom Sonnenmittelpunkte mit den aus den Beobachtungen sich ergebenden Größen übereinstimmen.

Um nun ein Urteil über die Zulässigkeit der früher gemachten Voraussetzung zu gewinnen, daß man die Verschiebungen der fern von der Sonne gelegenen Plattensterne vernachlässigen dürfe, sei schließlich auch noch auf die Zahlenwerte hingewiesen, welche Harzer auf Grund plausibler Annahmen berechnet hat. Für die optischen Flächen legt er die Gleichung:

$$f = \frac{1}{2}\left(\frac{x^2 + y^2}{p^2} + \frac{1 + 100\,p^2}{1 + p^2}\,\frac{z^2}{p^2} - 1\right)$$

und für den Brechungsexponenten die Formel:

$$n = 1 + \tfrac{1}{2} \sin 1'' \cdot e^{-\frac{1}{p}}$$

zugrunde. Die optischen Flächen sind darnach Rotationsellipsoide um das Zentrum der Sonne, deren Achsenverhältnis für den Sonnenmittelpunkt, für die Sonnenoberfläche, den Erdort und die Unendlichkeit die Werte:

$$1.00000,\quad 0.99893,\quad 0.14072,\quad 0.10000$$

hat. Für dieselben Stellen hat der Brechungsexponent die Werte:

$$1.000\,002\,424\,1,\quad 1.000\,002\,401\,6,\quad 1.000\,000\,328\,1,\quad 1.$$

Die sich hieraus ergebenden Totalablenkungen $\Delta\alpha$, $\Delta\beta$, $\Delta\gamma$ sind von Harzer für 50 Ausgangswerte von $\alpha_0\beta_0\gamma_0$ mittels mechanischer Quadratur streng berechnet worden, und zwar zeigte sich dabei, daß man das Intervall δs nicht kleiner als 0,05 Einheiten der Entfernung Sonne-Erde zu nehmen braucht, und daß man bei größeren Winkelabständen der Strahlen vom Sonnenmittelpunkte als 20° jenseits der Entfernung $s = 1.6$ von der Erde keine merkbaren Beträge mehr zu den bis auf 0″.0001 genau berechneten Werten der Ablenkungen erhält. Harzer gibt im übrigen nicht die $\Delta\alpha$, $\Delta\beta$, $\Delta\gamma$, sondern statt dessen gleich die auf astronomische Länge und Breite umgerechneten Ablenkungen. Für einen gegebenen Moment betrachtet, haben die Totalablenkungen, durch welche jeder Stern von der Sonne fortrückt, im größten Kreise der Ekliptik bei den Winkelabständen 20°, 40°, 60° ... vom Sonnenmittelpunkte folgende Beträge:

20°	40°	60°	80°	100°	120°	140°	160°	180°
0″.45	0″.33	0″.21	0″.14	0″.09	0″.06	0″.04	0″.02	0″.00

und in dem durch den Sonnenmittelpunkt gehenden Breitenkreise folgende Werte:

0°	20°	40°	60°	80°
0″.00	0″.36	0″.12	0″.06	0″.03.

Man ersieht hieraus, daß die absoluten Werte der Ablenkungen vom Gegenpunkte der Sonne aus nach der Sonne zu wachsen, und daß dieses Anwachsen von 90° Winkelabstand an wesentlich stärker wird, je näher man an den Winkelabstand 20° herankommt. Es geht auch aus der durch die Werte dargestellten Kurve hervor, daß die Beträge der Ablenkungen von 20° an noch mit kleineren Winkelabständen etwas weiter zunehmen. Andererseits ist selbstverständlich, daß ein aus der Richtung nach dem Sonnenmittelpunkt zur Erde gelangender Strahl gar keine Ablenkung erleiden kann, da er alle optischen Flächen normal schneidet, und daß auch alle um weniger als $\frac{1}{4}$ Grad (Sonnenradius) hiergegen geneigten Strahlen wegen der Kleinheit der Einfallswinkel eine verschwindend kleine Ablenkung

erleiden müssen. Dagegen taucht die Frage auf, bis zu welchem Winkelabstande die Beträge der Ablenkungen überhaupt noch anwachsen, und ob dieses Anwachsen wegen der stärkeren Zunahme des Brechungsexponenten mit Annäherung an den Sonnenrand nicht bis zu diesem hin stattfinden muß. Um diese Frage zu entscheiden, habe ich die Integration auch für die Winkelabstände 1^0, 5^0, 10^0, 15^0 und für die Ebene der Ekliptik ausgeführt und die folgenden Werte hierfür gefunden:

1^0	5^0	10^0	15^0	20^0
$0''.13$	$0''.32$	$0''.41$	$0''.45$	$0''.45$.

Man erkennt hieraus, daß für die Harzerschen Annahmen über die optischen Flächen und über die Abnahme des Brechungsexponenten mit der Entfernung von der Sonne in dem für die vorliegende Aufgabe in Frage kommenden Gebiete der nächsten Umgebung der Sonne mit kleiner werdendem Winkelabstand bereits wieder eine Abnahme der Ablenkungen vorhanden ist. Dieses zunächst vielleicht überraschende Resultat erklärt sich in der folgenden Weise.

Für die Ebene der Ekliptik vereinfachen sich die Harzerschen Formeln wesentlich. Es wird $z = 0$ und damit der Radiusvektor r für einen Punkt des Lichtstrahls in bezug auf den Sonnenmittelpunkt $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ und vor allem der Parameter $p = r$, sowie:

$$\frac{1}{\sin 1''} \frac{d\alpha}{ds} = (\alpha_0 \varepsilon - \lambda) \cdot e^{-2r}$$

$$\frac{1}{\sin 1''} \frac{d\beta}{ds} = (\beta_0 \varepsilon - \mu) \cdot e^{-2r}.$$

Die Werte der Differentialquotienten, die in den Integralen auftreten, setzen sich also aus zwei Faktoren zusammen: e^{-2r} und $(\alpha_0 \varepsilon - \lambda)$ bez. $(\beta_0 \varepsilon - \mu)$. Die letzteren enthalten die Richtungskosinus der Flächennormalen und des Lichtstrahles, sowie den Kosinus des Einfallswinkels für einen bestimmten Punkt des Strahles. Für kleine Winkelabstände des Strahles bleiben nun, wie auch geometrisch leicht ersichtlich, die Faktoren $(\alpha_0 \varepsilon - \lambda)$ bez. $(\beta_0 \varepsilon - \mu)$ bei der mechanischen Quadratur, von der Erde nach der Sonne zu fortschreitend, sehr klein, bis man in größere Nähe der Sonne gelangt. Dann wachsen sie gleichzeitig mit e^{-2r} schnell an und nehmen jenseits der Sonne ebenso schnell wieder ab. Für einen weiter abliegenden Lichtstrahl, etwa von 20^0 Winkelabstand, werden die Faktoren $(\alpha_0 \varepsilon - \lambda)$ bez. $(\beta_0 \varepsilon - \mu)$ bereits in weit größerer Entfernung von der Sonne merkbar, und obwohl dort der Faktor e^{-2r} noch relativ klein ist, summieren sich allmählich die einzelnen kleinen Beträge zu einem größeren Werte.

Der Grund für die Abnahme der Ablenkungen mit kleiner

erdendem Winkelabstande in der Nähe der Sonne ist also eine olge davon, daß man es hier mit einer unendlich ausgedehnten aterie zu tun hat, in welcher der Brechungsexponent nur relativ ngsam mit dem Radiusvektor abnimmt — die Änderung desselben t nach der Harzerschen Annahme zwischen 0° und 1° Winkelstand nur doppelt so groß als zwischen 19° und 20° —, so langsam, ß die Größe der Koeffizienten $(\alpha_0 \varepsilon - \lambda)$ bez. $(\beta_0 \varepsilon - \mu)$ durch die leinheit von e^{-2r} nicht rasch kompensiert wird. Es ist hier also icht in größerer Nähe der Sonne die früher erwähnte Grenzfläche rhanden, jenseits derer der Brechungsexponent sich von 1 nur so enig unterscheidet, daß von einer angebbaren Refraktionswirkung ßerhalb derselben überhaupt nicht mehr die Rede sein kann, und an sieht, daß man sich eine Verteilung der Materie und eine Abahme des Brechungsexponenten mit dem Radiusvektor denken kann, ei welcher die früher erwähnte scheinbare Winkeldistanz σ_2' zweier uf der gleichen Seite der Sonne liegenden Sterne ebenfalls größer ls die wahre Distanz σ_2 wird.

Dagegen bleibt auch bei dem Wegfall einer solchen Grenzfläche der mstand bestehen, daß die scheinbare Distanz σ_1' zweier auf entgegenesetzten Seiten der Sonne liegenden Sterne stets größer ausfällt als ie von kosmischer Refraktion freie Distanz σ_1, da die Sterne in jedem alle durch diese Refraktion vom Sonnenmittelpunkte fortrücken müssen.

Aus den Harzerschen Annahmen darf man nun weiter den chluß ziehen, daß man die kosmische Refraktion der „fern gelegenen" terne — im Sinne der oben besprochenen Distanzmessungen — icht wird vernachlässigen dürfen, wenn man sie zu einer genauen estimmung des Brechungsexponenten der Koronamaterie benutzen ill. Wenn aber die Abnahme des Brechungsexponenten mit dem adiusvektor, wenigstens außerhalb der eigentlichen Koronamaterie, irklich so langsam vor sich geht, daß die kosmische Refraktion nicht u vernachlässigen wäre, so zeigen die Harzerschen Zahlen andrerits, daß man bei Winkelabständen von 20 bis 60 Grad von der Sonne offnung haben darf, durch geeignete Anordnung der Beobachtung bsoluter Fixsternörter einen verbürgbaren Wert für die kosmische efraktion zu erhalten. Die aus solchen absoluten Ortsbestimmungen olgenden Beträge würden aber die Möglichkeit geben, auf Grund der arzerschen Formeln einen Näherungswert für die anfangs vernachässigte kosmische Refraktion der „fern gelegenen" Plattensterne abzuiten und somit auch durch eine zweite Durchrechnung hernach eine Anäherung an die absoluten Beträge der Totalablenkungen zu bekommen, elche die die eigentliche Sonnenkorona passierenden Strahlen erleiden.

In wie weit solche speziellen Fragen von praktischer Bedeutung für die hier vorliegende Aufgabe sein werden, wird sich erst später entscheiden lassen. Vorerst muß es sich darum handeln nachzuweisen, ob sich aus photographischen Sternmessungen überhaupt verbürgbare Beträge einer Refraktionswirkung der Koronamaterie bestimmen lassen, eine Frage, die nur durch die Ausführung dieser Messungen entschieden werden kann. Um zu sehen, was die Harzerschen Annahmen in dieser Hinsicht lehren, sei zum Schluß noch darauf hingewiesen, daß man durch die Kombination eines Sternes von 1° Winkelabstand auf der einen Seite der Sonne mit einem Stern von 5° auf der andern Seite eine gegenseitige Distanzänderung von 0″45 in der Ekliptik erwarten kann. Da die Finsternisplatten einen solchen Winkelabstand von 6 Grad zu messen gestatten, so würde man also aus den Messungen auf einer Platte bei der angewandten Brennweite von 4 m eine lineare Größe von 0.009 mm zu bestimmen haben, eine Größe, deren Sicherstellung bei Berücksichtigung aller Fehlerquellen durchaus im Rahmen der Möglichkeit liegen würde. Bedenkt man schließlich, daß der Brechungsexponent innerhalb der eigentlichen Koronamaterie voraussichtlich schneller zunehmen wird als dies nach der Harzerschen Formel für die gesamte übrige die Sonne umgebende Materie der Fall ist, so bleibt es nicht ausgeschlossen, daß der genannte Betrag auch schon für kleinere Sterndistanzen als 6 Grad erreicht werden kann.

Integration von $(p(u))^n$, wo $p(u)$ die Weierstraßsche Funktion bedeutet.

Von A. Wetzler.

Es ist

$p'(u)^2 = 4p(u)^3 - g_2 p(u) - g_3$ (Differentialgleich. der Funktion $p(u)$)

$p''(u) = 6p(u)^2 - \frac{1}{2}g_2$.

$$4\int p(u)^n du = \int p(u)^{n-3}(p'(u)^2 + g_2 p(u) + g_3)\, du \qquad \left(\begin{matrix}\text{durch partielles}\\ \text{Integrieren}\end{matrix}\right)$$

$$= \frac{p(u)^{n-2}p'(u)}{n-2} - \frac{1}{n-2}\int p(u)^{n-2}p''(u)du +$$

$$+ g_2\int p(u)^{n-2}du + g_3\int p(u)^{n-3}du =$$

$$= \frac{p(u)^{n-2}p'(u)}{n-2} - \frac{6}{n-2}\int p(u)^n du + \frac{1}{2(n-2)}g_2\int p(u)^{n-2}du +$$

$$+ g_2\int p(u)^{n-2}du + g_3\int p(u)^{n-3}du.$$

$$\int p(u)^n du = \frac{p(u)^{n-2}\sqrt{4p(u)^3 - g_2 p(u) - g_3}}{2(2n-1)} + \frac{2n-3}{4(2n-1)} g_2 \int p(u)^{n-2} du +$$

$$+ \frac{n-2}{2(2n-1)} g_3 \int p(u)^{n-3} du .$$

amit ist ein Rekursionsintegral für $\int p(u)^n$ gewonnen. (Bereits ableitet von Axel Soderblöm, Akad. Ber. Upsala.)

Eine independente Darstellung ergibt sich durch fortgesetzte Anendung dieser Rekursion:

$$\int p(u)^n du = \sqrt{4p(u)^3 - g_2 p(u) - g_3}\,\{a_{n-2} p(u)^{n-2} + a_{n-3} p(u)^{n-3} +$$

$$a_{n-4} p(u)^{n-4} + \cdots + a_2 p(u)^2 + a_1 p(u) + a_0\} + b_1 \int p(u) du + b_0 u + C.$$

ur Bestimmung der Koeffizienten a_r differenziert man diese Gleichung ach u, und erhält $\left(\text{da } \frac{dp(u)}{du} = \sqrt{4p(u)^3 - g_2 p(u) - g_3}\right.$,

$\left.\frac{p(u)}{du^2} = p''u = \frac{d\sqrt{4p(u)^3 - g_2 p(u) - g_3}}{du} = 6p(u)^2 - \frac{1}{2} g_2\right)$:

$$p(u)^n = (6p(u)^2 - \tfrac{1}{2} g_2) \sum_0^{n-2} (a_r p(u)^r) +$$

$$+ (4p(u)^3 - g_2 p(u) - g_3) \cdot \sum_0^{n-2} (r a_r p(u)^{r-1}) + b_1 pu + b_0$$

der:

$$p(u)^n = \sum_0^{n-2} \{(3+2r) 2 a_r p(u)^{r+2} - (r + \tfrac{1}{2}) a_r g_2 p(u)^r -$$

$$- r a_r g_3 p(u)^{r-1}\} + b_1 p(u) + b_0 .$$

egen der Identität beider Seiten verschwinden rechts die Koeffiznten mit Ausnahme des ersten.

Für die a_r gilt also die Rekursion

$$2a_r(2r+3) - (r + \tfrac{5}{2}) g_2 a_{r+2} - (r+3) g_3 a_{r+3} = 0$$

$$\text{für } r = n-3,\ n-4 \ldots 2,\ 1,\ 0 .$$

gegen folgt direkt:

$$a_{n-2} = \frac{1}{3(2n-1)}; \quad \text{für} \quad r > n-2 \quad \text{ist} \quad a_r = 0;$$

o aus: $2(2n-3) a_{n-3} - (n - \frac{1}{2}) g_2 a_{n-1} - n a_n g_3 = 0$ folgt

$$a_{n-3} = 0;$$

ner:

$$a_{n-4} = \frac{2n-3}{2^2(2n-1)(2n-5)} g_2; \quad a_{n-5} = \frac{n-2}{2^2(2n-1)(2n-7)} g_3 \text{ usf.}$$

Für $r=-1$ ist $\quad 2a_{-2}=\frac{3}{2}a_1 g_2+2a_2 g_3$

$r=-2$ ist $\quad -2a_{-2}=\frac{1}{2}a_0 g_2+a_1 g_3.$

Aus der Gleichung für $p(u)^n$ folgt aber direkt:

$$b_1=\tfrac{3}{2}a_1 g_2+2a_2 g_3$$
$$b_0=\tfrac{1}{2}a_0 g_2+a_1 g_3.$$

Es sollen daher die Koeffizienten b_1 und b_0 bezw. mit $2a_{-1}$ und $-2a_{-2}$ bezeichnet werden, sodaß auch sie sich in die Rekursion einfügen. Es ist also:

$$\int p(u)^n du=\sqrt{4p(u)^3-g_2p(u)-g_3}\,\{a_{n-2}\,p(u)^{n-2}+a_{n-3}\,p(u)^{n-3}+$$
$$+\cdots a_1 p(u)+a_0\}-2a_{-1}\zeta(u)-2a_{-2}u+C.$$

Die Koeffizienten a_r sind aus der Rekursion zu berechnen, oder aus dem in dieser enthaltenen Gleichungssystem independent darzustellen

(1) $\quad 2(2n-1)a_{n-2}=1$

(2) $\quad 2(2n-3)a_{n-3}=0$

(3) $\quad (n-\frac{3}{2})g_1 a_{n-2}-2(2n-5)a_{n-4}=0$

(4) $\quad (n-2)g_3 a_{n-2}+(n-\frac{5}{2})g_2 a_{n-3}-2(2n-7)a_{n-5}=0$

(5) $\quad (n-3)g_3 a_{n-3}+(n-\frac{7}{2})g_2 a_{n-4}-2(2n-9)a_{n-6}=0$

(6) $\quad (n-4)g_3 a_{n-4}+(n-\frac{9}{2})g_2 a_{n-5}-2(2n-11)a_{n-7}=0$

. . . . . .

. . . . . .

(n) $\quad 2g_3 a_2+\frac{3}{2}g_2 a_1-2a_{-1}=0$

($n+1$) $\quad g_3 a_1+\frac{1}{2}g_2 a_0+2a_{-2}=0.$

Diese Gleichungen bestimmen sämtliche a_r. Allgemein ist:

$$a_r=\frac{\begin{vmatrix}
-2(2n-1) & & & & & \\
0 & -2(2n-3) & & & & \\
(n-\frac{3}{2})g_2 & 0 & -2(2n-5) & & & \\
(n-2)g_3 & (n-\frac{5}{2})g_2 & 0 & -2(2n-7) & & \\
 & (n-3)g_3 & (n-\frac{7}{2})g_2 & 0 & -2(2n-9) & \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
 & & (r+4)g_3 & (r+\frac{7}{2})g_2 & 0 & -2 \\
 & & & (r+3)g_3 & (r+\frac{5}{2})g_2 &
\end{vmatrix}}{(-2)^{n-r-1}(2n-1)(2n-3)(2n-5)\ldots(2r+5)(2r+3)}$$

a_r ist stets isobar in g_2 und g_3 vom Gewicht $n-r-2$.

as abgeleitete Rekursionsintegral für $\int p(u)^n du$ gilt auch für ve Werte von n. Man erhält genau wie oben:

$$g_3 \int \frac{du}{p(u)^n} = \frac{\sqrt{4p(u)^3 - g_2 pu - g_3}}{(n-1)\,p(u)^{n-1}} -$$
$$- \frac{2n-3}{2n-2} g_2 \int \frac{du}{p(u)^{n-1}} + \frac{2(2n-5)}{n-1} \int \frac{du}{p(u)^{n-3}}.$$

ieraus wieder

$$\frac{u}{u)^n} = \sqrt{4p(u)^3 - g_2 pu - g_3} \left\{ \frac{b_{n-1}}{p(u)^{n-1}} + \frac{b_{n-2}}{p(u)^{n-2}} + \cdots \frac{b_2}{p(u)^2} + \frac{b_1}{p(u)} \right\} +$$
$$+ c_2 \int \frac{du}{p(u)} + c_1 \int du + c_0 \int p(u)\,du + C,$$

s wieder durch Differenziation die Rekursion für die b_r:

$$r b_r g_3 + (r + \tfrac{1}{2}) b_{r+1} g_2 - 2(2r+3) b_{r+3} = 0$$

für $r = n-2, n-3, \ldots 2, 1$, während direkt $b_{n-1} = \frac{1}{n-1}$.

ie b_r gilt eine entsprechende Determinante wie für a_r.

as Integral $\int \frac{du}{pu}$ kann durch die Rekursion nicht gefunden n und ist auch sonst nicht auswertbar, da die Nullstellen u nicht bekannt sind.

s ist also $\int p(u)^{-n} du$ durch die gegebene Entwicklung zurück-t auf $\int \frac{du}{pu}$.

a jede doppelperiodische Funktion als rationale Funktion von pu llbar ist, so ist damit die Integration jeder doppelperiodischen ion auf $\int \frac{du}{pu}$ zurückgeführt.

Bericht über das Gesellschaftsjahr 1905/1906.

(Zusammengestellt vom Adjunkten Dr. A. Schwaßmann.)

Hauptversammlung am 6. März 1905.

er Jahrverwalter Herr Professor Dr. E. Hoppe erstattet den t über das 215. Gesellschaftsjahr. Darnach besteht die Gesell- am Schlusse desselben aus 12 Ehrenmitgliedern, 17 auswärtigen 6 einheimischen Mitgliedern. Der Vorsitzende gedenkt in warmen

Worten des Verlustes, den die Gesellschaft durch den Tod ihres langjährigen Mitgliedes, des weiland Wasserbauinspektors H. Lentz, erlitten habe, welcher sich namentlich durch seine grundlegenden Arbeiten über Ebbe und Flut ein hohes, dauerndes Verdienst errungen hat. Ferner bringt der Jahrverwalter das lebhafte Bedauern der Gesellschaft zum Ausdruck, daß außer drei bereits im Laufe des Jahres aus Hamburg fortgezogenen Mitgliedern nun auch das langjährige, treue Mitglied der Gesellschaft Herr Dr. O. Pund die Stadt verlassen wolle, um sich einer neuen Tätigkeit in Charlottenburg zu widmen. Das von ihm seit fünf Jahren verwaltete Amt des Bibliothekars wird Herrn Dr. P. Frank übertragen für die Jahre 1905 bis 1910. Zum Mitjahrverwalter wird Herr Dr. J. Schröder wiedergewählt, sodaß der Vorstand für das 216. Gesellschaftsjahr 1905/06 aus den Herren Professor Dr. E. Hoppe, Jahrverwalter, Dr. J. Schroeder, Mitjahrverwalter, und Dr. A. Schwaßmann, Adjunkt, besteht.

Der Kassenbericht des Mitjahrverwalters ergibt einen Vermögensbestand von 1977.82 Mk. Zum Revisor wurde Herr Professor H. Ahlborn gewählt.

Nach der Hauptversammlung findet das Stiftungsfestessen im Hôtel zum Kronprinzen in herkömmlicher Weise statt.

Versammlung am 25. März 1905.

Herr Dr. J. Schröder trägt über „Querschnittstransformationen“ vor und Herr Professor Dr. E. Hoppe macht eine Mitteilung über „die Konstanten der van der Waalschen Zustandsgleichung“.

Versammlung am 13. Mai 1905.

Die Herren Dr. B. Walter, Assistent am physikalischen Staatslaboratorium, Dr. O. Doerge, Oberlehrer an der Hansaschule in Bergedorf, Dr. Th. Körner und R. Uetzmann, Hilfslehrer an der Oberrealschule vor dem Holstentore, werden statutengemäß in die Gesellschaft aufgenommen.

Herr Dr. W. Büchel trägt vor „über die durch gewöhnliche Differentialgleichungen ersten Grades definierten Kurven“.

Versammlung am 24. Juni 1905.

Nachdem der Jahrverwalter in warmen Worten des traurigen Verlustes gedacht hat, den die Gesellschaft durch den Tod ihres Mitgliedes Herrn Oberlehrer E. Haassengier erlitten hat, ehrt die Versammlung das Andenken des Verstorbenen durch Erheben von den Sitzen. Herr Seminaroberlehrer Dr. A. Umlauf und Herr P. Roloff,

ndidat des höheren Schulamts, werden satzungsgemäß in die Gellschaft aufgenommen.

Herr Dr. Th. Körner trägt vor über die Entstehung des Beiffes „materieller Punkt“ in der Mechanik des 18. Jahrhunderts.

Herr Dr. A. Schwaßmann berichtet über die Ziele der von der mburger Sternwarte zur Beobachtung der totalen Sonnenfinsternis 1 30. August nach Souk-Ahras in Algerien auszusendenden Exdition und ladet die Gesellschaft im Auftrage von Herrn Direktor ofessor Dr. R. Schorr zur Besichtigung der für die Expedition stimmten Instrumente ein.

Versammlung am 9. September 1905.

Herr Direktor Professor Dr. Thaer fordert die Mitglieder der sellschaft schriftlich zur Beteiligung an dem während der ersten toberwoche in Hamburg stattfindenden Philologentage auf.

Herr Dr. P. Frank hält seinen angekündigten Vortrag „über rtielle Differentialgleichungen, deren Charakteristiken geodätische nien auf den Integralflächen sind.“ Daran schließt sich eine Mitilung von Herrn Oberlehrer G. Lony, worin er eine elementare rleitung einer Längenmaßbestimmung gibt, die in der Geometrie r Kreisbüschel zur Veranschaulichung der hyperbolischen Geometrie nutzt wird.

Versammlung am 14. Oktober 1905.

Die Gesellschaft beschließt die Herausgabe eines zweiten Nachtrags ihrem im Jahre 1890 herausgegebenen „Katalog der auf Hamburger bliotheken vorhandenen Literatur aus der reinen und angewandten athematik und Physik“. Der Nachtrag soll die Neuerwerbungen n Anfang 1893 bis Ende 1905 enthalten.

Herr Professor Dr. Classen hält seinen angekündigten Vortrag ber die Theorie der Kathoden- und Röntgenstrahlen“.

Versammlung am 11. November 1905.

Herr Oberlehrer Dr. E. Busche trägt über einige für Teilerahlen geltende Formeln vor.

Herr Dr. A. Schwaßmann macht einige Mitteilungen über die sultate der Hamburgischen Sonnenfinsternis-Expedition.

Versammlung am 9. Dezember 1905.

Die Gesellschaft beschließt ihre „Mitteilungen“ in Zukunft auch 51 Bibliotheken der Universitäten und Technischen Hochschulen s deutschen Sprachgebiets und außerdem an weitere 50 Gelehrte

des In- und Auslandes zu übersenden und die Auflage der „Mitteilungen“ zu diesem Zwecke von 350 auf 500 Exemplare zu erhöhen.

Herr A. Wetzler trägt über die „Darstellung der Potenz einer Potenzreihe“ vor.

Herr Professor Dr. E. Hoppe gibt ein umfassendes Referat über „die Kant-Laplacesche Theorie und die Gasgesetze“.

Versammlung am 13. Januar 1906.

Herr Dr. Lindemann, Oberlehrer an der Oberrealschule auf der Uhlenhorst, wird satzungsgemäß in die Gesellschaft aufgenommen.

Herr Oberlehrer Dr. E. Busche macht eine Mitteilung über „die Zerlegung einer Zahl in Summanden“.

Herr Professor Dr. Keferstein hält einen Vortrag über „die Auflösung der Gleichungen höheren Grades mit einer Unbekannten“.

Herr Dr. A. Schwaßmann trägt vor über „eine Methode, den Brechungsexponenten der die Sonne umgebenden Materie zu bestimmen“.

Die Bibliothek der Gesellschaft verdankt folgenden Herren wertvolle Zuwendungen, wofür sie den verehrten Verfassern auch auf diesem Wege den besten Dank aussprechen möchte:

Ahrens, Bähr, Berkhan, Bögehold, Bolte, E. Busche, Dohmen, Dölle, Geissen, Graf, Graff, Hebeler, Hertz, Heß, Edm. Hoppe, Kiseljak, Kolacek, Krause, Lerch, Lucas, Müth, Offenbacher, Quandt, Rose, Rosenhainer, Schorr, Schrader, Schwarzschild, C. Stechert, Wegener, Ziegel.

Außerdem steht die Gesellschaft wie bisher in Schriftenaustausch mit zahlreichen deutschen und ausländischen gelehrten Gesellschaften.

MITTEILUNGEN
R MATHEMATISCHEN GESELLSCHAFT
IN HAMBURG.

) IV. № 7. AUSGEGEBEN IM FEBRUAR 1907.

onjugierte Projektivitäten und adjungierte Involutionen.

Von Rudolf Böger.

l. *Inhalt.* In dem Ostern 1907 erscheinenden Programm des ymnasiums veröffentliche ich „Die optische Verwandtschaft in ktiver Darstellung.“ Da optische und kollineare Verwandtschaft sch sind, so sind die Hilfsmittel der Geometrie der Lage, weil immer das Allgemeine dem Besondern voranstellt, vor andern net, eine übersichtliche Darstellung zu geben, und diese allgemeine ellung kann, weil die Schlüsse in der Geometrie der Lage sich r an wenige grundlegende Sätze anknüpfen, in einer für Primaner indlichen Form erfolgen.

Die Abfassung dieser für die Schule bestimmten Darstellung von selbst den Anlaß zu Betrachtungen allgemeinerer Art; denn ann nicht ausbleiben, daß eine solche Aufgabe, wie sie die he Verwandtschaft der Geometrie der Lage stellt, wieder betend auf diese zurückwirkt; daß sich Probleme aufdrängen, die erst die Bedürfnisse der Optik praktische Bedeutung gewinnen. So besonders die Lehre von den konjugierten Projektivitäten und gierten Involutionen (§ 14 und § 19 meines Lehrbuches: Ebene etrie der Lage), die durch ihre Verwertung in der Optik neue erhält. Von den für die Optik notwendigen Sätzen aus diesem t gibt die erwähnte Programmabhandlung im Anschluß an meinen ie Schule bestimmten Leitfaden *Elemente der Geometrie der Lage* Darstellung, die ich meinem Unterricht in der Prima zugrunde hier mag eine allgemeinere, die angeführten Paragraphen ernde Darstellung ihre Stelle finden.

2. *Gegebene Projektivität.* Alle folgenden Betrachtungen gehen einer in dem Träger s gegebenen Projektivität aus. Von jedem ent A dieser Projektivität können wir in zweierlei Sinn fortiten. In dem ersten Sinn treffen wir auf homologe Elemente,

die wir der Reihe nach durch $A_1 A_2 \ldots$ bezeichnen wollen; im zweiten auf Elemente, die wir der Reihe nach durch $A_{-1} A_{-2} \ldots$ bezeichnen, sodaß die gegebene Projektivität dargestellt wird durch

$$\ldots A_{-1} A B B_1 \ldots \curlywedge \ldots A A_1 B_1 B_2 \ldots$$

3. *Adjungierte Involution.* Sind A und B zwei beliebige Elemente unserer Projektivität, A_1 und B_{-1} also die ihnen in *ungleichem* Sinne homologen, so ist durch die beiden Elementenpaare $AB \cdot A_1 B_{-1}$ eine Involution bestimmt. Entspricht in dieser Involution dem Punkt A_2 der Punkt X, so ergibt sich aus der Involution $AB \cdot A_1 B_{-1} \cdot A_2 X$:

$$A A_1 B_{-1} X \curlywedge B B_{-1} A_1 A_2 \curlywedge B_{-1} B_{-2} A A_1 (^2) \curlywedge A A_1 B_{-1} B_{-2}.$$

Das Element X fällt mithin mit dem Element B_{-2} zusammen, sodaß auch $A_2 B_{-2}$ ein Elementenpaar unsrer durch $AB \cdot A_1 B_{-1}$ bestimmten Involution bildet. — In der angegebenen Weise schließen wir weiter, daß $A_3 B_{-3}$ und auch $A_{-1} B_1$ usw. Elementenpaare unsrer Involution sind. Diese ist also

1. $AB \cdot A_1 B_{-1} \cdot A_{-1} B_1 \cdot A_2 B_{-2} \ldots$ — Aus ihr ergibt sich z. B.
2. $A A_1 A_2 B \curlywedge B B_{-1} B_{-2} A$. —
3. ***Lehrsatz:*** *Schreitet man von zwei beliebigen Elementen einer Projektivität in* ungleichem *Sinne weiter, so gelangt man zu homologen Elementen einer Involution.*
4. *Definition.* Diese Involution nennen wir der gegebenen Projektivität *adjungiert.* — Wir bezeichnen sie kurz durch (AB).

4. *Weitere Elementenpaare der adjungierten Involution.* Sind C und D irgend zwei homologe Elemente der adjungierten Involution (AB) und entspricht in ihr dem Element C_1 das Element X, so ergibt sich aus

$$AB \cdot A_1 B_{-1} \cdot CD \cdot C_1 X:$$

$$A B_{-1} C X \curlywedge B A_1 D C_1 \curlywedge B_{-1} A D_{-1} C (^2) \curlywedge A B_{-1} C D_{-1}.$$

1. Ist von der adjungierten Involution (AB) ein Elementenpaar CD, so ist auch $C_1 D_{-1}$ ein Elementenpaar. — Folglich
2. Zwei adjungierte Involutionen sind identisch, wenn sie in einem Elementenpaare übereinstimmen. —
   Daraus folgt weiter:
3. Es gibt ∞^1 einer gegebenen Projektivität adjungierte Involutionen, die wir erhalten, wenn wir einem beliebigen festen Element der Reihe nach die Elemente des Trägers zuordnen. —

Das von dem Element A durch A_1 und A_{-1} harmonisch getrennte Element A' wollen wir das dem Element A harmonisch zugeordnete

ınnen. Entspricht dem Element A' in der adjungierten Involution (B) das Element X, sodaß wir haben

$$AB \cdot A_{-1}B_1 \cdot A_1B_{-1} \cdot A'X, \quad \text{so ist}$$
$$A_{-1}A_1AA' \curlywedge B_1B_{-1}BX.$$

s ist daher X von B durch B_1 und B_{-1} harmonisch getrennt, d. h. s dem Element B harmonisch zugeordnete Element B':

4. Die den Elementen A und B harmonisch zugeordneten Elemente A' und B' bilden ein Elementenpaar der adjungierten Involution (AB).

5. *Konjugierte Projektivität.* Sind A und L zwei beliebige lemente der gegebenen Projektivität, A_1 und L_1 also die ihnen in *eichem* Sinne homologen und weiter A_2L_2 die diesen in gleichem nne homologen, so ist durch

$$AA_1A_2 \curlywedge LL_1L_2$$

ne neue Projektivität bestimmt. Aus der adjungierten Involution (^{3_1}) $(L_3) \equiv AL_3 \cdot A_1L_2 \cdot A_2L_1 \cdot A_3L$ ergibt sich

$$AA_1A_2A_3 \curlywedge L_3L_2L_1L \curlywedge LL_1L_2L_3$$

h. A_3 und L_3 bilden auch ein Elementenpaar unsrer neuen Projektivität:

1. *Schreitet man von zwei beliebigen Elementen der gegebenen Projektivität in* gleichem *Sinne weiter, so gelangt man zu homologen Elementen einer neuen Projektivität.*
2. *Definition.* Diese neue Projektivität nennen wir der ursprünglichen *konjugiert.* — Wir bezeichnen sie kurz durch $[AL]$.
3. *Definition.* Die Gesamtheit der einer gegebenen Projektivität konjugierten Projektivitäten nennen wir einen *Büschel* von Projektivitäten.

Zusatz. In der konjugierten Projektivität $[AA]$ ist A_1 sich selbst molog usw. (^{5_1}):

In der konjugierten Projektivität $[AA]$ ist jedes Element sich selbst homolog.

6. *Weitere Elementenpaare der konjugierten Projektivität.* Sind n der konjugierten Projektivität $[AL]$ B und M irgend zwei mologe Elemente und entspricht in ihr dem Element B_1 das Element X, so ergibt sich aus

$$AA_1A_2A_3BB_1 \curlywedge LL_1L_2L_3MX:$$

$$_1l_2L_3M_1 \curlywedge LL_1L_2M(^2) \curlywedge AA_1A_2B \curlywedge A_1A_2A_3B_1(^2) \curlywedge L_1L_2L_3X.$$

X fällt also in M_1:

1. Entspricht in der konjugierten Projektivität $[AL]$ dem Element B das Element M, so entspricht auch dem Element B_1 das Element M_1. —

Da nun auch B_2 und M_2 einander entsprechen, so enthält der vorige Satz den folgenden:

2. Zwei konjugierte Projektivitäten sind identisch, wenn sie in einem Elementenpaar übereinstimmen. —

Daraus folgt weiter

3. *Es gibt ∞^1 einer gegebenen Projektivität konjugierte Projektivitäten, die wir erhalten, wenn wir einem beliebigen festen Elemente der Reihe nach die Elemente des Trägers zuordnen.* —

Fällt L in A_1, so ist die konjugierte Projektivität

$$AA_1A_2 \barwedge A_1A_2A_3:$$

4. Die konjugierte Projektivität $[AA_1]$ ist mit der gegebenen identisch. —

Ist L' das dem Element L harmonisch zugeordnete ([4]), so folgt aus den beiden harmonischen Würfen

$$A_{-1}A_1AA' \barwedge L_{-1}L_1LL':$$

5. Die den Elementen A und L harmonisch zugeordneten A' und L' sind homologe Elemente der konjugierten Projektivität $[AL]$. —

Bezeichnen wir in der Involution $AA \cdot A_{-1}A_1$ das zweite Ordnungselement durch D und das in ihr dem Element D_{-1} homologe durch X, so folgt aus

$$AA \cdot A_{-1}A_1 \cdot DD \cdot D_{-1}X:$$
$$AA_1DX \barwedge AA_{-1}DD_{-1} \barwedge A_1AD_1D([2]) \barwedge AA_1DD_1.$$

Weil also X in D_1 fällt, so lautet unsre Involution

$$AA \cdot A_{-1}A_1 \cdot DD \cdot D_{-1}D_1$$

und diese läßt erkennen:

6. Ist D von A durch A_{-1} und A_1 harmonisch getrennt, so ist auch A von D durch D_{-1} und D_1 harmonisch getrennt; oder, in anderer Bezeichnung

Ist A' dem Element A harmonisch zugeordnet, so ist auch A dem Element A' harmonisch zugeordnet. —

Fällt in der Projektivität $[AL;\ A'L']$ das Element L in A', so haben wir, weil dann L' in A fällt, $[AA';\ A'A]$. In der Projektivität entsprechen sich also die Elemente A und A' zweifach, d. h. die Projektivität wird zur Involution:

7. Unter den Projektivitäten eines Büschels gibt es eine Involution: $[AA']$. —

Ist in der *konjugierten* Involution $[AA']$ dem Element B das Element M homolog, so haben wir

die konjugierte Involution: $BM \cdot B_1M_1 \cdot B_{-1}M_{-1}$;

ferner die adjungierte Involution ([3]): $BM \cdot B_1M_{-1} \cdot B_{-1}M_1$.

Folglich $B_{-1}B_1BM \curlywedge M_{-1}M_1MB \curlywedge B_1B_{-1}BM$.

M ist also der von B durch B_{-1} und B_1 harmonisch getrennte Punkt:

8. Die Elementenpaare der konjugierten Involution sind einander harmonisch zugeordnete Elemente.

7. *Austausch der Elemente eines Wurfes.* Bildet man aus einem Wurf (d. h. aus zwei Elementenpaaren) AB; CD einen neuen, indem man ein Element des ersten Paares mit einem Element des zweiten und gleichzeitig das zweite Element des *ersten* Paares mit dem zweiten Element des *zweiten* Paares zu einem neuen Paar vereinigt, so wollen wir sagen:

Aus einem Wurf AB; CD entsteht durch *gleichsinnigen Austausch* sowohl der Wurf AC; BD als auch der Wurf AD; BC. — (Die beiden Würfe BC; AD und BD; AC sind mit den beiden angegebenen identisch, da die Reihenfolge der Elementenpaare willkürlich ist.) —

Bildet man aber aus einem Wurf AB; CD einen neuen, indem man ein Element des ersten Paares mit einem Element des zweiten und gleichzeitig das zweite Element des *zweiten* Paares mit dem zweiten Element des *ersten* Paares zu einem neuen Paar vereinigt, so wollen wir sagen

Aus einem Wurf AB; CD entsteht durch *ungleichsinnigen Austausch* sowohl der Wurf AC; DB als auch der Wurf AD; CB.

8. *Involutionen des Büschels.* Ist (AM) eine beliebige Involution ([3]) des Büschels und $[AL]$ eine beliebige Projektivität ([5]) des Büschels, so ist die Involution (AM) auch der Projektivität $[AL]$ adjungiert. Denn: Ist in der Involution (AM) dem Element L das Element B homolog, so haben wir ([3]):

$$AA_1A_2B \curlywedge MM_{-1}M_{-2}L \curlywedge LL_1L_2M([3]);$$

d. h. in der Projektivität $[AL]$ ist dem Element B das Element M homolog, sodaß wir haben $[AL;\ BM]$; dieser Projektivität ist aber nach der Definition ([3]) die Involution $(AM;\ BL)$ adjungiert:

1. Ist eine Involution der gegebenen Projektivität adjungiert, so ist sie *jeder* Projektivität des Büschels adjungiert. —

Indem man von AA_1A_2L statt von AA_1A_2B ausgeht, erhält man die Projektivität $[AB; LM]$; daher

2. Aus jedem Wurf einer adjungierten Involution $(AM \cdot BL)$ erhält man durch *ungleichsinnigen* Austausch konjugierte Projektivitäten: $[AL; BM]$ und $[AB; LM]$. —

Ist $[AL]$ eine beliebige, der gegebenen konjugierte Projektivität und in dieser dem Element B das Element M homolog, so ist die dieser Projektivität $[AL; BM]$ adjungierte ([3]) Involution $(AM \cdot BL)$ auch der gegebenen Projektivität adjungiert. Denn:

$$AA_1A_2B \barwedge LL_1L_2M \barwedge MM_{-1}M_{-2}L([3]);$$

d. h. von der der gegebenen Projektivität adjungierten Involution $AM \cdot A_1M_{-1}$ ist BL ein Elementenpaar:

3. Aus jedem Wurf einer Projektivität des Büschels erhält man eine Involution des Büschels, indem man die äußeren und die inneren Glieder des Wurfes zu je einem Elementenpaar vereinigt. — Daraus folgt ([8]):

4. Ist eine Involution *einer* Projektivität des Büschels adjungiert, so ist sie *jeder* Projektivität des Büschels adjungiert.

Zusatz. Ist in der Projektivität $[AL]$ dem Element B das Element M homolog, so ist in ihr auch dem Element B_1 das Element M_1 homolog ([6]). Der Projektivität $[AL; BM; B_1M_1]$ ist aber die Involution $(AM_1 \cdot B_1L)$ adjungiert ([3]) und da diese auch ([4]) der gegebenen Projektivität adjungiert ist, so sind weitere Elementenpaare: A_1M; BL_1. — Aus dieser Involution $(AM_1 \cdot A_1M \cdot BL_1 \cdot B_1L)$ ist in der erwähnten Programmabhandlung die optische Verwandtschaft abgeleitet.

9. *Projektivitäten des Büschels.* Sind $[AB]$ und $[AL]$ zwei beliebige unter den der gegebenen Projektivität konjugierten Projektivitäten und ist in der ersten dem Element L das Element M homolog, so ist in der zweiten dem Element B ebenfalls das Element M homolog; denn aus der Projektivität $[AB; LM]$ erhält man durch Vereinigung der innern und äußern Glieder die der gegebenen Projektivität adjungierte Involution $(AM \cdot BL)$ ([8]) und aus dieser durch ungleichsinnigen Austausch die der gegebenen konjugierte Projektivität $[AL; BM]$ ([8]). Diese Projektivität ist aber der ersten $[AB; LM]$ konjugiert ([3]):

1. Zwei Projektivitäten sind einander konjugiert, wenn sie beide einer dritten konjugiert sind. —

Wir sahen eben, daß wir aus der Projektivität $[AB; LM]$ die andre $[AL; BM]$ ableiten können. Diese ist aber gebildet, indem

ın in der ersten Projektivität von A und L im gleichen Sinne fort-
ıreitet, d. h. auf dieselbe Weise, wie wir ursprünglich ([5₂]) die kon-
ierten Projektivitäten aus der gegebenen $[AA_1]$ ([6₄]) abgeleitet haben.
raus und aus Nr. 8_4 folgt: Wir können jede der Projektivitäten als
sgangspunkt für die Darstellung des Büschels nehmen, mit andern
orten, die Projektivität $[AA_1]$, von der wir bei der Darstellung
ı Büschels ausgingen, nimmt keine Ausnahmestellung ein, sie kann
rch jede ihr konjugierte Projektivität ersetzt werden:

2. Ein Büschel ist durch eine beliebige seiner Projektivitäten bestimmt. —

Zwei beliebige Involutionen $AB_1 \cdot A_1B$ und $AC_1 \cdot A_1C$ sind immer
ıer Projektivität, nämlich der Projektivität

$$ABC \barwedge A_1B_1C_1$$

jungiert ([8₂]):

3. Ein Büschel ist durch zwei Involutionen bestimmt. —

Der angegebenen Projektivität ist auch noch die Involution BC_1
$_1C$ adjungiert. Diese Bemerkung enthält den Satz des Pascal ([11]).

10. *Projektive Verwandtschaft von Reihe und Büschel.* Wir können
ı Elemente unseres Trägers und die Projektivitäten unseres Büschels
ıander zuordnen, indem wir einem beliebigen festen Elemente A
ı Projektivität $[AA]$ ([5Z]) zuweisen und dann dem beweglichen
ement L die konjugierte Projektivität $[AL]$. — Bei einer zweiten
ordnung wollen wir dem festen Elemente B die Projektivität $[BB]$,
e mit der Projektivität $[AA]$ identisch ist ([5Z])) zuweisen und
ın dem beweglichen Element M die Projektivität $[BM]$. Diese Art
r beiden Zuordnungen wollen wir eine *gleichsinnig projektive* nennen.
eisen wir dann die Elemente L und M, die derselben Projektivität des
ıschels angehören, einander als homologe zu, so sind die Reihen L und M
ıjektiv aufeinander bezogen; denn aus der Projektivität $[AL; BM]$,
ı gilt, wenn L und M derselben Projektivität angehören, ergibt
h ([9₁]) die konjugierte Projektivität $[AB; LM]$, und diese bleibt
ıselbe ([6₄]) für alle zusammengehörigen Werte von L und M:

1. Sind die Reihen L und M gleichsinnig projektiv auf die Projektivitäten des Büschels bezogen, so bilden die Reihen L und M eine dem Büschel konjugierte Projektivität, in der dem Elemente A das Element B homolog ist. —

Wir können die Elemente des Trägers und die Projektivitäten
ı Büschels noch in einer zweiten Weise aufeinander beziehen, indem
r dem festen Elemente A die Projektivität $[AA]$ zuweisen und
ın dem beweglichen Elemente L die Projektivität $[LA]$. —

Ordnen wir ferner dem festen Elemente B die Projektivität $[BB]$ zu und nun wieder wie unter 1 dem Elemente M die Projektivität $[BM]$, so wollen wir sagen, die beiden Reihen L und M sind *ungleichsinnig projektiv* auf den Büschel bezogen. In diesem Fall ergibt sich (8) aus $[LA]$ und $[BM]$ die Involution $(AB \cdot LM)$, die für alle Werte L und M dieselbe bleibt, wenn L und M nur, wie wir annehmen, derselben Projektivität des Büschels angehören:

2. Sind die Reihen L und M *ungleichsinnig projektiv* auf die Projektivitäten des Büschels bezogen, so bilden die beiden Reihen eine dem Büschel adjungierte Involution, von der A und B ein Elementenpaar bilden. —

Schließlich können wir auch noch die Elemente unseres Trägers und die Involutionen unseres Büschels einander zuordnen, aber nur in einer Weise, da man bei einer Involution zu demselben homologen Elemente gelangt, einerlei, in welchem Sinn man fortschreitet. Wir ordnen dem festen Elemente A die Involution (AA) und dann einem beweglichen Element L die Involution (AL) zu. Bei einer zweiten Zuordnung weisen wir dem festen Element B die Involution (BB) und dem beweglichen Element M die Involution (BM) zu. Nennen wir dann die Elemente L und M, welche derselben Involution des Büschels angehören, homolog, so sind die Reihen L und M projektiv aufeinander bezogen; denn aus den Involutionen (AL) und (BM) ergibt sich (8) durch ungleichsinnigen Austausch die Projektivität $[AB; ML]$:

3. Sind die Reihen L und M projektiv auf die Involutionen des Büschels bezogen, so bilden sie eine konjugierte Projektivität, in der dem Elemente B das Element A homolog ist. —

Beschränken wir den letzten Satz auf drei adjungierte Involutionen, so lautet er:

4. Sind in den drei adjungierten Involutionen (AL); (AL'); (AL'') dem Elemente B der Reihe nach die Elemente M; M'; M''; homolog, so gilt die Projektivität $BLL'L'' \barwedge AMM'M''$.

11. *Pascal.* Der Satz des Pascal sagt aus: Bilden wir aus sechs beliebigen Punkten eines Kegelschnittes ein beliebiges Sechseck

$$\overline{AB_1}\,\underset{\smile}{\overline{CA_1}}\,\underset{\smile}{\overline{BC_1}},$$

so liegen die Schnittpunkte je zweier Gegenseiten

$$AB_1 \cdot A_1B; \quad B_1C \cdot BC_1; \quad CA_1 \cdot C_1A$$

in einer Gerade. — Übertragen wir diesen Satz auf ein beliebiges Grundgebilde, so lautet er:

Bilden wir aus sechs beliebigen Elementen

$$\overline{A B_1 C A_1 B C_1}$$

eines Grundgebildes die drei Involutionen

$$(A B_1 \cdot A_1 B); \quad (B C_1 \cdot B_1 C); \quad (C A_1 \cdot C_1 A),$$

so gehören diese einem Büschel adjungierter Involutionen an.

Denn sie sind offenbar (3,) der Projektivität $ABC \barwedge A_1 B_1 C_1$ adngiert. — Die Aussage dieses Pascal ist also (10,);

Entsprechen in den drei aus sechs beliebigen Elementen eines Grundgebildes in der angegebenen Weise gebildeten Involutionen irgend zwei Elementen D und E der Reihe nach die Elemente $OO'O''$ und $PP'P''$, so gilt die projektive Beziehung

$$E O O' O'' \barwedge D P P' P''.$$

12. *Satz von Lagrange-Helmholtz.* Zwischen den beiden kongierten Projektivitäten $[AL]$ und $[LA_1]$ besteht ein Zusammenhang, r für die Optik von Wichtigkeit ist und daher hier noch abgeleitet erden soll. Um eine kurze Bezeichnung für diese beiden Projekvitäten zu haben, wollen wir $[AL]$ die laterale und $[LA_1]$ die anlare Projektivität zu der gegebenen $[AA_1]$ (6,) nennen. —

1. Entspricht in der lateralen Projektivität $[AL]$ dem Elemente B das Element M, so entspricht in der angularen Projektivität $[LA_1]$ dem Elemente M das Element B_1.

Denn aus $[AL; A_1 L_1; BM]$ (5,) folgt (8,) die Involution $A_1 M \cdot B L_1 \cdot B_1 L)$ (3,) und aus der Projektivität $[LA_1; MX]$ die Inolution $(A_1 M \cdot LX)$; X fällt also in B_1 (4,). —

Entspricht also in der lateralen Projektivität $[AL]$ dem Elemente S das Element A_1, so entspricht in der angularen Projektivität $LA_1]$ dem Elemente A_1 das Element S_1 und folglich (5,) auch dem lemente A das Element S. — Entspricht ferner in der lateralen rojektivität $[AL]$ dem Elemente B das Element M und in der angularen Projektivität $[LA_1]$ dem Elemente B das Element T, so aben wir die beiden Projektivitäten $[AL; SA_1; BM]$ und $[AS; LA_1; {}^{\prime}T]$. Aus beiden ergibt sich (8,) die adjungierte Involution $(A_1 B$ $LT \cdot SM)$ (4,), von der auch AB_1 (3,) ein Elementenpaar ist:

$$2.\ (A B_1 \cdot A_1 B \cdot LT \cdot SM). \quad —$$

Stellt uns die Projektivität $[AA_1]$ die optische Verwandtschaft wischen Objekt und Bild dar, so sind die Fluchtpunkte F und F_1, . h. die dem uneigentlichen Punkte F_1 in ungleichem Sinn homo-

logen Punkte, in optischer Sprache die Brennpunkte. Entsprechen den konjugierten Projektivitäten $[AL]$ und $[LA_1]$ den Punkten F die Punkte KK_1 und HH_1, so heißen KK_1 die Knotenpunkte und H die Hauptpunkte der optischen Verwandtschaft. Die eben angegeben adjungierte Involution wird also, wenn wir A und B mit F und zusammenfallen lassen:

$$3.\ (FF_2 \cdot F_1F_1 \cdot HK_1 \cdot H_1K),$$

und aus dieser lassen sich die bekannten Beziehungen zwischen Brenn punkten, Hauptpunkten und Knotenpunkten ablesen. —

Aus der Involution (2) ergibt sich die projektive Beziehung

$$A_1ALS \barwedge BB_1TM \barwedge B_1BMT$$

d. h. das Doppelverhältnis $(A_1ALS) \equiv \frac{LA_1}{LA} : \frac{SA_1}{SA}$ ist gleich de Doppelverhältnis $(B_1BMT) \equiv \frac{MB_1}{MB} : \frac{TB_1}{TB}$ oder, mit anderen Worte das angegebene Doppelverhältnis ist konstant:

4. Bestimmt man in den drei einander konjugierten Projektivität

$$[AA_1];\ [AL];\ [LA_1]$$

die einem beliebigen Elemente B homologen Elemente B_1M so ist

das Doppelverhältnis (B_1BMT)

konstant. —

Das Verhältnis $LA_1 : LA$ wird in der Optik die laterale V größerung, $SA : SA_1$ die angulare Vergrößerung genannt. Der Sa daß das Doppelverhältnis (A_1ALS) konstant ist, ist also nichts ande als der von Lagrange für eine brechende Fläche und von Helmho auf beliebig viele Kugelflächen erweiterte bekannte Satz der Opt

13. *Optische Verwandtschaft eines Linsensystems.* Für die optis Verwandtschaft hat dies konstante Doppelverhältnis den Wert c_n wo c_n die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichts im letzten Mit c die im ersten Mittel ist. Befinden sich Objekt und Bild, wie es den Linsen und Linsensystemen meist der Fall ist, in demselb Mittel, so ist

$$(A_1ALS) = 1$$

d. h. die Punkte L und S (im besonderen die Haupt- und Knot punkte ([12])) fallen zusammen. Fällt aber die laterale Projektivität $[A$ mit der angularen $|LA_1|$ zusammen, so folgt aus ([5])

$$[AL;\ A_1L_1;\ LA_1]$$

die adjungierte Involution (^{8_2}):

$$(A_1A_1 \cdot AA_2 \cdot LL_1) \ (^{3_2}). \ —$$

Es ist die Frage von Interesse, ob es in dem von uns behandelten allgemeinen Fall immer zwei homologe Punkte L und L_1 in der ursprünglichen Projektivität $[AA_1]$ (^{6_4}) gibt, welche gleichzeitig ein Punktpaar der durch $(AA_2 \cdot A_1A_1)$ bestimmten Involution bilden. Um diese Frage zu entscheiden, beweisen wir zunächst den Satz:

1. Wenn es zu einem Punkt A einen Punkt L der verlangten Art gibt, so gibt es zu jedem Punkt B einen Punkt M, sodaß

$$BB_2 \cdot B_1B_1 \cdot MM_1$$

eine Involution bilden.

Es ist nämlich M der Punkt, welcher in der konjugierten Projektivität $[AL]$ dem Punkt B homolog ist (oder, was auf dasselbe hinauskommt, welcher in der adjungierten Involution (BL_1) dem Punkt A_1 homolog ist). Denn aus $[AL; BM; B_1M_1]$ ergibt sich (^{8_4}) die adjungierte Involution $(AM_1 \cdot B_1L)$, die vollständiger lautet (vgl. auch Nr. 8 Z):

$$(AM_1 \cdot A_1M \cdot BL_1 \cdot B_1L \cdot A_2M_{-1}); \quad \text{folglich}$$

$$M_1MB_1B \curlywedge AA_1LL_1 \curlywedge A_2A_1L_1L \curlywedge M_{-1}MBB_1 \curlywedge MM_1B_1B_2. \ —$$

Gehen wir nun statt vom beliebigen Punkt A von dem ersten Fluchtpunkt F (^{12_2}) aus, so erhalten wir (^{13_1}) die adjungierte Involution

$$(FF_2 \cdot F_1F_1 \cdot KK_1); \quad \text{folglich}$$

$$FK_1KF_1 \curlywedge F_2KK_1F_1; \quad \text{folglich}$$

$$FK = K_1F_2.$$

Nun gibt es in jeder Projektivität zwei Punktpaare PP_1 und QQ_1, deren Entfernungen von den beiden Fluchtpunkten ihrem absoluten Wert nach gleich sind: die sogenannten Potenzpunkte. Aber nur bei einer Projektivität mit negativer Potenz haben diese Abstände, wie verlangt wird, entgegengesetzten Sinn.

Ein Linsensystem kann also nur eine Projektivität mit negativer Potenz darstellen. Ein solches aber kann jedesmal durch zwei Linsensysteme dargestellt werden und zwar durch ein kollektives oder ein dispansives, je nachdem man P oder Q zum ersten Knotenpunkt (oder, was hier dasselbe ist (^{13}), zum ersten Hauptpunkt) macht.

Über die Berechnung von sphärischen Dreiecken, in denen jede Seite und jeder Winkel einen rationalen Sinus und einen rationalen Kosinus besitzt.

Von H. Schubert.

§ 1. Einleitendes.

Dem Lehrer der sphärischen Trigonometrie muß daran liegen, für das rechtwinklige und für das schiefwinklige sphärische Dreieck Beispiele zu besitzen, von der Beschaffenheit, daß die Sinusse und die Kosinusse aller Seiten und aller Winkel rational sind, damit der Schüler bei Anwendung der Formeln, die zwischen den Seiten und den Winkeln bestehen, nur auf Quadratwurzeln stoßen kann, die aufgehen. Zwar habe ich schon im dritten Bande der „Auslese aus meiner Unterrichts- und Vorlesungspraxis“ (Leipzig, 1905 und 1906, in drei Bändchen) Wege gezeigt, die zu solchen Beispielen führen. Hier sind nun die Mittel, durch welche solche Dreiecke in beliebiger Menge hergestellt werden können, bedeutend vereinfacht.

Die Seiten des schiefwinkligen sphärischen Dreiecks mögen a, b, c, die ihnen gegenüberliegenden Winkel α, β, γ heißen, und beim rechtwinkligen Dreieck möge α der rechte Winkel sein. Bekanntlich sind $\sin\delta$ und $\cos\delta$ und deshalb alle trigonometrischen Funktionen von δ rational, wenn $\operatorname{tg}\frac{\delta}{2}$ rational ist, und umgekehrt, weil:

$$\sin\delta = \frac{2\operatorname{tg}\frac{\delta}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\delta}{2}},$$

$$\cos\delta = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\delta}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\delta}{2}},$$

$$\operatorname{tg}\frac{\delta}{2} = \frac{1-\cos\delta}{\sin\delta}.$$

Da kein Mißverständnis möglich ist, so soll immer $\operatorname{tg}\frac{\delta}{2}$ kurz mit δ bezeichnet werden, sodaß wir z. B. die Aufgabe, ein sphärisches Dreieck herzustellen, in denen zwei Seiten b und c sowie ihre Gegenwinkel β und γ einen rationalen Sinus und einen rationalen Kosinus besitzen, wegen des Sinussatzes der sphärischen Trigonometrie, auf eine Aufgabe zurückführen können, die sich nun kurz so aussprechen läßt: Die Gleichung:

$$\frac{2c}{1+c^2}\cdot\frac{2\beta}{1+\beta^2} = \frac{2b}{1+b^2}\cdot\frac{2\gamma}{1+\gamma^2}$$

soll durch rationale Werte von c, β, b, γ gelöst werden. Winkel, deren Sinus und Kosinus rational sind, sollen, wie in meiner „Auslese“ heronisch heißen, und ebenso sollen sphärische Dreiecke, in denen alle drei Seiten und alle drei Winkel heronisch sind, heronische sphärische Dreiecke genannt werden.

Für das rechtwinklige sphärische Dreieck reicht es aus, die Gleichung:

$$\cos a = \cos b \cdot \cos c$$

durch heronische Winkel a, b, c zu erfüllen, oder, was nach dem obigen auf dasselbe hinauskommt, die Gleichung

$$\frac{1-a^2}{1+a^2} = \frac{1-b^2}{1+b^2} \cdot \frac{1-c^2}{1+c^2}$$

durch rationale Zahlen a, b, c zu erfüllen, um zu erreichen, daß das rechtwinklige sphärische Dreieck heronisch ist, da ja dann

$$\sin\beta = \frac{\sin b}{\sin a} \quad \text{und} \quad \sin\gamma = \frac{\sin c}{\sin a},$$

sowie:

$$\cos\beta = \operatorname{cotg} a \cdot \operatorname{tg} c \quad \text{und} \quad \cos\gamma = \operatorname{cotg} a \cdot \operatorname{tg} b$$

auch rational werden müssen.

Für das schiefwinklige sphärische Dreieck reicht es aus, die schon oben genannte Gleichung zwischen c, β, b, γ durch rationale Werte zu erfüllen, um zu erreichen, daß auch a und α rational werden, also das sphärische Dreieck ein heronisches wird. Denn aus den Napierschen Analogien folgt:

$$a = \frac{b-c}{\beta-\gamma} \cdot \frac{\beta+\gamma}{1+bc} \quad \text{und} \quad \alpha = \frac{b-c}{\beta-\gamma} \cdot \frac{1+\beta\gamma}{b+c}.$$

§ 2. Weg zur Berechnung rationaler Sinusse und Kosinusse für die fünf Stücke eines rechtwinkligen sphärischen Dreiecks.

Die Rationalität der Sinusse und der Kosinusse der drei Seiten eines rechtwinkligen sphärischen Dreiecks wird erreicht, wenn man

$$\cos a = \cos b \cdot \cos c$$

durch heronische Winkel a, b, c löst, d. h. nach § 1, wenn man die Gleichung

(1) $$\frac{1-a^2}{1+a^2} = \frac{1-b^2}{1+b^2} \cdot \frac{1-c^2}{1+c^2}$$

durch rationale Zahlen a, b, c erfüllt. Aus (1) folgt durch Lösung für a^2:

(2) $$a^2 = \frac{b^2+c^2}{1+b^2 \cdot c^2}.$$

Wenn man nun in (2) rechts Zähler und Nenner mit v^2 multipliziert, so erhält man im Zähler und Nenner die Summe zweier Quadrate. Demgemäß setze man:

$$vb = 1 - x^2, \qquad vc = 2x, \qquad v = 2y, \qquad vbc = 1 - y^2.$$

Dadurch erhält man:

$$a = \frac{1 + x^2}{1 + y^2}.$$

außerdem

$$b = \frac{1 - x^2}{2y} \qquad \text{und} \qquad c = \frac{x}{y},$$

Demgemäß werden a, b, c rational, wenn x und y beliebige positive oder negative rationale Zahlen sind. Die rationalen Zahlen x und y sind aber nicht unabhängig voneinander, sondern müssen, weil

$$vb \cdot vc = v \cdot vbc$$

ist, die Bedingung

$$(1 - x^2) \cdot 2x = 2y \cdot (1 - y^2)$$

oder:

$$x - x^3 = y - y^3$$

oder:

$$x - y = (x - y)(y^2 + xy + y^2) \qquad \text{erfüllen.}$$

Wenn nun $x - y = 0$ wäre, müßte $a = 1$, $c = 1$, d. h. $\operatorname{tg} \frac{a}{2} = 1$ oder $a = 90^0$ und ebenso $c = 90^0$ sein, welchen Fall wir als trivial ausschließen. So bleibt nur übrig:

(3) $$x^2 + xy + y^2 = 1.$$

Wegen dieser Bedingungsgleichung (3) wird nun:

$$b = \frac{1 - x^2}{2y} = \frac{x + y}{2}.$$

Der Weg, um zu allen rationalen Zahlen a, b, c, die (2) erfüllen, zu kommen, besteht also darin, daß man durch Erfüllung der Bedingung (3) unzählig viele Paare rationaler Zahlen x und y findet, und dann:

(4) $$b = \tfrac{1}{2}(x + y), \qquad c = \frac{x}{y} \qquad \text{und} \qquad a = \frac{1 + x^2}{1 + y^2} \qquad \text{setzt.}$$

Sollte b oder c oder b und c negativ werden, so darf man auch wegen Formel (2) die entsprechenden positiven Werte wählen. Nachdem man so a, b, c rational gefunden hat, erhält man $\cos a$, $\cos b$, $\cos c$ aus:

$$\cos a = \frac{1 - a^2}{1 + a^2}, \qquad \cos b = \frac{1 - b^2}{1 + b^2}, \qquad \cos c = \frac{1 - c^2}{1 + c^2}.$$

Dann wird auch $\sin a$, $\sin b$, $\sin c$, sowie $\operatorname{cotg} a$, $\operatorname{tg} b$, $\operatorname{tg} c$ rational, und deshalb ebenfalls rational:

$$\sin \beta, \quad \sin \gamma, \quad \cos \beta, \quad \cos \gamma.$$

Um die Bedingungsgleichung (3) zu erfüllen, verwandele man dieselbe in:

$$\frac{x+y}{1-y} = \frac{1+y}{x},$$

und setze jeden der hier gleichgesetzten Brüche gleich m. Dadurch erhält man:

(5) $$x = \frac{2m+1}{m^2+m+1} \quad \text{und} \quad y = \frac{m^2-1}{m^2+m+1}.$$

Jede positive oder negative rationale Zahl, die man in (5) für m setzt, ergibt also, ohne mühsame Rechnung, alle trigonometrischen Funktionen der fünf Stücke eines heronischen rechtwinkligen sphärischen Dreiecks.

Als Beispiele wählen wir:

$$m = 2, \quad m = \tfrac{1}{2}, \quad m = 3, \quad m = -3, \quad m = \tfrac{1}{3}, \quad m = -\tfrac{1}{3},$$

wodurch wir die folgenden heronischen rechtwinkligen sphärischen Dreiecke erhalten:

I. $m = 2$, aus (5) folgt: $x = \frac{5}{7}$, $y = \frac{3}{7}$, dann erhält man durch (4):

$$b = \tfrac{4}{7}, \qquad c = \tfrac{5}{3}, \qquad a = \tfrac{37}{29}.$$

Hieraus ergibt sich:

$$\cos b = \tfrac{33}{65}, \qquad \cos c = \tfrac{8}{17}, \qquad \cos a = \tfrac{264}{1105}.$$

Daraus folgt dann:

$$\sin b = \tfrac{56}{65}, \qquad \sin c = \tfrac{15}{17}, \qquad \sin a = \tfrac{1073}{1105}.$$

Nun ergibt sich:

$$\sin\beta = \frac{\sin b}{\sin a} = \tfrac{952}{1073}, \qquad \sin\gamma = \frac{\sin c}{\sin a} = \tfrac{975}{1073},$$

also:

$$\cos\beta = \tfrac{495}{1073}, \qquad \cos\gamma = \tfrac{448}{1073}.$$

II. $m = \frac{1}{2}$, aus (5) folgt: $x = \frac{8}{7}$, $y = -\frac{3}{7}$, dann erhält man durch (4):

$$b = \tfrac{5}{14}, \qquad c = \tfrac{8}{3}, \qquad a = \tfrac{113}{58}.$$

Hieraus ergibt sich:

$$\cos b = \tfrac{171}{221}, \qquad \cos c = \tfrac{55}{73}, \qquad \cos a = \tfrac{9405}{16133}.$$

Daraus folgt dann:

$$\sin b = \tfrac{140}{221}, \qquad \sin c = \tfrac{48}{73}, \qquad \sin a = \tfrac{13108}{16133}.$$

Nun ergibt sich:

$$\sin\beta = \frac{\sin b}{\sin a} = \tfrac{2555}{3277}, \qquad \sin\gamma = \frac{\sin c}{\sin a} = \tfrac{2652}{3277},$$

also:

$$\cos\beta = \tfrac{2052}{3277}, \qquad \cos\gamma = \tfrac{1925}{3277}.$$

III. $m = 3$, aus (5) folgt: $x = \frac{7}{13}$, $y = \frac{8}{13}$, dann erhält man durch (4):

$$b = \frac{15}{26}, \qquad c = \frac{7}{8}, \qquad a = \frac{218}{233}.$$

Hieraus ergibt sich:

$$\cos b = \frac{451}{901}, \qquad \cos c = \frac{15}{113}, \qquad \cos a = \frac{6765}{101813}.$$

Daraus folgt dann:

$$\sin b = \frac{780}{901}, \qquad \sin c = \frac{112}{113}, \qquad \sin a = \frac{101568}{101813}.$$

Nun ergibt sich:

$$\sin \beta = \frac{\sin b}{\sin a} = \frac{22035}{25397}, \qquad \sin \gamma = \frac{\sin c}{\sin a} = \frac{25228}{25397},$$

also:

$$\cos \beta = \frac{12628}{25397}, \qquad \cos \gamma = \frac{2925}{25397}.$$

IV. $m = -3$, aus (5) folgt: $x = -\frac{5}{7}$, $y = +\frac{8}{7}$, dann erhält man durch (4):

$$b = \frac{3}{14}, \qquad c = \frac{5}{8}, \qquad a = \frac{74}{113}.$$

Hieraus ergibt sich:

$$\cos b = \frac{187}{205}, \qquad \cos c = \frac{39}{89}, \qquad \cos a = \frac{72193}{18245}.$$

Daraus folgt dann:

$$\sin b = \frac{84}{205}, \qquad \sin c = \frac{80}{89}, \qquad \sin a = \frac{16724}{18245}.$$

Nun ergibt sich:

$$\sin \beta = \frac{\sin b}{\sin a} = \frac{1869}{4181}, \qquad \sin \gamma = \frac{\sin c}{\sin a} = \frac{4100}{4181},$$

also:

$$\cos \beta = \frac{3740}{4181}, \qquad \cos \gamma = \frac{819}{4181}.$$

V. $m = \frac{1}{3}$, aus (5) folgt: $x = \frac{15}{13}$, $y = -\frac{8}{13}$, dann erhält durch (4):

$$b = \frac{7}{26}, \qquad c = \frac{15}{8}, \qquad a = \frac{394}{233}.$$

Hieraus ergibt sich:

$$\cos b = \frac{627}{725}, \qquad \cos c = \frac{161}{289}, \qquad \cos a = \frac{100947}{209525}.$$

Daraus folgt dann:

$$\sin b = \frac{364}{725}, \qquad \sin c = \frac{240}{289}, \qquad \sin a = \frac{183604}{209525}.$$

Nun ergibt sich:

$$\sin \beta = \frac{\sin b}{\sin a} = \frac{26299}{45901}, \qquad \sin \gamma = \frac{\sin c}{\sin a} = \frac{43500}{45901},$$

also:

$$\cos \beta = \frac{37620}{45901}, \qquad \cos \gamma = \frac{14651}{45901}.$$

VI. $m = -\frac{1}{3}$, aus (5) folgt: $x = \frac{3}{7}$, $y = -\frac{8}{7}$, dann erhält durch (4):

$$b = \frac{5}{14}, \qquad c = \frac{3}{8}, \qquad a = \frac{58}{113}.$$

Die hier gefundenen Werte von c und von a sind den in II. gefundenen reziprok, liefern also, wenn wir nur die positiven Werte von $\cos b$ und $\cos c$ berücksichtigen, $\cos b$, $\cos c$, genau so wie II. Demnach ist dieses sechste Beispiel in den Resultaten kein neues.

§ 8. Rationale Funktionen für die Sinusse und Kosinusse der fünf Stücke eines rechtwinkligen sphärischen Dreiecks.

Nachdem in § 2 gezeigt ist, auf welchem Wege man, ohne mühsame Rechnung, zu unendlich vielen Lösungen des Problems gelangen kann, rationale Zahlen für die trigonometrischen Funktionen der fünf Stücke eines rechtwinkligen sphärischen Dreiecks zu finden, wollen wir hier alle trigonometrischen Funktionen dieser fünf Stücke, auf die es bei der Berechnung des sphärischen Dreiecks ankommt, durch einen und denselben Buchstaben rational ausdrücken. Man kann dann dadurch, daß man in den Zählern und Nennern dieselben Faktoren erkennt, mit großer Leichtigkeit die zehn Formeln bestätigen, die man Napiersche Gedächtnisregeln nennt. Es handelt sich also um die Funktionen:

$$\begin{array}{lll} \sin a, & \cos a, & \operatorname{cotg} a, \\ \sin b, & \cos b, & \operatorname{tg} b, \\ \sin c, & \cos c, & \operatorname{tg} c, \\ \sin \beta, & \cos \beta, & \operatorname{cotg} \beta, \\ \sin \gamma, & \cos \gamma, & \operatorname{cotg} \gamma. \end{array}$$

Wenn man bei dem in § 2 besprochenen Berechnungswege m durch $\frac{1}{p}$ ersetzt, so erhält man, nachdem man möglichst in Faktoren zerlegt hat:

(1) $$\sin a = \frac{2(1+2p+7p^2+6p^3+2p^4)(2+2p+p^2+2p^3+2p^4)}{(1+2p+4p^3+2p^4)(5+2p+2p^2)(1+2p+2p^2)},$$

(2) $$\sin b = \frac{4(1+2p)(1+p+p^2)}{(5+2p+2p^2)(1+2p+2p^2)},$$

(3) $$\sin c = \frac{2p(2+p)(1+p)(1-p)}{1+2p^2+4p^3+2p^4},$$

(4) $$\sin \beta = \frac{2(1+2p)(1+p+p^2)(1+2p^2+4p^3+2p^4)}{(1+2p+7p^2+6p^3+2p^4)(2+2p+p^2+2p^3+2p^4)},$$

(5) $$\sin \gamma = \frac{p(2+p)(1+p)(1-p)(5+2p+2p^2)(1+2p+2p^2)}{(1+2p+7p^2+6p^3+2p^4)(2+2p+p^2+2p^3+2p^4)},$$

(6) $$\cos a = \frac{(1+2p)(1-2p-2p^2)(1+2p^2)(3+4p+2p^2)}{(1+2p^2+4p^3+2p^4)(5+2p+2p^2)(1+2p+2p^2)},$$

(7) $$\cos b = \frac{(3+4p+2p^2)(1+2p^2)}{(5+2p+2p^2)(1+2p+2p^2)},$$

(8) $$\cos c = \frac{(1+2p)(1-2p-2p^2)}{1+2p^2+4p^3+2p^4},$$

$$(9)\quad \cos\beta = \frac{(3+4p+2p^2)(1+2p^2)p(2+p)(1+p)(1-p)}{(1+2p+7p^2+6p^3+2p^4)(2+2p+p^2+2p^3+2p^4)},$$

$$(10)\quad \cos\gamma = \frac{2(1+2p)^2(1-2p-2p^2)(1+p+p^2)}{(1+2p+7p^2+6p^3+2p^4)(2+2p+p^2+2p^3+2p^4)},$$

$$(11)\quad \operatorname{cotg} a = \frac{(1+2p)(1-2p-2p^2)(1+2p^2)(3+4p+2p^2)}{2(1+2p+7p^2+6p^3+2p^4)(2+2p+p^2+2p^3+2p^4)},$$

$$(12)\quad \operatorname{tg} b = \frac{4(1+2p)(1+p+p^2)}{(3+4p+2p^2)(1+2p^2)},$$

$$(13)\quad \operatorname{tg} c = \frac{2p(2+p)(1+p)(1-p)}{(1+2p)(1-2p-2p^2)},$$

$$(14)\quad \operatorname{cotg}\beta = \frac{(3+4p+2p^2)(1+2p^2)p(2+p)(1+p)(1-p)}{2(1+2p)(1+p+p^2)(1+2p^2+4p^3+2p^4)},$$

$$(15)\quad \operatorname{cotg}\gamma = \frac{2(1+2p)^2(1-2p-2p^2)(1+p+p^2)}{p(2+p)(1+p)(1-p)(5+2p+2p^2)(1+2p+2p^2)}.$$

Obwohl diese 15 Formeln gut geeignet sind, um die zehn Napie schen Regeln für das rechtwinklige sphärische Dreieck zu bestätig so sind sie doch wenig brauchbar, um dem Lehrer der sphärisch Trigonometrie rationale Zahlenbeispiele zu liefern. Für diesen Zwe ist der in § 2 beschriebene Weg vorzuziehen.

§ 4. Wege zur Berechnung rationaler Sinusse und Kosinusse f die sechs Stücke eines schiefwinkligen sphärischen Dreiecks.

Um auch für das schiefwinklige sphärische Dreieck zu rational Zahlen für die trigonometrischen Funktionen der drei Seiten a, b und ihrer Gegenwinkel α, β, γ zu gelangen, gehen wir am einfachst von der Sinusformel aus. Dann haben wir, wie schon in § 1 a gesprochen ist, die Gleichung:

$$(1)\qquad \frac{c\cdot\beta}{(1+c^2)(1+\beta^2)} = \frac{b\cdot\gamma}{(1+b^2)(1+\gamma^2)}$$

durch rationale Werte der Unbekannten c, β, b, γ zu erfüllen. V erfüllen (1), wenn wir dem folgenden Gleichungspaar genügen:

$$\left.\begin{aligned} c\beta &= x^2 b\gamma \\ (1+c^2)(1+\beta^2) &= x^2(1+b^2)(1+\gamma^2) \end{aligned}\right\}.$$

Um die zweite Gleichung dieses Paars zu erfüllen, beachten wir, d das Produkt zweier Quadratsummen selbst Quadratsumme ist, u erhalten:

$$(1-c\beta)^2 + (c+\beta)^2 = (x + x\gamma b)^2 + (x\gamma - xb)^2,$$

woraus folgt:

$$\left.\begin{aligned} 1 - c\beta &= x + x\gamma b \\ c+\beta &= x\gamma - xb \end{aligned}\right\}.$$

Demgemäß erfüllen wir die Gleichung (1), wenn wir das folgende Gleichungssystem erfüllen:

$$\left\{\begin{array}{c} c\beta = \gamma b x^2 \\ 1 - c\beta = x + x\gamma b \\ c + \beta = x\gamma - xb \end{array}\right\}.$$

Aus der ersten und zweiten Gleichung dieses Systems folgt zunächst:

(2) $$\gamma b = \frac{1-x}{x(1+x)}.$$

Ferner folgt durch Elimination von c:

$$b = \frac{(x\gamma - \beta)\beta}{(x\gamma + \beta)x}.$$

Nun bezeichnen wir $\frac{x\gamma - \beta}{x\gamma + \beta}$ mit y, sodaß, wenn x, β, γ als rational vorausgesetzt ist, auch y rational ist. Dann erhalten wir:

(3) $$\frac{\beta}{\gamma} = \frac{x(1-y)}{1+y},$$

(4) $$\frac{b}{\beta} = \frac{y}{x}.$$

Daraus folgt:

(5) $$\frac{b}{\gamma} = \frac{y(1-y)}{1+y}.$$

Hiernach lassen sich die Quadrate der gesuchten rationalen Zahlen durch x und y ausdrücken, nämlich:

(6) $$\left\{\begin{array}{l} b^2 = \frac{1-x}{x(1+x)} \cdot \frac{y(1-y)}{1+y} \\ \gamma^2 = \frac{1-x}{x(1+x)} \cdot \frac{1+y}{y(1-y)} \\ \beta^2 = \frac{x(1-x)}{1+x} \cdot \frac{1-y}{y(1+y)} \\ c^2 = \frac{x(1-x)}{1+x} \cdot \frac{y(1+y)}{1-y} \end{array}\right\}.$$

Es handelt sich also nur noch darum, die in diesen vier Gleichungen rechts stehenden x und y enthaltenden Ausdrücke zu Quadraten von rationalen Zahlen zu machen. Dies ist auf dreifache Weise möglich, nämlich:

A) indem man $y = 1 - x$ oder $x = 1 - y$ setzt,

B) indem man $y = 1 + x$ oder $x = y - 1$ setzt,

C) indem man $x(1+x)(1-x) = y(1+y)(1-y)$ setzt.

Hiernach ergeben sich nun drei verschiedene Wege, um die Sinusformel

$$\frac{\sin b}{\sin \beta} = \frac{\sin c}{\sin \gamma}$$

so zu erfüllen, daß nicht allein $\sin b$, $\sin\beta$, $\sin c$, $\sin\gamma$, sondern $\cos b$, $\cos\beta$, $\cos c$, $\cos\gamma$ rationale Zahlen werden. Diese drei V verfolgen wir nun einzeln:

A) Wenn $y = 1 - x$ ist, so erhalten wir aus (6):

$$b^2 = \frac{(1-x)^2}{(1+x)(2-x)},$$

$$\gamma^2 = \frac{2-x}{x^2(1+x)},$$

$$\beta^2 = \frac{x^2}{(1+x)(2-x)},$$

$$c^2 = \frac{(1-x)^2(2-x)}{1+x}.$$

Wir haben daher nur $\frac{2-x}{1+x}$ gleich v^2 zu setzen, um zu erreic daß b, γ, β, c sich rational durch v ausdrücken lassen. Zunächs halten wir:

$$x = \frac{2-v^2}{1+v^2}$$

und dann:

$$1 + x = \frac{3}{1+v^2}, \qquad 1 - x = \frac{2v^2-1}{1+v^2},$$

sodaß sich ergibt:

$$(7) \qquad \begin{cases} b = \dfrac{2v^2-1}{3v}, \\ \beta = \dfrac{2-v^2}{3v}, \\ c = \dfrac{(2v^2-1)v}{1+v^2}, \\ \gamma = \dfrac{v(1+v^2)}{2-v^2}. \end{cases}$$

Nach § 1 ergibt sich hiernach:

$$(8) \qquad \begin{cases} \sin b = \dfrac{6v(2v^2-1)}{(4v^2+1)(v^2+1)}, \\ \sin\beta = \dfrac{6v(2-v^2)}{(v^2+1)(v^2+4)}, \\ \sin c = \dfrac{2v(1+v^2)(2v^2-1)}{(4v^2+1)(v^4-v^2+1)}, \\ \sin\gamma = \dfrac{2v(1+v^2)(2-v^2)}{(v^2+4)(v^4-v^2+1)}. \end{cases}$$

Eine Bestätigung der Berechnung erhalten wir dadurch, daß und $\frac{\sin c}{\sin\gamma}$ denselben Ausdruck ergibt, nämlich:

$$\frac{\sin b}{\sin\beta} = \frac{\sin c}{\sin\gamma} = \frac{(2v^2-1)(v^2+4)}{(2-v^2)(4v^2+1)}.$$

ür jede rationale Zahl v findet man nun aus (7) eine Gruppe von tionalen Werten für b, β, c, γ, d. h. für $\operatorname{tg}\frac{b}{2}$, $\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}$, $\operatorname{tg}\frac{c}{2}$, $\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}$ und raus nach § 1 auch für a und α, d. h. $\operatorname{tg}\frac{a}{2}$ und $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$. Wie dann e übrigen trigonometrischen Funktionen der sechs Stücke eines iefwinkligen sphärischen Dreiecks sich ergeben, geht auch aus § 1 vor. Als Beispiel wählen wir $v = 3$. Dadurch erhält man:

$$\sin b = \tfrac{153}{185}, \qquad \sin\beta = \tfrac{63}{65},$$
$$\sin c = \tfrac{1020}{2701}, \qquad \sin\gamma = \tfrac{420}{949},$$
$$\sin a = \tfrac{663}{905}, \qquad \sin\alpha = \tfrac{777}{905}.$$

B $\frac{\sin b}{\sin\beta} = \frac{\sin c}{\sin\gamma} = \frac{\sin a}{\sin\alpha} = \frac{221}{259}$ ist, liefert eine Bestätigung.

B) Wenn $y = 1 + x$ ist, so erhalten wir aus (6):

$$b^2 = \frac{x-1}{2+x},$$
$$\gamma^2 = \frac{x-1}{2+x}\cdot\frac{(x+2)^2}{(1+x)^2\cdot x^2},$$
$$\beta^2 = \frac{x-1}{2+x}\cdot\frac{x^2}{(1+x)^2}, \qquad c^2 = \frac{x-1}{2+x}\cdot(2+x)^2.$$

s der ersten dieser drei Gleichungen läßt sich x durch b^2 aus- icken, die drei andern ergeben dann γ, β, c ausgedrückt durch b. an darf also hier b als beliebige rationale Zahl annehmen. Dann ält man γ, β, c als rationale Zahlen dem gewählten Werte von b zugeordnet, daß

$$\frac{2b}{1+b^2}\cdot\frac{2\gamma}{1+\gamma^2} = \frac{2c}{1+c^2}\cdot\frac{2\beta}{1+\beta^2}$$

, oder, was dasselbe ist, daß

$$\frac{\sin b}{\sin\beta} = \frac{\sin c}{\sin\gamma}$$

. Zunächst ergibt sich:

$$x = \frac{1+2b^2}{1-b^2},$$

d dann:

$$1 + x = \frac{2+b^2}{1-b^2}, \qquad 2 + x = \frac{3}{1-b^2}.$$

raus folgt:

$$\beta = \frac{b(1+2b^2)}{2+b^2}, \qquad c = \frac{3b}{1-b^2}, \qquad \gamma = \frac{3b(1-b^2)}{(1+2b^2)(2+b^2)}.$$

ergibt sich allgemein:

$$\sin b = \frac{2b}{1+b^2}, \qquad \sin\beta = \frac{2b(1+2b^2)(2+b^2)}{(1+b^2)(4+b^2+4b^4)},$$
$$\sin c = \frac{6b(1-b^2)}{1+7b^2+b^4}, \qquad \sin\gamma = \frac{6b(1-b^2)(1+2b^2)(2+b^2)}{(1+7b^2+b^4)(4+b^2+4b^4)}.$$

Als Zahlenbeispiel wählen wir $b = 3$. Dadurch erhält man:

$$\sin b = \tfrac{3}{5}, \qquad \sin\beta = \tfrac{627}{1685}, \qquad \sin c = \tfrac{144}{145}, \qquad \sin\gamma = \tfrac{30096}{48865}.$$

Die Berechnung wird bestätigt durch:

$$\frac{\sin b}{\sin\beta} = \frac{\sin c}{\sin\gamma} = \tfrac{337}{209}.$$

Für a und α erhält man dann durch die in § 1 erwähnte Formel:

$$a = \tfrac{165}{337}, \qquad \alpha = \tfrac{95}{363}$$

sodaß

$$\sin a = \tfrac{55605}{70397}, \qquad \sin\alpha = \tfrac{84485}{70397}$$

ist. In der Tat ist:

$$\frac{\sin a}{\sin\alpha} \text{ auch gleich } \tfrac{337}{209}.$$

C) Der dritte Weg, um die in (6) rechts stehenden Produkte zu Quadraten rationaler Zahlen zu machen, besteht darin, daß man:

$$x(1-x^2) = y(1-y^2) \tag{10}$$

setzt. Diese Bedingungsgleichung wird erfüllt, wenn $x = y$ ist. Dann müßte aber $b = \beta$, $c = \gamma$ sein, ein Fall, den wir als trivial ausschließen. Aus (10) folgt:

$$x - x^3 = y - y^3$$

oder:

$$(x-y)(x^2 + xy + y^2) = 1,$$

und, da wir $x = y$ ausschließen:

$$x^2 + xy + y^2 = 1. \tag{11}$$

Andrerseits erhält man aus (6):

$$b = \frac{1-x}{1+y}, \quad \beta = \frac{1-y}{1+x}, \quad \gamma = \frac{1+y}{1+x}\cdot\frac{1}{x}, \quad c = \frac{1+y}{1+x}\cdot y. \tag{12}$$

Da die ersten beiden Gleichungen in (12) für x und für y ersten Grades werden, so lassen sich x und y in diesem dritten Falle rational durch b und β ausdrücken. Man erhält:

$$x = \frac{b\beta + 1 - 2b}{1 - b\beta}, \qquad y = \frac{b\beta + 1 - 2\beta}{1 - b\beta}. \tag{13}$$

Zwischen x und y besteht aber die Bedingungsgleichung (11). Um sie zu erfüllen, setzen wir in:

$$x(x+y) = (1+y)(1-y)$$

die in (13) genannten Ausdrücke ein, multiplizieren mit $(1-b\beta)^2$ und erhalten:

$$[b\beta + 1 - 2b]\cdot[2(1-b)(1-\beta)] = [2-2\beta][2\beta - 2\beta b]. \tag{14}$$

Wenn wir nun die trivialen Lösungen $b = 1$ und $\beta = 1$ ausschließen, erhalten wir aus (14) die einfache Bedingungsgleichung:

$$1 + b\beta = 2b + 2\beta. \tag{15}$$

Dadurch wird aus (13) einfacher:

$$x = \frac{2\beta}{1-b\beta}, \qquad y = \frac{2b}{1-b\beta}.$$

Endlich ergeben sich mit Benutzung von (15) für γ und c:

$$\gamma = \frac{1-\beta}{1-b} \cdot \frac{1-b-\beta}{\beta}; \tag{16}$$

$$c = \frac{1-\beta}{1-b} \cdot \frac{b}{1-b-\beta}. \tag{17}$$

Auf diesem dritten Wege C) wird man also eine der beiden Größen b oder β, wir wählen β, als rationale Zahl annehmen, dann durch (15) b bestimmen, indem man

$$b = \frac{1-2\beta}{2-\beta} \tag{18}$$

setzt, dann aus (16) und (17) γ und c bestimmen und endlich a und α berechnen aus:

$$a = \frac{b-c}{\beta-\gamma} \cdot \frac{\beta+\gamma}{1+bc} \quad \text{und} \quad \alpha = \frac{b-c}{\beta-\gamma} \cdot \frac{1+\beta\gamma}{b+c}. \tag{19}$$

Beispielsweise setzen wir $\beta = \frac{1}{3}$, erhalten dann aus (18) $b = \frac{1}{5}$, darauf aus (17) $c = \frac{5}{14}$, aus (16) $\gamma = \frac{7}{6}$, endlich aus (19) $a = \frac{33}{125}$ und $\alpha = \frac{55}{117}$. So erhält man die Sinusse:

$$\sin b = \tfrac{5}{13}, \quad \sin c = \tfrac{140}{221}, \quad \sin a = \tfrac{4125}{8557},$$
$$\sin \beta = \tfrac{3}{5}, \quad \sin \gamma = \tfrac{84}{85}, \quad \sin \alpha = \tfrac{6435}{8557}.$$

Die Berechnung wird bestätigt durch:

$$\frac{\sin b}{\sin \beta} = \frac{\sin c}{\sin \gamma} = \frac{\sin a}{\sin \alpha} = \frac{25}{39}. \tag{20}$$

Da dieser Weg C besonders geeignet ist, um zu rationalen Werten für $\sin b$, $\sin \beta$, $\sin c$, $\sin \gamma$ zu gelangen, die mit kleinen Zahlen ausdrückbar sind, so fügen wir noch ein Beispiel hinzu.

Für $\beta = 4$, kommt aus (18) $b = \frac{7}{2}$, dann aus (16) und (17) $c = \frac{42}{65}$, $\gamma = \frac{39}{20}$. Darauf erhält man:

$$\sin b = \tfrac{28}{53}, \quad \sin \beta = \tfrac{8}{17},$$
$$\sin c = \tfrac{5460}{5989}, \quad \sin \gamma = \tfrac{1560}{1921}.$$

In der Tat ist $\frac{\sin b}{\sin \beta} = \frac{\sin c}{\sin \gamma} = \frac{119}{106}$.

§ 5. Wege, um aus einer Lösung durch Umformung unzäh viele neue Lösungen abzuleiten.

Die in § 4 beschriebenen Wege lösten die Gleichung:

$$\sin c \cdot \sin \beta = \sin b \cdot \sin \gamma \tag{1}$$

oder, was bei gesuchten rationalen Zahlen auf dasselbe hinauskom

$$\frac{c \cdot \beta}{(1+c^2)(1+\beta^2)} = \frac{b \cdot \gamma}{(1+b^2)(1+\gamma^2)}. \tag{2}$$

Nun ist aber:

$$\sin \vartheta = \frac{2 \cdot \operatorname{tg} \frac{\vartheta}{2}}{1+\operatorname{tg}^2 \frac{\vartheta}{2}} = \frac{2 : \operatorname{tg} \frac{\vartheta}{2}}{1+1 : \operatorname{tg}^2 \frac{\vartheta}{2}},$$

wo wieder $\operatorname{tg} \frac{\vartheta}{2}$ durch ϑ zu ersetzen ist. Aus jeder richtigen Lös von (2), wie es nach § 4:

$$\beta = \tfrac{1}{3}, \qquad b = \tfrac{1}{5}, \qquad c = \tfrac{5}{14}, \qquad \gamma = \tfrac{7}{6}$$

war, entsteht also dadurch eine richtige Lösung von (1), daß n von den gefundenen vier Zahlen irgend welche in ihre rezipro Werte verwandelt. Dadurch erhalten zwar $\sin c$, $\sin \beta$, $\sin b$, s denselben Wert, wohl aber können sich durch die Formeln:

$$a = \frac{b-c}{\beta-\gamma} \cdot \frac{\beta+\gamma}{1+bc} \qquad \text{und} \qquad \alpha = \frac{b-c}{\beta-\gamma} \cdot \frac{1+\beta\gamma}{b+c} \tag{3}$$

für a und α und deshalb auch für $\sin a$ und $\sin \alpha$ neue Lösun ergeben, falls man die vier für eine Lösung gefundenen ration Zahlen teilweise in die reziproken Werte verwandelt. Dabei dü β, b, c, γ oder a und α auch paarweise negativ sein. Da es schl lich auf die Erfüllung der Gleichung:

$$\frac{\sin b}{\sin \beta} = \frac{\sin c}{\sin \gamma} = \frac{\sin a}{\sin \alpha} \tag{4}$$

ankommt, so ist es praktisch, jeden der vier Sinusse $\sin b$, $\sin \beta$, s $\sin \gamma$ durch eine Klammer zu ersetzen, welche den für die Berechn von a und α zu wählenden Wert von b, β, c, γ einschließt. So wi die Gleichung (20) von § 4 zu ersetzen sein durch:

$$\frac{\left(\frac{1}{5}\right)}{\left(\frac{1}{3}\right)} = \frac{\left(\frac{5}{14}\right)}{\left(\frac{7}{6}\right)} = \frac{\left(\frac{33}{125}\right)}{\left(\frac{55}{117}\right)}. \tag{5}$$

Ferner findet man auf dem dritten der drei in § 4 angegebe Wege aus $\beta = -2$, $b = \frac{5}{4}$, $c = -\frac{60}{7}$, $\gamma = \frac{21}{2}$ und daraus:

$$\frac{\left(\frac{5}{4}\right)}{(2)} = \frac{\left(\frac{60}{7}\right)}{\left(\frac{21}{2}\right)} = \frac{\left(\frac{125}{136}\right)}{\left(\frac{164}{85}\right)}. \tag{6}$$

Eine neue Lösung für a und α findet man nun aus (6), wenn man $\beta = 2$ in $\beta = \frac{1}{2}$ verwandelt, nämlich:

$$(7) \qquad \frac{\left(\frac{5}{4}\right)}{\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{\left(\frac{60}{7}\right)}{\left(\frac{21}{2}\right)} = \frac{\left(\frac{11}{16}\right)}{\left(\frac{41}{88}\right)}.$$

Da $\beta = +3$ zu $b = +5$ und dann zu $c = \frac{5}{14}$, $\gamma = \frac{7}{6}$ führt und demnach schon in § 4 behandelt ist, so wählen wir noch $\beta = -3$, wodurch wir zu einer ganz andern Lösung gelangen, nämlich zu:

$$(8) \qquad \frac{\left(\frac{7}{5}\right)}{(3)} = \frac{\left(\frac{70}{13}\right)}{\left(\frac{26}{3}\right)} = \frac{\left(\frac{49}{51}\right)}{\left(\frac{333}{119}\right)}.$$

Um die Fruchtbarkeit dieser Methode zu zeigen, welche von einer Lösung zu unzählig vielen neuen Lösungen führt, gehen wir von $\beta = +3$ aus. Dadurch gelangen wir zunächst zu der Lösung, die zu derselben Sinusproportion führt, wie (5), nämlich zu:

$$(9) \qquad \frac{(5)}{(3)} = \frac{\left(\frac{5}{14}\right)}{\left(\frac{7}{6}\right)} = \frac{\left(\frac{125}{33}\right)}{\left(\frac{117}{55}\right)}.$$

Indem wir nun $\frac{7}{6}$ in $\frac{6}{7}$ verwandeln, erhalten wir die neue Lösung:

$$(10) \qquad \frac{(5)}{(3)} = \frac{\left(\frac{5}{14}\right)}{\left(\frac{6}{7}\right)} = \frac{\left(\frac{1}{3}\right)}{\left(\frac{13}{9}\right)}.$$

Aus (9) erhalten wir durch Vertauschung der inneren Glieder der Proportion ferner:

$$(11) \qquad \frac{(5)}{\left(\frac{5}{14}\right)} = \frac{(3)}{\left(\frac{7}{6}\right)} = \frac{\left(\frac{4}{17}\right)}{\left(\frac{7}{16}\right)},$$

und, indem wir wieder $\frac{7}{6}$ in $\frac{6}{7}$ verwandeln:

$$(12) \qquad \frac{(5)}{\left(\frac{5}{14}\right)} = \frac{(3)}{\left(\frac{6}{7}\right)} = \frac{\left(\frac{17}{56}\right)}{\left(\frac{32}{49}\right)}.$$

Nun betrachten wir in (11) den zweiten und dritten Quotienten als Ausgangspunkte, indem wir $b = 3$, $\beta = \frac{17}{4}$, $c = \frac{6}{7}$, $\gamma = \frac{7}{16}$ setzen, wodurch wir die folgende neue Lösung erhalten:

$$(13) \qquad \frac{(3)}{\left(\frac{17}{4}\right)} = \frac{\left(\frac{6}{7}\right)}{\left(\frac{7}{16}\right)} = \frac{\left(\frac{45}{61}\right)}{\left(\frac{5}{12}\right)}.$$

Dann wählen wir aus (11) den ersten und dritten Quotienten, indem wir sowohl die Glieder der Proportion umstellen, wie auch drei von den in Klammern gesetzten rationalen Zahlen reziprok setzen. So erhalten wir:

$$(14) \qquad \frac{\left(\frac{14}{5}\right)}{\left(\frac{7}{16}\right)} = \frac{\left(\frac{1}{5}\right)}{\left(\frac{17}{4}\right)} = \frac{\left(\frac{125}{61}\right)}{\left(\frac{13}{20}\right)}.$$

Endlich erhalten wir aus (14), indem wir den zweiten und dritten Quotienten als Ausgangspunkt wählen:

$$(15) \qquad \frac{\left(\frac{1}{5}\right)}{\left(\frac{17}{4}\right)} = \frac{\left(\frac{61}{195}\right)}{\left(\frac{12}{20}\right)} = \frac{\left(\frac{5}{14}\right)}{\left(\frac{7}{16}\right)}.$$

Das Beispiel (15) liefert eine Bestätigung, da es dieselbe Sinusgleichung liefert wie (14).

Liste von Zahlbeispielen.

I (§ 4, A):

$\sin b = \frac{153}{185}$,	$\cos b = \frac{104}{185}$
$\sin \beta = \frac{63}{65}$,	$\cos \beta = \frac{16}{65}$
$\sin c = \frac{1020}{2701}$,	$\cos c = \frac{2501}{2701}$
$\sin \gamma = \frac{420}{949}$,	$\cos \gamma = \frac{851}{949}$
$\sin a = \frac{663}{905}$,	$\cos a = \frac{616}{905}$
$\sin \alpha = \frac{777}{905}$,	$\cos \alpha = \frac{464}{905}$

II (§ 5, 5):

$\sin b = \frac{5}{13}$,	$\cos b = \frac{12}{13}$
$\sin \beta = \frac{3}{5}$,	$\cos \beta = \frac{4}{5}$
$\sin c = \frac{140}{221}$,	$\cos c = \frac{171}{221}$
$\sin \gamma = \frac{84}{85}$,	$\cos \gamma = \frac{13}{85}$
$\sin a = \frac{4125}{8357}$,	$\cos a = \frac{7868}{8357}$
$\sin \alpha = \frac{6435}{8357}$,	$\cos \alpha = \frac{5332}{8357}$

III (§ 5, 6):

$\sin b = \frac{40}{41}$,	$\cos b = \frac{9}{41}$
$\sin \beta = \frac{4}{5}$,	$\cos \beta = \frac{3}{5}$
$\sin c = \frac{840}{3649}$,	$\cos c = \frac{3551}{3649}$
$\sin \gamma = \frac{84}{445}$,	$\cos \gamma = \frac{437}{445}$
$\sin a = \frac{34000}{34121}$,	$\cos a = \frac{2871}{34121}$
$\sin \alpha = \frac{27880}{34121}$,	$\cos \alpha = \frac{19671}{34121}$

IV (§ 5, 7):

$\sin b = \frac{40}{41}$,	$\cos b = \frac{9}{41}$
$\sin \beta = \frac{4}{5}$,	$\cos \beta = \frac{3}{5}$
$\sin c = \frac{840}{3649}$,	$\cos c = \frac{3551}{3649}$
$\sin \gamma = \frac{84}{445}$,	$\cos \gamma = \frac{437}{445}$
$\sin a = \frac{352}{377}$,	$\cos a = \frac{135}{377}$
$\sin \alpha = \frac{7216}{9425}$,	$\cos \alpha = \frac{11223}{9425}$

V (§ 5, 10):

$\sin b = \frac{5}{13}$,	$\cos b = \frac{12}{13}$
$\sin \beta = \frac{3}{5}$,	$\cos \beta = \frac{4}{5}$
$\sin c = \frac{140}{221}$,	$\cos c = \frac{171}{221}$
$\sin \gamma = \frac{84}{85}$,	$\cos \gamma = \frac{13}{85}$
$\sin a = \frac{3}{5}$,	$\cos a = \frac{4}{5}$
$\sin \alpha = \frac{117}{125}$,	$\cos \alpha = \frac{44}{125}$

VI (§ 5, 11):

$\sin b = \frac{5}{13}$,	$\cos b = \frac{12}{13}$
$\sin \beta = \frac{140}{221}$,	$\cos \beta = \frac{171}{221}$
$\sin c = \frac{3}{5}$,	$\cos c = \frac{4}{5}$
$\sin \gamma = \frac{84}{85}$,	$\cos \gamma = \frac{13}{85}$
$\sin a = \frac{136}{305}$,	$\cos a = \frac{273}{305}$
$\sin \alpha = \frac{224}{305}$,	$\cos \alpha = \frac{207}{305}$

VII (§ 5, 12):

$= \frac{5}{13}$,	$\cos b = \frac{12}{13}$
$= \frac{140}{221}$,	$\cos\beta = \frac{171}{221}$
$= \frac{3}{5}$,	$\cos c = \frac{4}{5}$
$= \frac{84}{85}$,	$\cos\gamma = \frac{13}{85}$
$= \frac{1904}{3425}$,	$\cos a = \frac{2847}{3425}$
$= \frac{3136}{3425}$,	$\cos\alpha = \frac{1377}{3425}$

VIII (§ 5, 13):

$\sin b = \frac{3}{5}$,	$\cos b = \frac{4}{5}$
$\sin\beta = \frac{136}{305}$,	$\cos\beta = \frac{273}{305}$
$\sin c = \frac{84}{85}$,	$\cos c = \frac{13}{85}$
$\sin\gamma = \frac{224}{305}$,	$\cos\gamma = \frac{207}{305}$
$\sin a = \frac{2745}{2873}$,	$\cos a = \frac{848}{2873}$
$\sin\alpha = \frac{120}{169}$,	$\cos\alpha = \frac{119}{169}$

IX (§ 5, 14):

$= \frac{140}{221}$,	$\cos b = \frac{171}{221}$
$= \frac{224}{305}$,	$\cos\beta = \frac{207}{305}$
$= \frac{5}{13}$,	$\cos c = \frac{12}{13}$
$= \frac{136}{305}$,	$\cos\gamma = \frac{273}{305}$
$= \frac{7625}{9673}$,	$\cos a = \frac{5952}{9673}$
$= \frac{520}{569}$,	$\cos\alpha = \frac{231}{569}$

X (§ 5, 15):

$\sin b = \frac{5}{13}$,	$\cos b = \frac{12}{13}$
$\sin\beta = \frac{136}{305}$,	$\cos\beta = \frac{273}{305}$
$\sin c = \frac{7625}{9673}$,	$\cos c = \frac{5952}{9673}$
$\sin\gamma = \frac{520}{569}$,	$\cos\gamma = \frac{231}{569}$
$\sin a = \frac{140}{221}$,	$\cos a = \frac{171}{221}$
$\sin\alpha = \frac{224}{305}$,	$\cos\alpha = \frac{207}{305}$

hier geschilderte Weg, um von einer Lösung zu unzählig uen Lösungen zu gelangen, nahm als Ausgangspunkt eine e Lösung. Man kann jedoch auch von einer trivialen Lösung und aus dieser durch die Formeln (3) neue nicht triviale i finden. Man hat dabei den Vorteil, daß man nicht wie in ur eine der vier Größen b, β, c, γ willkürlich wählen kann, zwei, wie etwa b und β. Beispielsweise gehe man von der Lösung:

$$\frac{(b)}{(\beta)} = \frac{\left(\frac{1}{b}\right)}{\left(\frac{1}{\beta}\right)}$$

an findet man:

$$a = \frac{b^2-1}{\beta^2-1}\cdot\frac{\beta^2+1}{2b} \quad \text{und} \quad \alpha = \frac{b^2-1}{\beta^2-1}\cdot\frac{2\beta}{b^2+1}.$$

bt für $b=3$, $\beta=2$, $\sin b = \frac{3}{5}$, $\sin\beta = \frac{4}{5}$, $\sin a = \frac{360}{481}$, $\sin\alpha = \frac{480}{481}$. zuletzt genannte Weg führt auch zu Tetraedern, deren sechs leren vier Grenzflächen und deren Volumen zugleich ganzzahlig s erste Tetraeder solcher Art fand Herr Güntsche-Berlin im -Jahnckeschen Archiv (1906). Das Tetraeder, das der Verıd, hat viel kleinere ganze Zahlen. Dasselbe hat zu Kanten: 175, $BC = 3400$, $CA = 1739$; $OA = 3500$, $OB = 2125$, $OC = 3315$ und zur Höhe auf ABC, $h = 1260$.

nburg, Dezember 1906. Schubert.

Über einige merkwürdige zahlentheoretische Beziehungen zwische der Verteilung gewisser Quadratzahlen und den Summenausdrücke durch welche die Klassenzahl der binären quadratischen Form mit negativer Determinante dargestellt wird.

Von H. Teege.

An vielen Stellen seiner monumentalen arithmetischen Unte suchungen, namentlich in den Selbstanzeigen seiner kleineren A handlungen dieser Art kommt Gauß auf eine besondere Eigentümlichke der höheren Arithmetik zu sprechen und hebt es als etwas ga Charakteristisches hervor, daß so viele ihrer schönsten Sätze m größter Leichtigkeit durch Induktion gefunden werden können, der Beweise jedoch nichts weniger als nahe liegen, sondern erst mit Hil tiefeindringender Untersuchungen und glücklicher Kombinationen au gespürt werden können. Sehr oft tritt dabei noch die merkwürdi Erscheinung ein, daß gegen alle Erwartung sich der Aufschluß a einem scheinbar ganz fremden Gebiete findet, das fernab liegt v dem zuerst betretenen. So scheint auch der einfache Satz, der d Hauptinhalt der folgenden Ausführungen ausmachen wird, daß nämli für eine jede ungerade Zahl P ohne quadratischen Teiler die Anza der Quadratzahlen bis $\left(\frac{P-1}{2}\right)^2$, deren kleinste Reste mod. P klein als $\frac{P}{2}$ sind, wenn nicht gerade gleich, regelmäßig größer ist a die Anzahl der Quadratzahlen, deren kleinste Reste mod. P größ als $\frac{P}{2}$ sind, seinem ganzen Inhalte nach durchaus im Gebiete des En lichen zu liegen, nichts desto weniger ist, wie die Dinge augenblickli liegen, zu seinem Beweise die Zuhilfenahme unendlicher Prozesse e forderlich, und es scheint mir ungemein schwer zu sein, unter Ve meidung derselben zu einem vollständig befriedigenden Beweise gelangen. Dagegen sind Verkettungen des Satzes mit andern Teil der höheren Arithmetik, die ihn eigentlich erst interessant mache viel leichter aufzufinden.

Zunächst wollen wir solche Zusammenhänge durch Induktio abzuleiten versuchen. Für eine Primzahl p erhält man bekanntli alle quadratischen Reste, indem man die kleinsten Reste aller Quadra zahlen bis $\left(\frac{p-1}{2}\right)^2$ mod. p bildet, und man sieht so leicht ein, da für Primzahlen von der Form $4n+3$, für welche nach Legendr

Bezeichnung $\left(\frac{p-\alpha}{p}\right) = -\left(\frac{\alpha}{p}\right)$ ist, die Zahl der Quadratzahlen, deren kleinste Reste mod. p kleiner als $\frac{p}{2}$ sind, die Zahl der andern um

$$\sum_{1}^{\frac{p-1}{2}} \left(\frac{\alpha}{p}\right)$$

übertrifft, wo die α also alle ganzen Zahlen von 1 bis $\frac{p-1}{2}$ bedeuten.

Auf zusammengesetzte Zahlen P, die wir hier wie im folgenden ohne quadratischen Teiler annehmen wollen, läßt sich aber, wenn wir auch an Stelle des Legendreschen Zeichens das Jacobische setzen, der Satz nicht ohne weiteres ausdehnen. So ist z. B. für $P = 15$ die Differenz zwischen der Anzahl der Quadratzahlen mit Resten kleiner als $\frac{P}{2}$ und der Anzahl der Quadratzahlen mit Resten größer als $\frac{P}{2}$ gleich 3, während $\sum_{1}^{7} \left(\frac{\alpha}{15}\right) = 2$ ist. Ebenso ist

für 21 die obige Differenz in der Anzahl der Quadratzahlen gleich 2,
während $\sum_{1}^{10} \left(\frac{\alpha}{21}\right) = 0$ ist,

für 33 die obige Differenz in der Anzahl der Quadratzahlen gleich 4,
während $\sum_{1}^{16} \left(\frac{\alpha}{33}\right) = 0$,

für 35 die obige Differenz in der Anzahl der Quadratzahlen gleich 7,
während $\sum_{1}^{17} \left(\frac{\alpha}{35}\right) = 6$,

für 39 die obige Differenz in der Anzahl der Quadratzahlen gleich 5,
während $\sum_{1}^{19} \left(\frac{\alpha}{39}\right) = 4$,

für 51 die obige Differenz in der Anzahl der Quadratzahlen gleich 7,
während $\sum_{1}^{25} \left(\frac{\alpha}{51}\right) = 6$,

für 55 die obige Differenz in der Anzahl der Quadratzahlen gleich 7,
während $\sum_{1}^{27} \left(\frac{\alpha}{55}\right) = 4$,

für 57 die obige Differenz in der Anzahl der Quadratzahlen gleich 4,

während $\sum_{1}^{28}\left(\frac{\alpha}{57}\right) = 0,$

für 105 die obige Differenz in der Anzahl der Quadratzahlen gleich 10,

während $\sum_{1}^{52}\left(\frac{\alpha}{105}\right) = 0,$

für 195 die obige Differenz in der Anzahl der Quadratzahlen gleich 19,

während $\sum_{1}^{97}\left(\frac{\alpha}{195}\right) = 12,$

für 255 die obige Differenz in der Anzahl der Quadratzahlen gleich 21,

während $\sum_{1}^{127}\left(\frac{\alpha}{255}\right) = 12,$

usw.

Eine leichte Induktion ergibt nun sofort den einfachen und eleganten Satz, daß für jede ungerade Zahl P ohne quadratischen Teiler die Anzahl der Quadratzahlen bis $\left(\frac{P-1}{2}\right)^2$, deren kleinster Rest mod. P kleiner als $\frac{P}{2}$ ist, die Zahl der andern um die Summe

$$\sum_{1}^{\frac{P_1-1}{2}}\left(\frac{\alpha}{P_1}\right) + \sum_{1}^{\frac{P_2-1}{2}}\left(\frac{\alpha}{P_2}\right) + \sum_{1}^{\frac{P_3-1}{2}}\left(\frac{\alpha}{P_3}\right) + \cdots$$

übertrifft, wo P_1, P_2, P_3 ... sämtliche Teiler von P (mit Ausschluß von 1) bedeuten.

Der kürzeste Beweis für diese Beziehung scheint mir der folgende zu sein.

Aus Gauß' Abhandlung: Summatio quarundam serierum singularium ist bekannt, daß

$$\sum_{k=1}^{k=P}\sin\left(k^2\,\frac{2\frac{m}{\nu}\pi}{\frac{P}{\nu}}\right) = \left(\frac{\frac{m}{\nu}}{\frac{P}{\nu}}\right)\sqrt{\nu P}, \quad \text{wenn } \frac{P}{\nu} \text{ die Form } 4n+3 \text{ hat},$$

$$= 0, \quad \text{wenn } \frac{P}{\nu} \text{ die Form } 4n+1 \text{ hat.}$$

Dabei muß überall die in der Formel angedeutete Teilung mit ν, dem größten gemeinschaftlichen Teiler von m und P, ausgeführt werden, während weiter unter $\left(\frac{\frac{m}{\nu}}{\frac{P}{\nu}}\right)$ das Jacobische Symbol zu verstehen ist.

Ferner wird in der Lehre von den Fourierschen Reihen bewiesen, daß innerhalb der Grenzen 0 und π mit Ausschluß dieser die Beziehung besteht

$$\frac{\pi}{4} = \frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \frac{\sin 7x}{7} + \cdots,$$

sodaß sich, wenn ε_k die positive oder negative Einheit bedeutet, jenachdem k^2 mod. P einen kleinsten Rest kleiner oder größer als $\frac{P}{2}$ hat, folgende Gleichungen ergeben:

$$\varepsilon_1 \frac{\pi}{4} = \sin\frac{2\pi}{P} + \tfrac{1}{3}\sin\frac{6\pi}{P} + \tfrac{1}{5}\sin\frac{10\pi}{P} + \tfrac{1}{7}\sin\frac{14\pi}{P} + \cdots$$

$$\varepsilon_2 \frac{\pi}{4} = \sin 4\frac{2\pi}{P} + \tfrac{1}{3}\sin 4\frac{6\pi}{P} + \tfrac{1}{5}\sin 4\frac{10\pi}{P} + \tfrac{1}{7}\sin 4\frac{14\pi}{P} + \cdots$$

$$\varepsilon_3 \frac{\pi}{4} = \sin 9\frac{2\pi}{P} + \tfrac{1}{3}\sin 9\frac{6\pi}{P} + \tfrac{1}{5}\sin 9\frac{10\pi}{P} + \tfrac{1}{7}\sin 9\frac{14\pi}{P} + \cdots$$

$$\varepsilon_4 \frac{\pi}{4} = \sin 16\frac{2\pi}{P} + \tfrac{1}{3}\sin 16\frac{6\pi}{P} + \tfrac{1}{5}\sin 16\frac{10\pi}{P} + \tfrac{1}{7}\sin 16\frac{14\pi}{P} + \cdots$$

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

$$\varepsilon_{P-1} \frac{\pi}{4} = \sin (P-1)^2\frac{2\pi}{P} + \tfrac{1}{3}\sin (P-1)^2\frac{6\pi}{P} + \tfrac{1}{5}\sin (P-1)^2\frac{10\pi}{P} + \tfrac{1}{7}\sin (P-1)^2\frac{14\pi}{P} + \cdots$$

$$\varepsilon_P \frac{\pi}{4} = \sin P^2\frac{2\pi}{P} + \tfrac{1}{3}\sin P^2\frac{6\pi}{P} + \tfrac{1}{5}\sin P^2\frac{10\pi}{P} + \tfrac{1}{7}\sin P^2\frac{14\pi}{P} + \cdots$$

Die Summation aller ergibt dann

$$\frac{\pi}{2}\sum_{k=1}^{k=\frac{P-1}{2}} \varepsilon_k = \frac{\sqrt{P}}{1} + \left(\frac{3}{P}\right)\frac{\sqrt{P}}{3} + \left(\frac{5}{P}\right)\frac{\sqrt{P}}{5} + \cdots,$$

wo das allgemeine Glied der unendlichen Reihe $\left(\frac{m}{\frac{\nu}{P}}\right)\sqrt{\nu P}$ ist, sodaß die Summe rechter Hand auch geschrieben werden kann

$$\frac{\pi}{2}\sum_{k=1}^{k=\frac{P-1}{2}} \varepsilon_k = \sum_{m=1}^{m=\infty}\left(\frac{m}{\frac{\nu}{P}}\right)\frac{\sqrt{\nu P}}{m}.$$

Für m sind nur alle diejenigen ungeraden Zahlen zu nehmen, für welche $\frac{P}{\nu}$ die Form $4n+3$ hat.

Bezeichnen nun $P_1, P_2, P_3, \ldots P$ die sämtlichen Teiler von P, unter denen wieder alle von der Form $4n+1$ ausgelassen werden können, und faßt man in der obigen Summe alle Glieder mit solchen m zusammen, deren ν gleich 1 ist, so erhält man

$$\sum_{m=1}^{m=\infty}\left(\frac{m}{P}\right)\frac{\sqrt{P}}{m},$$

wo also die m nur die sämtlichen ungeraden relativen Primzahlen zu P durchlaufen, welche Summe aber, wie z. B mit Hilfe der Fourierschen Reihen leicht nachgewiesen werden kann, gleich

$$\frac{\pi}{2}\sum_{\alpha=1}^{\alpha=\frac{P-1}{2}}\left(\frac{\alpha}{P}\right)$$

ist; faßt man aber sämtliche Glieder zusammen, deren ν gleich P_1 ist, so erhält man eine Summe

$$\sum_{\frac{m}{P_1}=1}^{\frac{m}{P_1}=\infty}\left(\frac{\frac{m}{P_1}}{\frac{P}{P_1}}\right)\frac{\sqrt{P_1\cdot P}}{m},$$

oder wenn man $\frac{m}{P_1}=n$ setzt,

$$\sum_{n=1}^{n=\infty}\left(\frac{n}{\left(\frac{P}{P_1}\right)}\right)\frac{\sqrt{\frac{P}{P_1}}}{n},$$

wo wieder die n sämtliche ungeraden relativen Primzahlen zu $\frac{P}{P_1}$ durchlaufen, welche Summe nun gleich

$$\frac{\pi}{2}\sum_{1}^{\frac{1}{2}\left(\frac{P}{P_1}-1\right)}\left(\frac{\alpha}{\left(\frac{P}{P_1}\right)}\right)$$

ist usw.

Indem man ebenso mit den übrigen Teilern $P_2, P_3 \ldots$ verfährt, erhält man als Schlußresultat

$$\text{(I)}\qquad \sum_{k=1}^{k=\frac{P-1}{2}}\varepsilon_k=\sum_{1}^{\frac{P_1-1}{2}}\left(\frac{\alpha}{P_1}\right)+\sum_{1}^{\frac{P_2-1}{2}}\left(\frac{\alpha}{P_2}\right)+\sum_{1}^{\frac{P_3-1}{2}}\left(\frac{\alpha}{P_3}\right)+\cdots\sum_{1}^{\frac{P-1}{2}}\left(\frac{\alpha}{P}\right),$$

worin der zu beweisende Satz besteht.

So sind z. B. 3, 15, 51, 255 sämtliche Teiler $P_1, P_2, P_3 \ldots$ von $P=255$, welche die Form $4n+3$ haben. Unter den erst

127 Quadratzahlen gibt es nun 74, deren kleinste Reste mod. 255 kleiner als 127 sind, und 53, für welche dieser Rest größer als 127 ist, sodaß $\sum_{k=1}^{k=127} \varepsilon_k = 21$ ist. Ferner ist $\sum_{1}^{1} \left(\frac{\alpha}{3}\right) = 1$, $\sum_{1}^{7} \left(\frac{\alpha}{15}\right) = 2$, $\sum_{1}^{25} \left(\frac{\alpha}{51}\right) = 6$, $\sum_{1}^{127} \left(\frac{\alpha}{255}\right) = 12$, und wirklich ist

$$21 = 1 + 2 + 6 + 12.$$

Der Satz läßt sich unmittelbar auf Zahlen $P = 4n + 1$ übertragen: es scheidet dann nur unter den Teilern P_1, P_2, P_3 ..., welche die Form $4n + 3$ haben sollen, die Zahl P aus.

Eine neue Beziehung läßt sich aber durch ein dem vorhergehenden ganz analoges Verfahren ableiten unter Benutzung der Gleichung

$$\sum_{k=1}^{k=P} \cos\left(k^2 \frac{2\frac{m}{\nu}\pi}{\frac{P}{\nu}}\right) = \left(\frac{\frac{m}{\nu}}{\frac{P}{\nu}}\right)\sqrt{\nu P}, \quad \text{wenn } \frac{P}{\nu} = 4n + 1,$$

$$= 0, \quad \text{wenn } \frac{P}{\nu} = 4n + 3,$$

(ν größter gemeinschaftlicher Teiler von m und P), und der Fourierschen Reihe

$$\frac{\pi}{4} = \frac{\cos x}{1} - \frac{\cos 3x}{3} + \frac{\cos 5x}{5} - \frac{\cos 7x}{7} + \cdots \quad \text{für alle } x \text{ von } 0 \text{ bis } \frac{\pi}{2}$$

und von $\frac{3\pi}{2}$ bis 2π,

$$-\frac{\pi}{4} = \frac{\cos x}{1} - \frac{\cos 3x}{3} + \frac{\cos 5x}{5} - \frac{\cos 7x}{7} + \cdots \quad \text{für alle } x \text{ von } \frac{\pi}{2} \text{ bis } \pi$$

und von π bis $\frac{3\pi}{2}$.

Man erhält zunächst, wenn jetzt unter ε_k die positive Einheit verstanden wird, falls k^2 einen zwischen 0 und $\frac{P}{4}$ oder $\frac{3P}{4}$ und P liegenden kleinsten Rest mod. P besitzt, dagegen die negative Einheit, falls dieser Rest zwischen $\frac{P}{4}$ und $\frac{3P}{4}$ liegt, die Beziehung

$$\frac{\pi}{4}\left(1 + 2\sum_{k=1}^{k=\frac{P-1}{2}} \varepsilon_k\right) = \sum_{m=1}^{m=\infty} (-1)^{\frac{m-1}{2}} \left(\frac{\frac{m}{\nu}}{\frac{P}{\nu}}\right) \frac{\sqrt{\nu \cdot P}}{m},$$

in der man nur diejenigen ungeraden m zu nehmen braucht, deren größter gemeinschaftlicher Teiler ν mit P so beschaffen ist, daß $\frac{P}{\nu}$ die Form $4n + 1$ hat.

Führt man nun in ähnlicher Weise wie früher die auf der rechten Seite angedeutete Summation aus, so hat man bei der Ableitung des Schlußresultates zwei Fälle zu unterscheiden.

Ist $P = 4n + 1$, so ergibt sich

$$\text{(II)}\quad \tfrac{1}{2}\sum_{k=1}^{k=\frac{P-1}{2}} \varepsilon_k = \sum_{1}^{\frac{P_1-1}{4}} \left(\frac{\alpha}{P_1}\right) + \sum_{1}^{\frac{P_2-1}{4}} \left(\frac{\alpha}{P_2}\right) + \sum_{1}^{\frac{P_3-1}{4}} \left(\frac{\alpha}{P_3}\right) + \cdots \sum_{1}^{\frac{P-1}{4}} \left(\frac{\alpha}{P}\right),$$

wo $P_1, P_2, P_3 \ldots P$ sämtliche Teiler von P bedeuten mit Ausschluß von 1, welche die Form $4n + 1$ haben.

So ist z. B. für $P = 105$

die Zahl der Quadrate mit Resten zwischen 1—26 gleich 18,
„ „ „ „ „ „ „ 27—52 gleich 13,
„ „ „ „ „ „ „ 53—78 gleich 6,
„ „ „ „ „ „ „ 79—104 gleich 15.

Ferner ist $\sum_{1}^{26} \left(\frac{\alpha}{105}\right) = 4$, $\sum_{1}^{5} \left(\frac{\alpha}{21}\right) = 2$, $\sum_{1}^{1} \left(\frac{\alpha}{5}\right) = 1$, und tatsächlich ist

$$\tfrac{1}{2}(18 + 15 - 13 - 6) = 4 + 2 + 1.$$

Ist dagegen $P = 4n + 3$, so wird

$$\text{(III)}\quad -\sum_{k=1}^{k=\frac{P-1}{2}} \varepsilon_k = 2\left[\sum_{1}^{\frac{P_1-3}{4}} \left(\frac{\alpha}{P_1}\right) + \sum_{1}^{\frac{P_2-3}{4}} \left(\frac{\alpha}{P_2}\right) + \sum_{1}^{\frac{P_3-3}{4}} \left(\frac{\alpha}{P_3}\right) + \cdots\right] + 1,$$

wo $P_1, P_2, P_3 \ldots$ sämtliche Teiler von P sind mit Ausschluß von 1, welche die Form $4n + 1$ haben.

Als Erläuterung diene das Beispiel $P = 255$. Unter den ersten 127 Quadratzahlen gibt es

Quadrate mit Resten zwischen 1—63 im ganzen 36,
„ „ „ „ 64—127 „ „ 38,
„ „ „ „ 128—191 „ „ 31,
„ „ „ „ 192—254 „ „ 22,

während $\sum_{1}^{21} \left(\frac{\alpha}{85}\right) = 2$, $\sum_{1}^{4} \left(\frac{\alpha}{17}\right) = 2$ und $\sum_{1}^{1} \left(\frac{\alpha}{5}\right) = 1$ ist.

Der Gleichung (III) entsprechend besteht nun tatsächlich die Beziehung

$$-(36 + 22 - 38 - 31) = 2(2 + 2 + 1) + 1.$$

Diese Beziehungen (I)—(III) sind nun die einfachsten, die man it Hilfe der Fourierschen Reihen ableiten kann. Natürlich wird an sie auch auf rein arithmetischem Wege beweisen können; aber möge an dieser Stelle noch ausdrücklich hervorgehoben werden, ß ohne Zuhilfenahme von unendlichen Prozessen der Beweis für n wesentlich positiven Charakter eines jeden der rechts stehenden mmenausdrücke bislang noch nicht erbracht worden ist. Es würde o einen ganz erheblichen Fortschritt auf zahlentheoretischem Gete bedeuten, wenn auf rein arithmetischem Wege bewiesen werden rde, daß die linken Seiten der Formeln (I)—(III) einen durchaus sitiven Wert haben.

Noch möge zum Schluß auf eine merkwürdige bei der Induktion machte Beobachtung hingewiesen werden. Bekanntlich hängen die chts stehenden Summenausdrücke eng mit der Klassenzahl der nären quadratischen Formen mit negativer Determinante zusammen, d schon Gauß macht in seinen Disq. arithm., art. 303, auf eine it gehende Induktion gestützt die Bemerkung, daß die Reihen der gativen Determinanten, denen eine gegebene Anzahl von Klassen tspricht, stets abzubrechen scheinen, was um so auffallender ist, als s, wie Dirichlet in seiner Abhandlung: Sur une propriété des mes quadratiques à déterminant positif[1]) nachgewiesen hat, für sitive Determinanten durchaus nicht der Fall ist.

Da nun alle Bemühungen, darunter wahrscheinlich auch die richlets, — man lese in dieser Hinsicht die Bemerkung am hlusse der eben zitierten Abhandlung nach —, jenen von Gauß r negative Determinanten gefundenen Satz als richtig nachzuweisen, eines Wissens bis jetzt vergeblich gewesen sind, so dürfte es vielcht nicht als überflüssig erscheinen, wenn hier noch kurz einige it diesem Gegenstand in Verbindung stehende Bemerkungen beifügt werden. Der Einfachheit wegen ziehen wir nur Zahlen P von r Form $4n + 3$ in Betracht, die keinen quadratischen Teiler besitzen.

1) Da

$$\sum_{1}^{\frac{P-1}{2}} \left(\frac{\alpha}{P}\right) \alpha = \begin{cases} 0, & \text{wenn } P = 8n + 7, \\ > 0, & \text{wenn } P = 8n + 3, \end{cases}$$

sollte man erwarten, daß auch

$$\sum_{1}^{\frac{P-1}{2}} \left(\frac{\alpha}{P}\right) \alpha^2, \quad \sum_{1}^{\frac{P-1}{2}} \left(\frac{\alpha}{P}\right) \alpha^3, \quad \sum_{1}^{\frac{P-1}{2}} \left(\frac{\alpha}{P}\right) \alpha^4 \quad \text{usw.}$$

1) Werke II, pag. 198 ff.

positive Werte haben. Dies ist aber jedenfalls für

$$\sum_{1}^{\frac{P-1}{2}} \left(\frac{\alpha}{P}\right) \alpha^3$$

nicht mehr der Fall, denn für $P = 163$ ist die Summe der Kuben aller quadratischen Reste, die kleiner als $\frac{P}{2}$ sind, gleich 5 348 342, während die Summe der Kuben aller Nichtreste, die $\frac{P}{2}$ nicht überschreiten, gleich 5 680 699 ist. Die obige Summe hat also in diesem Falle den negativen Wert $-$ 332 357.

2) Der kleinste mögliche Wert für

$$\frac{\sum_{1}^{\frac{P-1}{2}} \left(\frac{\alpha}{P}\right)}{\sqrt{P}},$$

wo $P = 4n + 3$ ist, scheint 0,2349782 . . zu sein, und zwar tritt dies ein für $P = 163$; jedenfalls kommt unter 12 000 und daher wahrscheinlich auch über 12 000 kein kleinerer Wert vor.

3) Eine ziemlich weit gehende Induktion scheint wahrscheinlich zu machen, daß ($P = 8n + 3$)

$$-\sum_{1}^{\frac{P-3}{4}} \left(\frac{\alpha}{P}\right) \alpha + \sum_{\frac{P+1}{4}}^{\frac{P-1}{2}} \left(\frac{\alpha}{P}\right) \alpha$$

stets positiv ist. Man beachte zu diesem Zwecke die folgende kleine Tabelle:

P	$\sum_{1}^{\frac{P-3}{4}} \left(\frac{\alpha}{P}\right) \alpha$	$\sum_{\frac{P+1}{4}}^{\frac{P-1}{2}} \left(\frac{\alpha}{P}\right) \alpha$	P	$\sum_{1}^{\frac{P-3}{4}} \left(\frac{\alpha}{P}\right) \alpha$	$\sum_{\frac{P+1}{4}}^{\frac{P-1}{2}} \left(\frac{\alpha}{P}\right) \alpha$
11	-1	12	107	-31	352
19	0	19	131	-94	749
35	-8	78	139	-9	426
43	5	38	163	76	87
59	-23	200	179	-11	422
67	14	53	331	117	876
83	-30	279	907	859	1862

Trifft die vermutete Beziehung allgemein zu, so kann man für Zahlen $P = 8n + 3$ auf folgende Weise leicht eine untere Grenze für den Ausdruck

$$\sum_{1}^{\frac{P-1}{2}} \left(\frac{\alpha}{P}\right)$$

ableiten. Es ist

$$\frac{\sin x}{1} - \frac{\sin 3x}{3^2} + \frac{\sin 5x}{5^2} - \frac{\sin 7x}{7^2} + \cdots = \begin{cases} \frac{x\pi}{4}, & \text{wenn } x \text{ zwischen } 0 \text{ und } \frac{\pi}{2}, \\ \frac{\pi^2}{4} - \frac{x\pi}{4}, & \text{wenn } x \text{ zwischen } \frac{\pi}{2} \text{ und } \pi. \end{cases}$$

Setzt man nun x der Reihe nach gleich $\frac{2\pi}{P}, \frac{4\pi}{P}, \frac{6\pi}{P}, \cdots \frac{(P-1)\pi}{P}$, multipliziert alsdann die so entstandenen Reihen die erste mit $\left(\frac{1}{P}\right)$, die zweite mit $\left(\frac{2}{P}\right)$, die dritte mit $\left(\frac{3}{P}\right)$ usw. und addiert endlich die untereinander stehenden Kolumnen, so ergibt sich nach einigen leichteren Reduktionen

$$\sum_{1}^{\frac{P-3}{4}} \left(\frac{\alpha}{P}\right)\alpha - \sum_{\frac{P+1}{4}}^{\frac{P-1}{2}} \left(\frac{\alpha}{P}\right)\alpha + \frac{P}{2}\sum_{1}^{\frac{P-1}{2}} \left(\frac{\alpha}{P}\right) = \frac{s \cdot P\sqrt{P}}{\pi^2},$$

wo $s = 1 - \left(\frac{3}{P}\right)\frac{1}{3^2} + \left(\frac{5}{P}\right)\frac{1}{5^2} - \left(\frac{7}{P}\right)\frac{1}{7^2} + \cdots$ ist.

Ist nun

$$\sum_{1}^{\frac{P-3}{4}} \left(\frac{\alpha}{P}\right)\alpha - \sum_{\frac{P+1}{4}}^{\frac{P-1}{2}} \left(\frac{\alpha}{P}\right)\alpha$$

stets negativ, so ist

$$\frac{\sum_{1}^{\frac{P-1}{2}} \left(\frac{\alpha}{P}\right)}{\sqrt{P}} > \frac{2s}{\pi^2} > 0{,}16124.$$

Dieses Resultat würde den obigen von Gauß gefundenen Satz enthalten.

4) Eliminiert man aus der leicht zu beweisenden Gleichung ($P = 8n + 3$)

$$\sum_{1}^{\frac{P-3}{4}} \left(\frac{\alpha}{P}\right)\alpha + \sum_{\frac{P+1}{4}}^{\frac{P-1}{2}} \left(\frac{\alpha}{P}\right)\alpha = \frac{P}{3}\sum_{1}^{\frac{P-1}{2}} \left(\frac{\alpha}{P}\right)$$

und der oben gefundenen

$$\sum_{1}^{\frac{P-3}{4}}\left(\frac{\alpha}{P}\right)\alpha-\sum_{\frac{P+1}{4}}^{\frac{P-1}{2}}\left(\frac{\alpha}{P}\right)\alpha+\frac{P}{2}\sum_{1}^{\frac{P-1}{2}}\left(\frac{\alpha}{P}\right)=\frac{s\cdot P\sqrt{P}}{\pi^2},$$

den Ausdruck

$$\sum_{1}^{\frac{P-1}{2}}\left(\frac{\alpha}{P}\right),$$

so erhält man

$$5\sum_{1}^{\frac{P-3}{4}}\left(\frac{\alpha}{P}\right)\alpha+\sum_{\frac{P+1}{4}}^{\frac{P-1}{2}}\left(\frac{\alpha}{P}\right)\alpha=\frac{2sP\sqrt{P}}{\pi^2}>0{,}16124\,P\sqrt{P},$$

welche Beziehung, die ich übrigens nirgendwo aufgeführt gefunden habe, somit in aller Strenge bewiesen ist.

Über die Konstitution der imprimitiven Körper sechsten Grades.

Von O. Pund.

Die Untersuchung der Konstitution der imprimitiven Körper sechsten Grades läßt sich fast ohne jede Rechnung soweit durchführen, daß die zu ihnen gehörigen Gruppen auch durch bestimmte algebraische Eigenschaften erkannt werden können, die dann auch ihrerseits umgekehrt die Gruppen eindeutig bestimmen. Dazu ist es notwendig, die wesentlichen Eigenschaften der hier auftretenden Gruppen festzustellen. Ich habe deswegen die möglichen Gruppen, obwohl dies schon anderswo geschehen ist,[1]) hier nochmals hergeleitet, aber nach

1) Die beiden umfassendsten Gruppen sind zuerst von Luther (Journal für Mathematik Bd. 37, 1848, S. 193) bestimmt worden. Durch eine direkte Methode hat Burnside (Theory of Groups, London 1897, S. 180) die sämtlichen imprimitiven und transitiven Permutationsgruppen von 6 Elementen hergeleitet; dabei ist durch ein Versehen eine Gruppe von 12. Ordnung aufgeführt, die nicht existiert. Die erste richtige Aufzählung der Gruppen findet sich bei Glaue (Dissertation, Königsberg 1899) auf Grund der Cayleyschen Tabelle für alle Permutationsgruppen von 6 Elementen; hier ist auch die Frage nach der Konstitution durch die Bestimmung der Formen aller doppelt imprimitiven Gleichungen sechsten Grades zuerst in Angriff genommen.

nem neuen Verfahren, das ganz unabhängig von der Darstellung er Gruppen in Gestalt von Permutationen ist und nur die abstrakten oraussetzungen der allgemeinen Gruppentheorie benutzt, aber deswegen gerade die charakteristischen Eigenschaften der Gruppen schon ei der Ableitung erkennen läßt.

Den Ausgangspunkt für die Untersuchung bildet der folgende tz: Die hinreichende und notwendige Bedingung dafür, aß eine Gruppe G die Gruppe eines Körpers vom Grade n t, besteht darin, daß sie eine Untergruppe H vom Index n esitzt, die keine Hauptuntergruppe von G enthält (die Identät natürlich ausgenommen). Wenn nun ein Körper sechsten Grades primitiv ist, so muß er entweder einen kubischen oder einen quatischen Unterkörper oder beide zugleich enthalten. Wir werden n letzten Fall der doppelt imprimitiven Körper in der Behandlung n den beiden Fällen der kubisch und quadratisch imprimitiven örper trennen. Die Eigenschaft der Imprimitivität läßt sich in die ussage umsetzen, daß die Gruppe G dann noch eine Untergruppe m Index 3 oder 2 besitzen muß, die die vorhergenannte Gruppe H Untergruppe enthält. Die hier angegebene Bedeutung von G und H ll in der folgenden Untersuchung durchweg festgehalten werden.

Wenn eine Gruppe P eine Untergruppe Q vom Index 2 besitzt, so die letztere auch stets eine Hauptuntergruppe von P, wie sich cht zeigen läßt. Wenn jedoch 3 der Index von P ist, so ist die ziehung der beiden Gruppen zueinander nicht so einfach. Sie soll her zunächst untersucht werden.

Hilfsatz aus der Gruppentheorie.

Wir nehmen also an, daß die in der Gruppe P enthaltene Unterppe Q vom Index 3 aus den n verschiedenen Elementen

$$\sigma_0 = 1,\ \sigma_1,\ \sigma_2,\ \ldots\ \sigma_{n-1}$$

stehe. Greifen wir dann aus P ein nicht in Q enthaltenes Element τ raus, so sind bekanntlich die Elemente der Reihe

$$\tau,\ \sigma_1\tau,\ \sigma_2\tau,\ \ldots\ \sigma_{n-1}\tau$$

neinander verschieden und nicht in Q, aber in P enthalten. Es ßt sich zeigen, daß sie nicht alle in bezug auf Q von der Ordnung 2 in können, d. h. daß die Beziehung

$$(\sigma_i\tau)^2 = \sigma_i\tau\sigma_i\tau = \sigma_i'$$

wo σ_i' in Q enthalten ist, nicht für jedes i von 0 bis $n-1$ bestehen kann. Denn daraus würde

$$\sigma_i\tau\sigma_k\tau = \sigma_i\bar{\sigma}_k\sigma_k\tau\sigma_k\tau = \sigma_i\bar{\sigma}_k\sigma_k'$$

$$\sigma_i\tau\sigma_k = \sigma_i\tau\sigma_k\tau\bar{\tau} = \sigma_i\bar{\sigma}_k\sigma_k'\bar{\sigma}_0'\tau$$

folgen, also wären die Produkte je zweier Elemente aus den beiden hingeschriebenen Reihen wieder in einer der Reihen enthalten, und ihr Komplex würde also eine Gruppe von der Ordnung $2n$ sein. Das ist aber unmöglich, da eine Gruppe von der Ordnung $3n$ keine Untergruppe von der Ordnung $2n$ enthalten kann. Wir können daher stets aus P ein Element β auswählen, das in bezug auf Q die Ordnung 3 hat, und dann lassen sich alle nicht in Q enthaltenen Elemente von P durch die beiden Reihen

$$\beta,\ \sigma_1\beta,\ \sigma_2\beta,\ \ldots\ \sigma_{n-1}\beta \tag{2}$$

$$\bar{\beta},\ \sigma_1\bar{\beta},\ \sigma_2\bar{\beta},\ \ldots\ \sigma_{n-1}\bar{\beta} \tag{3}$$

zur Darstellung bringen. Alle zu Q konjugierten Gruppen müssen aus Q durch Transformation mit β und $\bar{\beta}$ hervorgehen, wir bezeichnen die entstehenden Gruppen mit Q_1 und Q_2, so daß also Q_1 aus den Elementen

$$1,\ \bar{\beta}\sigma_1\beta,\ \bar{\beta}\sigma_2\beta,\ \ldots\ \bar{\beta}\sigma_{n-1}\beta,$$

Q_2 aus

$$1,\ \beta\sigma_1\bar{\beta},\ \beta\sigma_2\bar{\beta},\ \ldots\ \beta\sigma_{n-1}\bar{\beta}$$

besteht. Q_1 kann nur Elemente der Reihen (1) und (3), Q_2 nur solche aus (1) und (2) enthalten. Alle gemeinschaftlichen Elemente von Q_1 und Q_2 sind also auch in Q enthalten. Wenn ferner ein Element σ in Q und Q_1 enthalten ist, so ist $\bar{\beta}\sigma\beta$ in Q_1 und Q_2, also in Q und daher σ in Q_2 enthalten. Ebenso folgt, daß jedes gemeinschaftliche Element von Q und Q_2 auch Q_1 angehört. Deswegen haben je zwei der drei Gruppen Q, Q_1, Q_2 dieselben gemeinschaftlichen Elemente und diese bilden eine in der Gruppe P enthaltene Hauptuntergruppe R. In ihr ist auch β^3 enthalten. Ihre Elemente bezeichnen wir mit

$$1,\ \alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots\ \alpha_{r-1}.$$

Wenn nun Q nicht mit R zusammenfällt, so enthält es noch einige nicht in R vorhandene Elemente

$$\gamma,\ \gamma_1,\ \gamma_2,\ \ldots$$

Ist γ_i ein solches Element, so muß $\bar{\beta}\gamma_i\beta$ ein Element der Reihe (3), $\beta\gamma_i\beta$ ein solches der Reihe (2) sein. Daraus folgt, daß $\bar{\beta}\gamma_i\bar{\beta}$ und $\beta\gamma_i\beta$ in Q enthalten sind. Wenn noch ein anderes Element γ_k hinzu ge-

nommen wird, so ergibt sich weiter, daß $\gamma_i\gamma_k$ in R enthalten ist; denn $\bar{\beta}\gamma_i\bar{\beta}$ und $\beta\gamma_k\beta$ sind in Q enthalten, also auch ihr Produkt $\bar{\beta}\gamma_i\gamma_k\beta$, also gehört das Element $\gamma_i\gamma_k$ sowohl der Gruppe Q als der Gruppe Q_2 an, und ist demnach in R enthalten. Wenn also überhaupt ein Element γ von Q nicht in R enthalten ist, so gibt es keine andern Elemente derselben Art als die folgenden

$$\gamma,\ \alpha_1\gamma,\ \alpha_2\gamma,\ \ldots\ \alpha_{r-1}\gamma\,.$$

Der Index von R in Q hat also den Wert 2, und wir erhalten folgenden Satz:

Wenn eine Gruppe P eine Untergruppe Q vom Index 3 besitzt, so ist diese entweder eine Hauptuntergruppe, oder sie gehört einem System von 3 konjugierten Gruppen Q, Q_1, Q_2 an, die je eine Hauptuntergruppe R vom Index 2 besitzen. Diese Gruppe hat dann also in P den Index 6 und ist auch in ihr Hauptuntergruppe. Wenn man sie durch das Element β erweitert, so erhält man daher eine Hauptuntergruppe S von P mit dem Index 2, die natürlich ihrerseits ebenfalls R als Hauptuntergruppe mit dem Index 3 enthält. Um die Gruppen bilden zu können, ist noch die Bemerkung von Vorteil, daß nicht nur β^3, γ^2, sondern auch $(\beta\gamma)^2$ in R enthalten ist.

Doppelt imprimitive Körper.

Sie sind vollständig dadurch charakterisiert, daß sich zwischen ihrer Gruppe G und der Gruppe H zwei Gruppen K und L einschalten lassen, von denen die eine den Index 2, die andere den Index 3 hat. Hieraus ergibt sich sofort, daß H alle gemeinschaftlichen Elemente von K und L enthält, denn alle gemeinschaftlichen Elemente von K und L bilden jedenfalls eine Gruppe, die H enthält; nun lassen sich aber zwischen K und H sowohl als zwischen L und H keine Gruppen einschalten, da die Indizes von H in bezug auf beide Gruppen Primzahlen (3 bzw. 2) sind. L kann nun in bezug auf G ein doppeltes Verhalten darbieten.

1) Ist L eine Hauptuntergruppe von G, so muß auch H als gemeinschaftliche Gruppe zweier Hauptuntergruppen von G wieder eine Hauptuntergruppe von G sein und sich demgemäß auf das identische Element reduzieren. Somit ist G eine Gruppe von der Ordnung 6, die eine Hauptuntergruppe K von der Ordnung 3 und eine solche L von der Ordnung 2 enthält. Eine solche Gruppe ist aber eine

(I) zyklische Gruppe von der Ordnung 6.

2) Ist aber die Gruppe L keine Hauptuntergruppe von G, so enthält G noch 2 konjugierte Gruppen L_1, L_2, die eine Gruppe M vom Index 2 gemeinsam haben, die dann nicht nur in L, sondern auch in G Hauptuntergruppe ist. Diese kann mit K keine Elemente (außer dem identischen) gemeinsam haben, da solche auch in H und den mit ihr in G konjugierten Gruppen enthalten sein müßten. Demnach sind die Elemente der beiden Gruppen K und M gegeneinander vertauschbar und liefern durch Zusammensetzung eine in G enthaltene Hauptuntergruppe von der Ordnung $3n^2$, wenn n die Ordnung von H ist. Da dann G aber die Ordnung $6n$ hat, so muß $6n$ durch $3n^2$ teilbar, n also ein Teiler von 2 sein. Das gibt zwei Fälle.

Ist $n = 1$, so reduzieren sich H und M auf die Identität und G wird eine Gruppe von der Ordnung 6 mit einer Hauptuntergruppe K von der Ordnung 3 und 3 voneinander verschiedenen konjugierten Gruppen H, H_1, H_2 von der Ordnung 2. Es gibt nur eine einzige solche Gruppe, sie wird als

(II) Diedergruppe von der Ordnung 6

bezeichnet.

Ist $n = 2$, so ist K eine Gruppe von der Ordnung 6 mit 3 voneinander verschiedenen konjugierten Gruppen H von der Ordnung 2, also eine Diedergruppe 6. Grades. G ist eine Gruppe von der Ordnung 12, die diese enthält, und es gibt nur eine einzige Gruppe, die diese Eigenschaft hat. Wir denken uns nämlich die Diedergruppe durch zwei Elemente α und β von den Ordnungen 3 und 2 dargestellt, zwischen denen dann die Beziehung

$$(\alpha\beta)^2 = 1$$

bestehen muß. Ist dann γ ein nicht in K enthaltenes Element von G, so sind $\bar{\gamma}\alpha\gamma$ und $\bar{\gamma}\beta\gamma$ wieder Elemente der Diedergruppe von den Ordnungen 3 und 2, also in den Formen

$$\bar{\gamma}\alpha\gamma = \alpha^a, \quad \bar{\gamma}\beta\gamma = \alpha^b\beta$$

darstellbar, wo $a^2 \equiv 1\,(3)$ ist. Diese Relationen gestalten wir nun durch eine andere Wahl von γ so um, daß

$$a \equiv 1, \quad b \equiv 0\,(3)$$

wird, indem wir es bei $a \equiv 1\,(3)$ durch $\alpha^{-b}\gamma$, bei $a \equiv -1\,(3)$ durch $\alpha^{-b}\beta\gamma$ ersetzen. Dann ist γ mit α und β, also mit allen Elementen von K vertauschbar, und ebenso γ^2. Da letzteres aber ein Element von K sein muß, und es außer der Identität kein Element in K gibt,

s mit allen vertauschbar ist, so muß γ die Ordnung 2 besitzen. ir können die entstehende Gruppe als eine

II) erweiterte Diedergruppe von der Ordnung 12

zeichnen.

Die Konstitution der zu diesen Gruppen gehörenden Körper läßt ch nun auf folgende Weise bestimmen.

Da unsere Körper alle einen kubischen Unterkörper besitzen, so trachten wir zunächst die diesem entsprechende Untergruppe K om Index 3. Bei der zyklischen Gruppe (I) ist sie eine Haupt-ntergruppe, bei den andern beiden Gruppen dagegen nicht. Daher st der kubische Unterkörper im Falle (I) im Rationalitätsbereich in Galoisscher Körper. Das wird aber daran erkannt, daß seine Diskriminante ein vollständiges Quadrat im Rationalitäts-ereich ist. Ist die Gruppe des Körpers dagegen die Dieder-ruppe (II) oder die erweiterte Diedergruppe (III), so ist die Diskriminante des kubischen Unterkörpers kein vollständiges uadrat im Rationalitätsbereich. Der Galoissche Körper dieses tzteren entsteht erst durch Adjunktion eines quadratischen Körpers. ie diesem Galoisschen Körper entsprechende Gruppe ist als die größte emeinschaftliche Untergruppe des Systemes konjugierter Gruppen , K_1, K_2 definiert. Im Falle der Diedergruppe (II) reduziert sich ese Untergruppe auf die Identität, im Falle der erweiterten Dieder-ruppe erhalten wir die Gruppe $(1, \gamma)$. Der im Galoisschen Körper nthaltene quadratische Körper muß nun einer Gruppe vom Index 2 n G entsprechen, die die zuletzt erhaltene Gruppe als Untergruppe hat. ei der Gruppe (II) erhalten wir die zyklische Gruppe L als die dem uadratischen Unterkörper entsprechende Gruppe. Dagegen ergibt ich bei der Gruppe (III) eine von L verschiedene (zyklische) Gruppe

$$(1, \alpha, \alpha^2, \gamma, \alpha\gamma, \alpha^2\gamma).$$

a nun die Diskriminante eines kubischen Körpers mit der Dis-riminante des in seinem Galoisschen Körper enthaltenen quadra-schen Körpers übereinstimmt, und die Äquivalenz zweier quadratischer örper daran erkannt wird, daß das Produkt ihrer Diskriminanten n vollständiges Quadrat im Rationalitätsbereich ist, so ergibt sich lgendes Kriterium: Das Produkt der Diskriminanten des ku-ischen und des quadratischen Unterkörpers ist ein voll-tändiges Quadrat im Rationalitätsbereich, wenn die Gruppe nseres Körpers die Diedergruppe ist, dagegen nicht, falls ie erweiterte Diedergruppe vorliegt.

Daß die soeben angegebenen Merkmale auch umgekehrt auf die verschiedenen drei Gruppen führen, ist nun ohne Schwierigkeit erkennbar. Ist die Diskriminante des kubischen Unterkörpers ein vollständiges Quadrat, so besitzt dieser eine zyklische Transformationsgruppe von der Ordnung 3. Da nun der quadratische Unterkörper eine Transformation von der Ordnung 2 hat, und diese mit den zyklischen Transformationen vertauschbar ist, weil die beiden Körper keine andern Größen als die des Rationalitätsbereiches gemeinsam haben, so entsteht durch ihre Zusammensetzung eine zyklische Gruppe (I) von der Ordnung 6. Ist die Diskriminante des kubischen Unterkörpers dagegen kein Quadrat, so besitzt dieser Körper als Gruppe eine Diedergruppe von der Ordnung 6. Wenn nun das Produkt der Diskriminanten der beiden Unterkörper ein Quadrat ist, so ist der quadratische Unterkörper in dem Galoisschen Körper des kubischen Unterkörpers enthalten, die Gruppe ändert sich also nicht bei Hinzunahme der Transformation des quadratischen Unterkörpers. Dies ist dagegen der Fall, wenn das angegebene Produkt kein vollständiges Quadrat ist; dann ist aber die Transformation des quadratischen Unterkörpers mit den Transformationen des Galoisschen Körpers vertauschbar, weil beide Körper nur Größen aus dem Rationalitätsbereich gemein haben, also entsteht durch Zusammensetzung mit ihr die Gruppe (III).

Kubisch imprimitive Körper.

Zwischen der Gruppe G und ihrer Untergruppe H läßt sich in diesem Falle eine Gruppe K vom Index 3, aber keine Gruppe vom Index 2 einschalten. G besitzt dann neben H noch zwei weitere konjugierte Gruppen H_1, H_2. Da H Hauptuntergruppe von K ist, so besitzt der Körper sechsten Grades eine automorphe Transformation von der Periode 2, die auch dazu dienen könnte, den kubischen Unterkörper zu finden.

In bezug auf das Verhalten von K zu G unterscheiden wir zwei Hauptfälle.

1) Ist K eine Hauptuntergruppe von G, so sind die drei konjugierten Gruppen H, H_1, H_2 in G in K als Hauptuntergruppen enthalten. Alle drei können kein gemeinschaftliches Element außer der Identität, wohl aber können je zwei von ihnen eine gemeinschaftliche Gruppe enthalten.

a) Es mögen je zwei von ihnen außer der Identität kein gemeinschaftliches Element besitzen. Dann sind die Elemente der drei Gruppen H, H_1, H_2 gegeneinander vertauschbar. Wenn H die Ordnung n hat, so entsteht durch Zusammensetzung je zweier dieser

ruppen eine Gruppe von der Ordnung n^2, die in K enthalten sein uß. Da aber K dann die Ordnung $2n$ hat, so muß n ein Teiler on 2 sein. Da die Annahme $n = 1$ auf einen doppelt imprimitiven örper (mit zyklischer Gruppe) führt, so kommt für uns nur noch $= 2$ in Betracht. K wird dann eine Gruppe von der Ordnung 4, ie drei konjugierte Gruppen von der Ordnung 2 enthält, also eine ogenannte Vierergruppe. G ist also eine Gruppe von der Ordnung 12, die eine Vierergruppe K als Hauptuntergruppe, eren drei Untergruppen H, H_1, H_2 als voneinander verschiedene konjugierte Untergruppen enthält. Es gibt aber ur eine einzige solche Gruppe, wie wir jetzt zeigen wollen. Wir ezeichnen das in H enthaltene Element von der Ordnung 2 mit α; enn dann β ein nicht in K enthaltenes Element von G bedeutet, so ind die entsprechenden Elemente von H_1 und H_2 durch

$$\bar{\beta}\alpha\beta = \alpha_1, \quad \bar{\beta}\alpha_1\beta = \alpha_2$$

egeben, es ist noch

$$\bar{\beta}\alpha_2\beta = \alpha, \quad \alpha\alpha_1\alpha_2 = 1$$

nd β^3 muß in K enthalten sein, kann aber nur einem Elemente der ierergruppe gleich sein, mit dem β vertauschbar ist. Die Beziehung

$$\alpha_1^{i_1}\alpha_2^{i_2}\beta = \beta\alpha_1^{i_1}\alpha_2^{i_2}$$

ann aber nur bestehen, wenn $i_1 \equiv i_2 \equiv 0$ (2) ist. Daher muß β ie Ordnung 3 haben. Die entstehende Gruppe wird als

) Tetraedergruppe (von der Ordnung 12)

ezeichnet.

b) Wenn je zwei von den Gruppen H, H_1, H_2 eine von der lentität verschiedene Untergruppe besitzen, so bezeichnen wir mit L jenige, welche alle gemeinsamen Elemente von H_1 und H_2 enthält. ie dazu in G konjugierten Gruppen nennen wir L_1 und L_2, so daß nn also L_1 alle gemeinsamen Elemente von H und H_2, L_2 die von ! und H_1 enthält. Diese Gruppen haben dann als Hauptuntergruppen n H, H_1, H_2 in K den Index 4. Da H und L ohne gemeinschaftche Elemente und Hauptuntergruppen von K sind, so sind die lemente der einen mit denen der andern vertauschbar, und es entteht durch ihre Zusammensetzung die Gruppe K, da H in K den ndex 2 hat, der durch die Hinzunahme von L nur auf 1 verringert erden kann. L ist daher von der Ordnung 2, H geht aus der Zummensetzung von L_1 und L_2, K auch durch Zusammensetzung aller ei Gruppen hervor und ist von der Ordnung 8. G ist daher eine ruppe von der Ordnung 24, die eine Hauptuntergruppe von

der Ordnung 8 mit lauter vertauschbaren Elementen und in ihr ein System von drei konjugierten Gruppen L, L_1, L_2 von der Ordnung 2 hat. Durch diese Merkmale ist aber die Gruppe bestimmt.

Wir bezeichnen mit α das Element von der Ordnung 2 in L, mit β ein nicht in K enthaltenes von G, dessen dritte Potenz in K enthalten ist, so sind die entsprechenden Elemente von L_1, L_2 durch

$$\bar{\beta}\alpha\beta = \alpha_1, \quad \bar{\beta}\alpha_1\beta = \alpha_2$$

gegeben, und es ist noch

$$\bar{\beta}\alpha_2\beta = \alpha.$$

Hieraus folgt, daß β außer mit der Identität nur noch mit $\alpha\alpha_1\alpha_2$ vertauschbar ist. Es kann daher β^3 nur mit 1 oder $\alpha\alpha_1\alpha_2$ übereinstimmen. Sollte das letztere eintreten, so können wir β durch $\alpha\alpha_1\alpha_2\beta$ ersetzen, dann hat β die Ordnung 3. Da hier β in bezug auf die Elemente $\alpha_1\alpha_2$, $\alpha\alpha_1$, $\alpha\alpha_2$ genau dieselben Eigenschaften hat, wie bei der Gruppe (I) in bezug auf α, α_1, α_2, so können wir unsere Gruppe als eine durch das mit allen vertauschbare Element $\alpha\alpha_1\alpha_2$

(II) erweiterte Tetraedergruppe von der Ordnung 24

bezeichnen.

2) Es sei nun K keine Hauptuntergruppe von G, dann ist die größte gemeinschaftliche Untergruppe L der zu K konjugierten Gruppen eine Hauptuntergruppe in K vom Index 2 und in G vom Index 6, und aus dem letzteren Grunde von H verschieden (es müßte sich sonst H auf die Identität reduzieren, und wir hätten es mit einem doppelt imprimitiven Körper zu tun). Demgemäß enthält K zwei verschiedene Hauptuntergruppen L und H vom Index 2, die größte gemeinschaftliche Untergruppe M dieser letzteren ist daher eine Hauptuntergruppe vom Index 4 in K und von der Identität verschieden. Wäre letzteres nicht der Fall, so hätte L die Ordnung 2, und G enthielte dann eine Diedergruppe von der Ordnung 6 als Untergruppe, was auf den Fall der erweiterten Diedergruppe eines doppelt imprimitiven Körpers führt. Die zu M in G konjugierten Gruppen M_1, M_2 sind nun auch in L enthalten, weil L eine Hauptuntergruppe von G ist. Weil sie aber Untergruppen von H, H_1, H_2 sind, so kann es außer der Identität kein Element geben, das ihnen gemeinschaftlich wäre; es ist aber wohl möglich, daß je zwei von ihnen noch eine gemeinschaftliche Untergruppe enthalten.

a) Es mögen zunächst je zwei der genannten Gruppen ohne gemeinschaftliches Element (außer der Identität) sein, dann sind die

Elemente der einen mit denen der andern Gruppe vertauschbar, und wenn also ihre Ordnung mit n bezeichnet wird, so entsteht durch ihre Zusammensetzung eine in L enthaltene Gruppe von der Ordnung n^2. Da aber L dann die Ordnung $2n$ hat, so muß n ein Teiler von 2 sein; als solcher kommt aber nur 2 selbst in Betracht. Daher wird L eine Vierergruppe, und in G ist daher eine Untergruppe vom Index 2 enthalten, die ihrerseits die Vierergruppe L als Hauptuntergruppe und die in der letzteren enthaltenen Untergruppen M, M_1, M_2 als ein System konjugierter Gruppen enthält, oder kürzer ausgedrückt, G muß eine Tetraedergruppe vom Index 2 enthalten. Wir bezeichnen mit α das Element von der Ordnung 2 in der Gruppe M und mit β ein Element der Tetraedergruppe, das nicht in L enthalten ist, so sind die entsprechenden Elemente von M_1, M_2

$$\bar{\beta}\alpha\beta = \alpha_1, \quad \bar{\beta}\alpha_1\beta = \alpha_2$$

und außerdem muß

$$\bar{\beta}\alpha_2\beta = \alpha, \quad \alpha\alpha_1\alpha_2 = 1$$

sein. Bezeichnen wir nun mit γ ein nicht in der Tetraedergruppe enthaltenes Element von G, so müssen $\bar{\gamma}\alpha_1\gamma$, $\bar{\gamma}\alpha_2\gamma$, $\bar{\gamma}\beta\gamma$ in der Tetraedergruppe enthalten und von den Ordnungen 2, 2, 3 sein. Wir können also setzen

$$\bar{\gamma}\alpha_1\gamma = \alpha_1^a\alpha_2^b$$
$$\bar{\gamma}\alpha_2\gamma = \alpha_1^c\alpha_2^d$$
$$\bar{\gamma}\beta\gamma = \alpha_1^e\alpha_2^f\beta^g$$

wo $ad - bc \equiv 1\,(2)$ und $g^2 \equiv 1\,(3)$ sein muß.

Zunächst läßt sich γ so wählen, daß

$$e \equiv f \equiv 0\,(2)$$

wird. Dazu braucht man nur γ durch $\alpha_1^{i_1}\alpha_2^{i_2}\gamma$ zu ersetzen, wo

$$i_1 \equiv e(b+d) + f(a+c), \quad i_2 \equiv ed + bf\,(2)$$

gesetzt ist. Berücksichtigt man nun, daß die Relationen

$$\alpha_1\beta = \beta\alpha_2, \quad \alpha_2\beta = \beta\alpha_1\alpha_2$$

auch bestehen bleiben müssen, wenn man sie mittels γ transformiert, so erhält man die beiden Systeme

$$g \equiv 1\,(3), \quad a + d \equiv b \equiv c\,(2),$$

und

$$g \equiv 2\,(3), \quad a \equiv d \equiv b + c\,(2),$$

und die Matrix $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ kann also bei $g \equiv 1\,(3)$ die Formen

$$\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right), \quad \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right), \quad \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)^2,$$

bei $g \equiv 2\,(3)$ die Formen

$$\binom{01}{10}, \quad \binom{11}{01} = \binom{01}{10}\binom{01}{11}, \quad \binom{10}{11} = \binom{01}{10}\binom{01}{11}^2$$

annehmen. Da man nun aber, ohne die Relationen der Tetraedergruppe zu ändern, die Elemente α_1, α_2, $\alpha = \alpha_1\alpha_2$ zyklisch vertauschen kann, so kann man stets bewirken, daß die Matrix die Formen

$$\binom{10}{01} \quad \text{oder} \quad \binom{01}{10}$$

hat, je nachdem $g \equiv 1$ oder $g \equiv 2\,(3)$ ist. Im ersteren Falle erhalten wir eine durch ein vertauschbares Element erweiterte Tetraedergruppe, die schon unter (II) gefunden war. Demnach können wir hier annehmen, daß

$$\bar{\gamma}\alpha_1\gamma = \alpha_2, \quad \bar{\gamma}\alpha_2\gamma = \alpha_1, \quad \bar{\gamma}\beta\gamma = \beta^2$$

ist. Da γ^2 in der Tetraedergruppe enthalten und mit β vertauschbar sein muß, γ selbst außer mit der Identität nur noch mit dem Element $\alpha_1\alpha_2$ der Tetraedergruppe, letzteres aber nicht mit β vertauschbar ist, so muß γ die Ordnung 2 besitzen. Wir erhalten also nur eine einzige Gruppe, die auch als

(III) Oktaedergruppe (von der Ordnung 24)

bezeichnet wird.

Um die in der Oktaedergruppe enthaltenen Gruppen H von dem Index 6 zu finden, suchen wir zunächst die Gruppen K auf, in denen sie enthalten sind. Da diese die Vierergruppe

$$L = (1, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_1\alpha_2)$$

und außerdem nur Elemente enthalten darf, die nicht der Tetraedergruppe angehören, da alle diese von der Ordnung 3 sind, so findet man leicht, daß

$$K = (1, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_1\alpha_2, \gamma, \alpha_1\gamma, \alpha_2\gamma, \alpha_1\alpha_2\gamma)$$
$$K_1 = (1, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_1\alpha_2, \beta\gamma, \alpha_1\beta\gamma, \alpha_2\beta\gamma, \alpha_1\alpha_2\beta\gamma)$$
$$K_2 = (1, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_1\alpha_2, \beta^2\gamma, \alpha_1\beta^2\gamma, \alpha_2\beta^2\gamma, \alpha_1\alpha_2\beta^2\gamma)$$

ist. Andere Gruppen kann es nicht geben, weil in ihnen alle 12 nicht in der Tetraedergruppe vorhandenen Elemente vorkommen. H, H_1 und H_2 müssen Untergruppen dieser Gruppen vom Index 2 sein, so zwar, daß sie nur die Gruppen

$$M = (1, \alpha_1\alpha_2), \quad M_1 = (1, \alpha_1), \quad M_2 = (1, \alpha_2)$$

mit L gemeinschaftlich haben. Hieraus erkennt man sofort, daß es zwei verschiedene Systeme konjugierter Gruppen vom Index 6 gibt; das eine wird dargestellt durch die Vierergruppen

$$H = (1, \alpha_1\alpha_2, \gamma, \alpha_1\alpha_2\gamma)$$
$$H_1 = (1, \alpha_1, \beta\gamma, \alpha_1\beta\gamma)$$
$$H_2 = (1, \alpha_2, \beta^2\gamma, \alpha_2\beta^2\gamma),$$

s andere durch die zyklischen Gruppen

$$H = (1,\ \alpha_1\alpha_2,\ \alpha_1\gamma,\ \ \alpha_2\gamma)$$
$$H_1 = (1,\ \alpha_1,\ \ \alpha_2\beta\gamma,\ \alpha_1\alpha_2\beta\gamma)$$
$$H_2 = (1,\ \alpha_2,\ \ \alpha_1\beta^2\gamma,\ \alpha_1\alpha_2\beta^2\gamma).$$

araus folgt, daß man die Oktaedergruppe auf zweierlei Weise als ne Permutationsgruppe von 6 Dingen 1, 2, 3, 4, 5, 6 darstellen kann. an kann z. B.

$$\alpha_1 = (12)(56),\quad \alpha_2 = (12)(34),\quad \beta = (135)(246)$$

id dann entweder

$$\gamma = (13)(24) \quad \text{oder} \quad \gamma = (12)(36)(45)$$

nehmen, je nachdem man die eine oder die andere Darstellung erlten will.

b) Es bleibt noch übrig den Fall zu betrachten, daß je zwei der ruppen M, M_1, M_2 eine von der Identität verschiedene gemeinhaftliche Untergruppe besitzen. Wir bezeichnen die größte in M_1 id M_2 enthaltene Untergruppe mit N, dann haben die konjugierten ruppen N_1, N_2 die analoge Bedeutung für M_2 und M, M und M_1. tzt ist N eine Hauptuntergruppe vom Index 4 in L, und da es it M kein Element außer dem identischen gemeinsam hat, so sind e Elemente von N mit denen von M vertauschbar. Aus ihrer Zummensetzung muß sich eine Gruppe ergeben, die in L enthalten id von der Ordnung $2n^2$ ist, wenn n diejenige von N bedeutet. Da er die Ordnung von L dann gleich $4n$ ist, so muß n ein Teiler n 2 sein. Als solcher kann hier nur $n = 2$ zugelassen werden eil sich N nicht auf die Identität reduzieren sollte). Daher entsteht o durch Zusammensetzung von N und M die Gruppe L selbst, und enso erkennt man dann, daß auch M durch Zusammensetzung n N_1 und N_2 hervorgehen muß, so daß L eine Gruppe von der rdnung 8 ist, die aus der Zusammensetzung aller drei Gruppen , N_1, N_2 entsteht.

Bezeichnen wir nun mit α das Element von der Ordnung 2 in N, id mit β ein nicht in K enthaltenes Element von G, dessen dritte otenz in L enthalten ist, so sind die entsprechenden Elemente von 1, N_2 durch

$$\bar\beta\alpha\beta = \alpha_1,\quad \bar\beta\alpha_1\beta = \alpha_2$$

rgestellt, und es ist

$$\bar\beta\alpha_2\beta = \alpha.$$

Hieraus folgt, daß β mit $\alpha\alpha_1\alpha_2$ vertauschbar ist. Wir können β stets so wählen, daß β^3 in der Gruppe

$$(1,\ \alpha_1\alpha_2,\ \alpha\alpha_1,\ \alpha\alpha_2)$$

enthalten ist, andernfalls würden wir es durch $\alpha\alpha_1\alpha_2\beta$ ersetzen. Dann entsteht durch die Erweiterung mit β aus der zuletzt angegebenen Gruppe eine Tetraedergruppe, und also aus L eine erweiterte Tetraedergruppe, die aus der ersteren auch durch das mit allen seinen Elementen vertauschbare $\alpha\alpha_1\alpha_2$ hervorgeht. Nehmen wir noch ein in K, aber nicht in L enthaltenes Element γ hinzu, so sind hier wieder zwei Arten der Erweiterungen möglich, genau wie beim vorigen Fall. Wir können hier aber nur diejenige gebrauchen, bei welcher γ nicht mit allen Elementen von K vertauschbar ist, und daher annehmen, daß

$$\bar\gamma\alpha\alpha_1\gamma = \alpha\alpha_2, \qquad \bar\gamma\alpha\alpha_2\gamma = \alpha\alpha_1, \qquad \bar\gamma\beta\gamma = \beta^2$$

ist. Da $\bar\gamma\alpha\gamma$ in L enthalten sein muß, so können wir

$$\bar\gamma\alpha\gamma = \alpha^i\alpha_1^{i_1}\alpha_2^{i_2}$$

setzen, dann wird

$$\bar\gamma\alpha_1\gamma = \alpha^{i+1}\alpha_1^{i_1}\alpha_2^{i_2+1}$$

$$\bar\gamma\alpha_2\gamma = \alpha^{i+1}\alpha_1^{i_1+1}\alpha_2^{i_2}.$$

Hierbei muß

$$\begin{vmatrix} i & i_1 & i_2 \\ i+1 & i_1 & i_2+1 \\ i+1 & i_1+1 & i_2 \end{vmatrix} \equiv i + i_1 + i_2 \equiv 1\,(2)$$

sein. Da ferner die Relationen

$$\alpha\beta = \beta\alpha_1, \qquad \alpha_1\beta = \beta\alpha_2, \qquad \alpha_2\beta = \beta\alpha$$

auch dann bestehen müssen, wenn man sie mittels γ transformiert, so leitet man daraus

$$i + 1 \equiv i_1 \equiv i_2\,(2)$$

ab. Es muß also

$$i \equiv 1, \qquad i_1 \equiv i_2 \equiv 0\,(2)$$

und somit

$$\bar\gamma\alpha\gamma = \alpha, \qquad \bar\gamma\alpha_1\gamma = \alpha_2, \qquad \bar\gamma\alpha_2\gamma = \alpha_1$$

sein. Da γ^2 in L enthalten und γ nur mit dessen Elementen $1, \alpha, \alpha_1\alpha_2, \alpha\alpha_1\alpha_2$, von den letzteren aber nur 1 und $\alpha\alpha_1\alpha_2$ mit β vertauschbar sind, so kann γ^2 nur diesen beiden gleich sein. Wäre $\gamma^2 = \alpha\alpha_1\alpha_2$, so ließe sich, wie man leicht erkennt, zwischen K und M außer L keine andere Untergruppe H einschalten. Daher ist die Ordnung von γ gleich 2. Die entstehende Gruppe bezeichnen wir als eine

(IV) erweiterte Oktaedergruppe von der Ordnung 48.

die in ihr enthaltenen Gruppen vom Index 6 zu bestimmen, ɔn wir zunächst die Gruppen K fest, in denen sie enthalten sein ɔen. Diese entstehen aus L durch Erweiterung mit γ, $\beta\gamma$, $\beta^2\gamma$. ı ergibt sich folgendes System

$$H = (1,\ \alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_1\alpha_2,\quad \gamma,\ \alpha_1\gamma,\quad \alpha_2\gamma,\quad \alpha_1\alpha_2\gamma)$$
$$H_1 = (1,\ \alpha,\ \alpha_2,\ \alpha\,\alpha_2,\ \beta\,\gamma,\ \alpha\,\beta\,\gamma,\ \alpha_2\beta\,\gamma,\ \alpha\,\alpha_2\beta\,\gamma)$$
$$H_2 = (1,\ \alpha,\ \alpha_1,\ \alpha\,\alpha_1,\ \beta^2\gamma,\ \alpha\,\beta^2\gamma,\ \alpha_1\beta^2\gamma,\ \alpha\,\alpha_1\beta^2\gamma).$$

ıst zwar noch ein anderes System darin vorhanden, aber dieses sich aus dem genannten einfach durch Änderung von γ in $\alpha\alpha_1\alpha_2\gamma$ ıten und ist daher isomorph mit ihm.

Wir gehen jetzt zur Feststellung der Konstitution der zu den ltenen vier Gruppen gehörigen Körper über. Diese Körper ent- ın alle kubische Unterkörper und lassen sich als relativ quadratische ɔer über ihnen betrachten. Die dem kubischen Körper ent- chende Gruppe K ist in den Fällen (I) und (II) eine Hauptunter- ɔe von G, in den Fällen (III) und (IV) nicht. Daraus folgt, seine Diskriminante in den beiden ersten Fällen ein voll- ıdiges Quadrat im Rationalitätsbereich ist, in den beiden ten nicht. Wendet man auf den kubischen Unterkörper die ısformationen seines Galoisschen Körpers an, so erhält man neben schon erwähnten relativ quadratischen Körper noch zwei ugierte. Wir stellen jetzt für den Körper, der durch ihre Zu- nensetzung entsteht, die ihm entsprechende Gruppe auf. Dazu n wie die Gruppe aller Elemente festzustellen, die sowohl in H_1 ıuch H_2 und der Gruppe enthalten sind, die dem Galoisschen ɔer entspricht.

In den Fällen (I) und (II) ist diese letztere Gruppe K, und wir n als gesuchte Gruppe die Identität beim Falle (I), dagegen ɔruppe

$$(1,\ \alpha\alpha_1\alpha_2)$$

Falle (II). Nur im ersten Falle enthält also H diese Gruppe. us folgt, daß beim Falle (I) die Zusammensetzung zweier der ıv quadratischen Körper den dritten ergibt, dazu ist aber hin- end und notwendig, daß das Produkt der drei Relativdiskrimi- ɔn, die als die im kubischen Unterkörper genommene Norm n r dieser Relativdiskriminanten eine rationale Zahl sein muß, ɔollständiges Quadrat im Rationalitätsbereich ist. Diese m ist also kein Quadrat bei der Gruppe (II).

Bei den Gruppen (III) und (IV) ist die dem Galoisschen Körper kubischen Unterkörpers entsprechende Gruppe diejenige, welche

wir mit L bezeichnet haben. Wenden wir hier dieselbe Betrachtung an, wie vorhin, so erhalten wir im Falle (III) wieder die Identität, im Falle (IV) die Gruppe $(1, \alpha)$. Nur in einem Punkte unterscheidet sich der weitere Gang der Schlüsse, insofern hier der Galoissche Körper einen quadratischen Unterkörper enthält, und die Norm n der Relativdiskriminanten nur ein Quadrat in diesem zu sein braucht. Bezeichnen wir die Diskriminante des kubischen Unterkörpers, die ja mit der des zuletzt genannten quadratischen Körpers übereinstimmt, mit d, so liegt die Gruppe (III) vor, wenn n oder dn ein vollständiges Quadrat im Rationalitätsbereich ist, andernfalls ist (IV) die Gruppe des Körpers. Übrigens lassen sich diese Kriterien nach einem Satze von Hilbert[1]) noch so umformen, daß dabei die Diskriminante D des Gesamtkörpers eingeführt wird. Diese ist in den Fällen (I) und (III) ein Quadrat, bei (II) und (IV) nicht.

Die hergeleiteten Kriterien bestimmen nun aber auch umgekehrt die Gruppen vollständig, wie wir jetzt noch zeigen wollen. Wenn der kubische Unterkörper ein Galoisschen Körper ist, können wir die relativquadratischen Körper durch Gleichungen von der Gestalt

$$x^2 = \Theta, \qquad x_1^2 = \varphi(\Theta), \qquad x_2^2 = \varphi^2(\Theta)$$

darstellen, wo Θ, $\varphi(\Theta)$, $\varphi^2(\Theta)$ die drei in Betracht kommenden Relativdiskriminanten sind, die durch eine rationale Transformation φ mit der Periode 3 aus einer primitiven Größe Θ des kubischen Unterkörpers hervorgehen. Dann können wir die Transformation des kubischen Körpers auch in der Gestalt

$$\beta = (x, x_1, x_2)$$

schreiben. Wenn nun $n = \Theta \cdot \varphi(\Theta) \cdot \varphi^2(\Theta)$ ein Quadrat ist, so ist xx_1x_2 rational, und alle Vorzeichenänderungen

$$\alpha = (x, -x), \qquad \alpha_1 = (x_1, -x_1), \qquad \alpha_2 = (x_2, -x_2)$$

sind so beschaffen, daß diese Größe erhalten bleibt. Es muß also immer

$$\alpha\alpha_1\alpha_2 = 1$$

sein. Wenn dagegen n kein Quadrat ist, so sind alle Kombinationen möglich. Es bereitet aber keine Schwierigkeit, hieraus die Gruppen (I) und (II) abzuleiten.

Ist der kubische Unterkörper dagegen kein Galoisscher Körper, so adjungieren wir einen quadratischen Körper

$$y^2 = d.$$

---

1) Theorie der algebraischen Zahlkörper. S. 206. Satz 39.

Dann lassen sich die relativquadratischen Körper durch die Gleichungen

$$x^3 = \Theta, \qquad x_1^2 = \varphi(\Theta, y), \qquad x_2^2 = \varphi(\Theta, -y)$$

darstellen, wo Θ eine primitive Größe des kubischen Unterkörpers ist, und die Funktion $\varphi(\Theta, y)$ so beschaffen sein muß, daß

$$\varphi^3(\Theta, y) = \varphi(\Theta, -y)$$

ist, was unmittelbar aus dem Umstande folgt, daß die Gruppe des zugehörigen Galoisschen Körpers eine Diedergruppe von der Ordnung 6 ist. Wenn nun die oben genannte Norm

$$n = \Theta \cdot \varphi(\Theta, y) \cdot \varphi(\Theta, -y)$$

ein Quadrat ist, oder durch Multiplikation mit $d = y^2$ zu einem solchen wird, so sind entsprechend die Produkte xx_1x_2 oder xx_1x_2y rational, und es sind nur solche Vorzeichenänderungen

$$\alpha = (x, -x), \qquad \alpha_1 = (x_1, -x_1), \qquad \alpha_2 = (x_2, -x_2)$$

zulässig, die der Bedingung

$$\alpha\alpha_1\alpha_2 = 1$$

genügen. Führt man nun

$$\beta = (x, x_1, x_2), \qquad \gamma = (x_1, x_2)$$

ein, so erkennt man leicht, daß die entstehende Gruppe mit (III) übereinstimmt. Wenn dagegen die Vorzeichenänderungen keinerlei Beschränkungen unterliegen, so erhalten wir die Gruppe (IV).

Quadratisch imprimitive Körper.

G enthält in diesem Falle eine Untergruppe K vom Index 2 über H, aber keine Gruppe vom Index 3, die H als Untergruppe besitzt. In bezug auf das Verhalten von H innerhalb K sind zwei Fälle zu unterscheiden.

1) H sei eine Hauptuntergruppe von K, dann gibt es zu H auch eine in G konjugierte Gruppe H', die ebenfalls eine Hauptuntergruppe von K und auch von H verschieden ist; denn sonst müßte sich H auf die Identität reduzieren, und G würde eine zyklische oder Diedergruppe von der Ordnung 6 werden, der Körper also doppelt imprimitiv sein. Da H und H' außer der Identität kein gemeinsames Element haben können und beide Hauptuntergruppen von K sind, so sind die Elemente von H mit denen von H' vertauschbar. Bezeichnen wir ihre Ordnung mit n, so entsteht also durch ihre Zusammensetzung eine Gruppe von der Ordnung n^2, die in H von der Ordnung $3n$ enthalten ist. Daher muß n ein Teiler von 3 sein, als solcher kommt hier nur $n = 3$ in Betracht.

Bezeichnen wir nun mit α ein Element von der Periode 3 in H, und mit β ein Element von G, das nicht in H enthalten ist, so ist

$$\bar{\beta}\alpha\beta = \alpha'$$

ein Element von der Periode 3 in H', und es muß $\bar{\beta}\alpha'\beta$ wieder in H enthalten und entweder gleich α oder α^2 sein. Letzteres ist aber ausgeschlossen, es würde daraus $\bar{\beta}^2\alpha'\beta^2 = \alpha'^2$ folgen, das ist deswegen unmöglich, weil β^2 in K enthalten und also mit jedem seiner Elemente vertauschbar ist. Wir haben also auch

$$\bar{\beta}\alpha'\beta = \alpha.$$

β^2 kann nur einem Elemente von K gleich sein, das mit β vertauschbar ist; es gibt aber nur 3 solcher: 1, $\alpha\alpha'$, $\alpha^2\alpha'^2$. Ersetzt man nötigenfalls β durch $\alpha^2\beta$ oder $\alpha\beta$, so kann man immer bewirken, daß β die Ordnung 2 erhält, ohne daß sich dadurch die obigen Relationen für die Komposition ändern. Wir erhalten also nur eine einzige

(I) Gruppe von der Ordnung 18.

2) H sei keine Hauptuntergruppe von K. Dann enthält K eine Hauptuntergruppe L vom Index 6, die zugleich Untergruppe in H vom Index 2 ist. Aus ihr kann durch Transformation mit den Elementen von G nur noch eine zweite Gruppe L' hervorgehen, die ebenfalls Hauptuntergruppe von K sein muß. Da aber entweder L oder L' in H oder den sämtlichen dazu konjugierten Gruppen enthalten sein müssen, so haben sie außer der Identität kein Element gemeinsam, und die Elemente von L sind mit denen von L' vertauschbar. Wenn n ihre Ordnungszahl bedeutet, so entsteht also aus ihrer Zusammensetzung eine in K enthaltene Hauptuntergruppe von der Ordnung n^2, und da K die Ordnung $6n$ hat, so muß n ein Teiler von 6 sein.

Bei $n = 1$ müßte H die Ordnung 2 haben und daher K eine Diedergruppe von der Ordnung 6 sein, da sie H nicht als Hauptuntergruppe enthalten darf. G wird daher nach früheren Untersuchungen die erweiterte Diedergruppe von der Ordnung 12, die schon bei den doppelt imprimitiven Körpern auftrat.

Der Fall $n = 2$ erfordert eine etwas umständlichere Untersuchung. Hier müßten L und L' als Gruppen von der Ordnung 2 durch Zusammensetzung eine Vierergruppe ergeben, die in K als Hauptuntergruppe vom Index 3 enthalten wäre. Wir nehmen an, daß diese Vierergruppe aus den Elementen

$$1,\ \alpha,\ \alpha',\ \alpha\alpha',$$

ehe, von denen α in L, α' in L' enthalten sei. β sei ein Element K, dessen Quadrat nicht in der Vierergruppe enthalten ist, aber en Kubus es sein muß. Dann müssen $\bar{\beta}\alpha\beta$ und $\bar{\beta}\alpha'\beta$ wieder in der ergruppe enthalten sein, und also zwei Relationen von der Form

$$\bar{\beta}\alpha\beta = \alpha^a\alpha'^b,$$
$$\bar{\beta}\alpha'\beta = \alpha^c\alpha'^d$$

ehen, wo $ad - bc \equiv 1\,(2)$ ist. Hieraus erhalten wir, wenn noch Abkürzung $a + d = e$ gesetzt wird

$$\bar{\beta}^2\alpha\,\beta^2 = \alpha^{1+ae}\alpha'^{be},$$
$$\bar{\beta}^2\alpha'\beta^2 = \alpha^{ce}\alpha'^{1+de},$$
$$\bar{\beta}^3\alpha\,\beta^3 = \alpha^{a(1+e^2)+e}\alpha'^{b(1+e^2)},$$
$$\bar{\beta}^3\alpha'\beta^3 = \alpha^{c(1+e^2)}\quad\alpha'^{d(1+e^2)+e}.$$

β^3 mit den Elementen der Vierergruppe vertauschbar sein muß, ben sich die Kongruenzen modulo 2

$$a(1+e^2) + e \equiv 1, \qquad b(1+e^2) \equiv 0,$$
$$c(1+e^2) \equiv 0, \qquad d(1+e^2) + e \equiv 1.$$

ıun $e \equiv 0\,(2)$, so wird

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

K wird eine Abelsche Gruppe, die lauter Hauptuntergruppen ält. Da H keine solche sein darf, so ist dieser Fall auszuschließen. Ist aber $e \equiv 1$, so erhalten wir

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{oder} \quad \equiv \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

lie zweite Matrix bei Annahme der ersten dann entstehen würde, ı wir β durch β^2 ersetzen, so brauchen wir nur den Fall zu beıten, wo

$$\bar{\beta}\alpha\,\beta = \alpha',$$
$$\bar{\beta}\alpha'\beta = \alpha\alpha'.$$

ann nur einem Elemente der Vierergruppe gleich werden, mit β vertauschbar ist; das einzige Element dieser Art ist die Iden-

Also muß β die Ordnung 3 haben, und die entstehende Gruppe ine Tetraedergruppe. H soll nun hierin eine Untergruppe von Ordnung 4 sein; die einzige Gruppe dieser Art ist aber die Vierergruppe, H würde also dann eine Hauptuntergruppe in K werden ıen. Also ist der Fall $n = 2$ auszuschließen.

Wir kommen jetzt zum Fall $n = 3$. Hier sind L und L' zyklische Gruppen von der Ordnung 3, von denen die erstere in H mit dem Index 2 enthalten ist. Wir bezeichnen mit α ein Element L mit der Periode 3, mit β ein Element von H, das nicht in L enthalten ist, und endlich mit γ ein Element von G, das nicht zu K gehört. Dann ist

$$\bar{\gamma}\alpha\gamma = \alpha'$$

ein Element von L', und es muß nun auch $\bar{\gamma}\alpha'\gamma$ wieder in L enthalten sein, also die Form

$$\bar{\gamma}\alpha'\gamma = \alpha^a$$

haben, wo $a^2 \equiv 1\,(3)$ ist. Da ferner $\bar{\gamma}\beta\gamma$ in K, aber nicht in der durch Zusammensetzung von L und L' entstehenden Abelschen Gruppe enthalten ist, so muß es in der Form

$$\bar{\gamma}\beta\gamma = \alpha^b\alpha'^c\beta$$

darstellbar sein. Hieraus ergibt sich sofort, daß β nicht mit α vertauschbar sein kann, denn sonst wäre auch $\bar{\gamma}\beta\gamma = \alpha^b\alpha'^c\beta$ mit $\bar{\gamma}\alpha\gamma = \alpha'$ und folglich β mit α' vertauschbar, und es würde K eine Abelsche Gruppe sein, die lauter Hauptuntergruppen enthält. Demnach muß H eine Diedergruppe, also

$$\beta^2 = 1, \qquad (\alpha\beta)^2 = 1$$

sein. Wir können nun β und γ so auswählen, daß $a \equiv 1$, $b \equiv c \equiv 0\,(3)$ wird. Hierzu ersetzen wir zunächst β durch $\alpha^{-c}\beta$ und darauf γ durch $\alpha'^{-b}\beta\gamma$ oder $\alpha'^{-b}\gamma$, je nachdem $a \equiv 1$ oder $\equiv 2\,(3)$ ist. γ^2 muß nun ein Element von K werden, das mit β vertauschbar ist. Wie man sich leicht überzeugt, gibt es nur zwei solcher, 1 und β selbst. Je nachdem wir also die Ordnung von γ gleich 2, oder $\gamma^2 = \beta$ annehmen, erhalten wir

(II, III) zwei verschiedene Gruppen von der Ordnung 36.

Dieses System konjugierter Gruppen vom Index 6 wird durch die folgende Tabelle gegeben

$$\begin{aligned}
H &= (1,\ \alpha,\ \alpha^2,\ \beta,\ \alpha\beta,\ \alpha^2\beta),\\
H_1 &= (1,\ \alpha,\ \alpha^2,\ \alpha'\beta,\ \alpha\alpha'\beta,\ \alpha^2\alpha'\beta),\\
H_2 &= (1,\ \alpha,\ \alpha^2,\ \alpha'^2\beta,\ \alpha\,\alpha'^2\beta,\ \alpha^2\alpha'^2\beta),\\
H' &= (1,\ \alpha',\ \alpha'^2,\ \beta,\ \alpha'\beta,\ \alpha'^2\beta),\\
H'_1 &= (1,\ \alpha',\ \alpha'^2,\ \alpha\beta,\ \alpha\alpha'\beta,\ \alpha\alpha'^2\beta),\\
H'_2 &= (1,\ \alpha',\ \alpha'^2,\ \alpha^2\,\beta,\ \alpha^2\alpha'\beta,\ \alpha^2\alpha'^2\beta).
\end{aligned}$$

In dem noch übrigen Falle $n = 6$ läßt sich sofort ersehen, daß die Gruppen L und L' von der Ordnung 6 Diedergruppen sein müssen;

ären nämlich beide zyklische Gruppen, so müßte K eine Abelsche ruppe sein, und eine solche enthält nur Hauptuntergruppen. Wir ezeichnen mit α und β irgend zwei Elemente aus L von den Perioden 3 nd 2, so daß also

$$(\alpha\beta)^2 = 1$$

ein muß. Ist dann γ ein in G, aber nicht in K enthaltenes Element, o sind die entsprechenden Elemente von L'

$$\bar{\gamma}\alpha\gamma = \alpha', \qquad \bar{\gamma}\beta\gamma = \beta'.$$

s müssen nun auch umgekehrt $\bar{\gamma}\alpha'\gamma$, $\bar{\gamma}\beta'\gamma$ in L enthalten sein, so aß wir

$$\bar{\gamma}\alpha'\gamma = \alpha^a, \qquad \bar{\gamma}\beta'\gamma = \alpha^b\beta$$

tzen können. Hierbei ist es immer möglich durch geeignete Wahl on γ $a \equiv 1$, $b \equiv 0\,(3)$ zu machen. Wir brauchen es nur durch $'^{-b}\beta'\gamma$ oder $\alpha'^{-b}\gamma$ zu ersetzen, je nachdem $a \equiv 1$ oder $\equiv 2\,(3)$ ist. ann ist γ^2 mit α, β, α', β' vertauschbar, und folglich muß die rdnungszahl von γ gleich 2 sein. Wir erhalten also nur eine einzige

V) Gruppe von der Ordnung 72.

as System konjugierter Gruppen vom Index 6 ist in abgekürzter ezeichnung in folgender Tabelle enthalten:

$$H = (\alpha,\ \beta,\ \beta'), \qquad H_1 = (\alpha,\ \alpha\beta,\ \beta'), \qquad H_2 = (\alpha,\ \alpha^2\beta,\ \beta'),$$
$$H' = (\alpha',\ \beta',\ \beta), \qquad H_1' = (\alpha',\ \alpha'\beta',\ \beta), \qquad H_2' = (\alpha',\ \alpha'^2\beta',\ \beta).$$

Um nun die Konstitution der zu diesen vier verschiedenen ruppen gehörigen Körper festzustellen, betrachten wir die letzteren s kubische Körper über einem quadratischen Körper. Da der tztere der Gruppe K entspricht, so sind alle zu ihr gehörigen Größen s rational anzusehen, wenn man diesen quadratischen Körper adjunert. Das System konjugierter Gruppen vom Index 6 zerfällt dann in wei verschiedene Systeme, die in K nicht mehr miteinander konjugiert nd, und wir haben es daher nicht mehr mit einem, sondern zwei ubischen Körpern in dem erweiterten Rationalitätsbereich zu tun, eren Relativdiskriminanten wir mit δ und δ' bezeichnen wollen. Ihr rodukt $\delta\delta' = d$ ist als die im quadratischen Unterkörper gebildete orm eine rationale Zahl.

Im Falle (I) sind nun die den beiden relativkubischen Körpern ntsprechenden Gruppen H und H' beide Hauptuntergruppen von K, aher müssen diese beiden Körper Galoissche Körper sein, wenn an den quadratischen Unterkörper adjungiert, und ihre elativdiskriminante δ und δ' sind vollständige Quadrate.

Diese Bedingungen sind in der Tat hinreichend, um daraus die Gruppe (I) herzuleiten. Um das zu zeigen, denken wir uns den quadratischen Körper durch die Gleichung

$$y^2 = a$$

und den einen relativkubischen Körper durch eine Gleichung

$$\Phi(x, y) = 0$$

vom dritten Grade mit Koeffizienten, die von y abhängig sind, gegeben; dann wird dem andern relativkubischen Körper die Gleichung

$$\Phi(x', -y) = 0$$

entsprechen, die aus der vorigen durch die Transformation $(y, -y)$ hervorgeht. Da nun nach der Annahme beide Relativdiskriminanten δ und δ' Quadrate sind, so besitzen die beiden Relativkörper eine zyklische Gruppe von der Ordnung 3, die durch die rationalen Transformationen

$$\alpha = \begin{pmatrix} x \\ \varphi(x, y) \end{pmatrix}, \qquad \alpha' = \begin{pmatrix} x' \\ \varphi(x', -y) \end{pmatrix}$$

und deren Potenzen erzeugt werden kann (wo $\varphi(x, y)$ der Funktionalgleichung $\varphi^2(x, y) = \varphi(x, -y)$ genügt). Schreiben wir nun die Transformation des quadratischen Unterkörpers, bei der x in x' übergeht und umgekehrt, in der Gestalt

$$\beta = (x, x')(y, -y),$$

so erkennt man, daß aus diesen Elementen in der Tat die Gruppe (I) hergeleitet werden kann; hierbei ist zu beachten, daß

$$\alpha^2 = \begin{pmatrix} x \\ \varphi(x, -y) \end{pmatrix}, \qquad \alpha'^2 = \begin{pmatrix} x' \\ \varphi(x', y) \end{pmatrix}$$

wird.

In den übrigen Fällen sind die Gruppen H keine Hauptuntergruppen von K; daher sind hier sowohl δ als δ' keine Quadrate im quadratischen Unterkörper. Das eine System der in K konjugierten Gruppen hat als größte gemeinschaftliche Untergruppe L, das andere L'. Diese entsprechen daher den zu den beiden Relativkörpern gehörigen Galoisschen Körpern. Sie enthalten relativquadratische Körper, und wir finden die ihnen entsprechenden Gruppen durch die beiden Bedingungen, daß sie L resp. L' enthalten und in K vom Index 2 sein müssen. Bei den Gruppen (II) und (III) ergibt sich für beide dieselbe Gruppe, nämlich diejenige, welche aus der Zusammensetzung von L und L' entsteht. Daraus folgt, daß $\delta\delta' = d$ hier im quadratischen Unterkörper ein vollständiges Quadrat

darstellt. Im Falle (IV) erhalten wir dagegen zwei voneinander verschiedene Gruppen, nämlich

$$(\alpha, \alpha', \beta) \qquad \text{und} \qquad (\alpha, \alpha', \beta').$$

Da die beiden quadratischen Körper verschieden sind, so kann hier d kein Quadrat im quadratischen Unterkörper sein. Es erübrigt nun noch, die Unterschiede der beiden Gruppen (II) und (III) festzustellen, und dazu gehen wir auf die Darstellung der Körper näher ein.

Der quadratische Unterkörper, sowie die beiden relativkubischen Körper seien durch dieselben Gleichungen wie oben gegeben. Um die Galoisschen Körper der beiden letzteren aufzustellen, müssen wir zwei quadratische Körper

$$u^2 = \delta, \qquad u'^2 = \delta'$$

mit den Diskriminanten δ und δ' adjungieren; dann werden sie Galoissche Körper mit den Transformationen

$$\alpha = \left(\overset{x}{\varphi(x, y, u)}\right), \qquad \alpha' = \left(\overset{x}{\varphi(x, -y, u')}\right)$$

von der Periode 3. Wenn nun, wie in den Fällen (II) und (III) die rationale Zahl d im quadratischen Unterkörper ein Quadrat ist, so ist dies entweder so möglich, daß d selbst oder daß das Produkt ad ein Quadrat im Rationalitätsbereich ist. Im ersten Falle kann man

$$uu' = r,$$

im zweiten dagegen

$$uu'y = r$$

setzen, wo r eine rationale Zahl bedeutet. In beiden Fällen ist

$$\beta = (u, -u)(u', -u')$$

eine Transformation des Körpers, aber während im ersten Falle die Verwandlung von y in $-y$ mit der Transformation $(x, x')(u, \pm u')$ verbunden werden kann, ist im zweiten Falle nur $(x, x')(u, \pm v, -u, \mp v)$ zulässig. Setzen wir nun entsprechend

$$\gamma = (x, x')(y, -y)(u, u')$$

oder

$$\gamma = (x, x')(y, -y)(u, v, -u, -v),$$

so erhalten wir

$$\gamma^2 = 1, \qquad \text{oder} \qquad \gamma^2 = \beta.$$

Man bestätigt nun leicht alle oben für die beiden Gruppen (II) und (III) angegebenen Relationen.

Es bleibt nun noch übrig zu zeigen, daß wir die Gruppe (IV) erhalten, wenn d kein Quadrat im quadratischen Unterkörper ist.

Wir behalten hierbei dieselben Bezeichnungen für α und α' wie vorher, müssen aber bedenken, daß jetzt u und u' voneinander unabhängig alle Vorzeichen annehmen können. Dies kann durch zwei Transformationen

$$\beta = (u, -u), \qquad \beta' = (u', -u')$$

bewirkt werden. Setzen wir nun noch

$$\gamma = (x, x')(u, u')(y, -y),$$

so ist es mit keinen weiteren Schwierigkeiten verbunden, an diesen Transformationen alle Relationen der Gruppe (IV) bestätigt zu finden

---

Zur symbolischen Darstellung der Binomialkoeffizienten.

Von J. Schröder.

Entwickelt man den Binomialkoeffizienten $\binom{n}{k}$ nach Potenzen von n, so erhält man die Gleichung:

$$k!\binom{n}{k} = \sum_{0}^{k-1}{}_{\alpha}(-1)^{\alpha}[k-1]_{\alpha}\, n^{k-\alpha},$$

wo unter dem Zeichen $[m]_{\alpha}$ die Summe der Produkte von je α Elementen der ersten m positiven ganzen Zahlen verstanden wird.[1] Stellt man die analogen Gleichungen auch für $\binom{n-1}{k}, \binom{n-2}{k}, \cdots, \binom{2}{k}, \binom{1}{k}$ auf, so ergibt sich durch beiderseitige Addition die Beziehung:

$$k!\sum_{1}^{n}{}_{\lambda}\binom{\lambda}{k} = \sum_{0}^{k-1}{}_{\alpha}(-1)^{\alpha}[k-1]_{\alpha}\, s_{1\,|\,n}^{(k-\alpha)},$$

wo $s_{1\,|\,n}^{(\alpha)}$ die Summe der α-ten Potenzen der ersten n positiven ganzen Zahlen bedeutet. Da nun wegen $\binom{\lambda}{k} = 0$ für $\lambda < k$ die Summe $\sum_{1}^{n}{}_{\lambda}\binom{\lambda}{k} = \sum_{k}^{n}{}_{\lambda}\binom{\lambda}{k} = \binom{n+1}{k+1}$ ist, hat man:

$$k!\binom{n+1}{k+1} = \sum_{0}^{k-1}{}_{\alpha}(-1)^{\alpha}[k-1]_{\alpha}\, s_{1\,|\,n}^{(k-\alpha)}. \tag{1}$$

1) Für die Z[illegible] sind eine Reihe von Beziehungen aufgestellt in dem Aufsatze v[illegible]birani: Un notevole specchio di numeri, Periodico di matematica[illegible]p. 278 ff. (1901). Livorno.

Entwickelt man andererseits den Binomialkoeffizienten $\binom{s}{k}$ nach Potenzen von s, so wird:

$$k!\binom{s}{k} = \sum_{0}^{k-1}{}^{\alpha}(-1)^{\alpha}[k-1]_{\alpha}s^{k-\alpha}. \tag{2}$$

Die rechte Seite von (2) stimmt formal mit derjenigen von (1) überein, wenn man in (2) für s^{α} den Ausdruck $s^{(\alpha)}_{1|n} = \sum_{1}^{n}{}^{\lambda}\lambda^{\alpha}$ substituiert.

Es besteht demnach der Satz: „Der Binomialkoeffizient $\binom{n+1}{k+1}$ läßt sich in symbolischer Form durch $\binom{s}{k}_{1|n}$ darstellen, wo in dem nach Potenzen von s entwickelten Zähler allgemein für s^{α} der Ausdruck $s^{(\alpha)}_{1|n} = \sum_{1}^{n}{}^{\lambda}\lambda^{\alpha}$ zu setzen ist", also:

$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{s}{k}_{1|n}. \tag{3}$$

Auf Grund dieser Beziehung (3) läßt sich aus jeder Binomialkoeffizientenbeziehung eine Rekursionsformel für die Berechnung der Potenzsummen der ersten n ganzen Zahlen herleiten.

Nach (3) ist z. B.:

$$\begin{aligned}
s^{(k)}_{1|n} - [k-1]_1 s^{(k-1)}_{1|n} + [k-1]_2 s^{(k-2)}_{1|n} - \cdots + (-1)^{k-1}[k-1]_{k-1}s^{(1)}_{1|n} &= k!\binom{n+1}{k+1},\\
s^{(k-1)}_{1|n} - [k-2]_1 s^{(k-2)}_{1|n} + \cdots + (-1)^{k-2}[k-2]_{k-2}s^{(1)}_{1|n} &= (k-1)!\binom{n+1}{k},\\
s^{(k-2)}_{1|n} + \cdots + (-1)^{k-3}[k-3]_{k-3}s^{(1)}_{1|n} &= (k-2)!\binom{n+1}{k-1},\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots &\cdots\cdots\\
(-1)^{0}\ [0]_0 \cdot s^{(1)}_{1|n} &= 1!\binom{n+1}{2}.
\end{aligned}$$

Hieraus ergibt sich als explizite Darstellung für $s^{(k)}_{1|n}$:

$$s^{(k)}_{n} = \begin{vmatrix}
k!\binom{n+1}{k+1}, & -[k-1]_1, & [k-1]_2, & -[k-1]_3, & \ldots(-1)^{k-1}[k-1]_{k-1}\\
(k-1)!\binom{n+1}{k}, & [k-2]_0, & -[k-2]_1, & [k-2]_2, & \ldots(-1)^{k-2}[k-2]_{k-2}\\
(k-2)!\binom{n+1}{k-1}, & 0, & [k-3]_0, & -[k-3]_1, & \ldots(-1)^{k-3}[k-3]_{k-3}\\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\
2!\binom{n+1}{3}, & 0, & 0, & 0, & \ldots(-1)^{1}\cdot[1]_1\\
1!\binom{n+1}{2}, & 0, & 0, & 0, & \ldots(-1)^{0}\cdot[0]_0
\end{vmatrix}$$

Was die Berechnung der Zahlen $[m]_\alpha$ angeht, so lassen sich dieselben in folgendem Schema anordnen:[1])

m	$[m]_m$	$[m]_{m-1}$	$[m]_{m-2}$	$[m]_{m-3}$	$[m]_{m-4}$	$[m]_{m-5}$	$[m]_{m-6}$
0	1						
1	1	1					
2	2	3	1				
3	6	11	6	1			
4	24	50	35	10	1		
5	120	274	225	85	15	1	
6	720	1764	1624	735	175	21	1
...	...	...	...	...	...	...	...

Dabei ist stets: $[m+1]_\alpha = (m+1)[m]_{\alpha-1} + [m]_\alpha$.

Bezeichnet man das bis $m = p$ gehende Schema kurz mit $S^{(p)}$, so läßt sich die Formel für $s^{(k)}_{1|n}$ auch in folgender Form schreiben:

$$s^{(k)}_{1|n} = \begin{vmatrix} & & 1! & \binom{n+1}{2} \\ & S^{(k-2)}_{\pm} & 2! & \binom{n+1}{3} \\ & & \cdots & \cdots \\ & & (k-1)! & \binom{n+1}{k} \\ (-1)^{k-1}[k-1]_{k-1},\ (-1)^{k-2}[k-1]_{k-2},\ \ldots,\ -[k-1]_1, & & k! & \binom{n+1}{k+1} \end{vmatrix}$$

wobei die Elemente $[m]_\alpha$ in dem Schema $S^{(k-2)}_{\pm}$ mit dem positiven oder negativen Zeichen zu versehen sind, je nachdem α eine gerade oder ungerade Zahl ist.

Die soeben benutzte Beziehung $\binom{n+1}{k+1} = \binom{s}{k}_{1,n}$ läßt sich noch etwas modifizieren, wenn man beachtet, daß der Ausdruck:

$$P = \nu(\nu-1)(\nu-2)\ \ldots\ (\nu-k+1) = \sum_0^{k-1}{}_\alpha (-1)^\alpha [k-1]_\alpha \nu^{k-\alpha}$$

jedes Mal verschwindet, wenn ν eine der Zahlen 0, 1, 2, ... $(k-1)$ ist.

1) Vgl. Sibirani, loc. cit.

Der nach Potenzen von s entwickelte Zähler des Symbols $\binom{s}{k}_{1|n}$ utet zunächst:

$$Z = \sum_0^{k-1} {}^{\alpha}(-1)^{\alpha}[k-1]_{\alpha} s^{k-\alpha},$$

der nach Ersatz von $s^{k-\alpha}$ durch $s_{1|n}^{(k-\alpha)} = \sum_1^n {}^{\varrho} \varrho^{k-\alpha}$

$$Z' = \sum_0^{k-1} {}^{\alpha} \sum_1^n {}^{\varrho} (-1)^{\alpha} [k-1]_{\alpha} \varrho^{k-\alpha}.$$

o oft nun ϱ eine der Zahlen $1, 2, \ldots (k-1)$ ist, muß das be-effende Aggregat von Z' verschwinden. Daher braucht man die ummation betreffs ϱ nur von $\varrho = k$ bis $\varrho = n$ zu erstrecken und ewinnt so den Satz: „Der Binomialkoeffizient $\binom{n+1}{k+1}$ läßt sich n symbolischer Weise darstellen durch $\binom{s}{k}_{k|n}$, wo in dem nach otenzen von s entwickelten Zähler für s^{α} jedesmal $s_{k|n}^{(\alpha)} = \sum_k^n {}^{\varrho} \varrho^{\alpha}$ u setzen ist."

Eine entsprechende Überlegung erstreckt sich auch auf die symolische Darstellung, die Herr Busche in diesen Mitteilungen (s. Bd. III . 379) gegeben hat. Darnach ist der Binomialkoeffizient $\binom{n}{k+1}$ für > 0 gleich dem symbolischen Ausdruck

$$\left\{ \frac{(n-s)(n-s-1)(n-s-2)\ldots(n-s-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots k} \right\}_n,$$

o nach Ausführung der Multiplikation im Zähler jede Potenz s^{α} rch $s_{1|n}^{(\alpha)} = \sum_1^n {}^{\varrho} \varrho^{\alpha}$ zu ersetzen und jedes von s freie Glied mit n zu ultiplizieren ist.

Das Produkt:

$$P = (n-\nu)(n-\nu-1)(n-\nu-2)\ldots(n-\nu-k+1)$$

ler

$$P = \sum_0^k {}^{\alpha} \sum_0^{k-\alpha} {}^{\beta} (-1)^{\alpha+\beta} \binom{k-\beta}{\alpha} [k-1]_{\beta} n^{k-\alpha-\beta} \cdot \nu^{\alpha}$$

erschwindet immer, wenn ν eine der Zahlen n, $(n-1)$, $(n-2)\ldots$ $-k+1)$ ist.

Daher muß der Zähler des von Herrn Busche angegebenen Symbols, nämlich

$$Z' = \sum_0^k \sum_0^{k-\alpha} \sum_1^n \varrho (-1)^{\alpha+\beta} \binom{k-\beta}{\alpha} [k-1]_\beta n^{k-\alpha-\beta} \varrho^\alpha$$

ein Aggregat vom Werte 0 enthalten, so oft ϱ eine der Zahlen $n, (n-1), (n-2) \ldots (n-k+1)$ ist. Diese Terme können daher von vornherein außer Betracht bleiben. Alsdann erhält Z' die Form:

$$Z' = \sum_0^k \sum_0^{k-\alpha} \sum_1^{n-k} \varrho (-1)^{\alpha+\beta} \binom{k-\beta}{\alpha} [k-1]_\beta n^{k-\alpha-\beta} \varrho^\alpha.$$

Damit ergibt sich die folgende Modifikation des Satzes von Herrn Busche:

„Der Binomialkoeffizient $\binom{n}{k+1}$ ist für $k > 0$ gleich dem symbolischen Ausdruck

$$\binom{n-s}{k}_{1|n-k} = \left\{ \frac{(n-s)(n-s-1)\ldots(n-s-k+1)}{1 \cdot 2 \ldots k} \right\}_{(n-k)'}$$

wo nach Ausführung der Multiplikation im Zähler jede Potenz s^α durch

$$S^{(\alpha)}_{1|n-k} = \sum_1^{n-k} \varrho^\alpha$$

zu ersetzen und das von s freie Aggregat mit $(n-k)$ zu multiplizieren ist."

Bericht über das Gesellschaftsjahr 1906/1907.

(Zusammengestellt vom Jahrverwalter.)

Versammlung am 10. Februar 1906.

Die Herren Kandidaten des höheren Schulamts: Dr. G. W. Berkhan, F. Genzken, Fr. Oldenburg, A. Oppermann, H. Zwingenberger werden statutengemäß in die Gesellschaft aufgenommen.

Herr Dr. J. Schröder trägt vor über die Berechnung der Prämienreserve bei Lebensversicherungen.

Herr Dr. W. Büchel hält einen Vortrag über Singularitäten zweiter Art bei einer gewöhnlichen Differentialgleichung.

Hauptversammlung am 26. Februar 1906.

Der Jahrverwalter Professor Dr. Hoppe erstattet den Jahresbericht über das 216. Gesellschaftsjahr. Die Gesellschaft besteht z. Z. aus

12 Ehrenmitgliedern, 22 auswärtigen und 64 einheimischen Mitgliedern. Zur Herausgabe des Katalog-Nachtrages hat Ein Hoher Senat der Gesellschaft 1000 Mk. überwiesen, der Jahrverwalter hat bereits im Namen der Gesellschaft den wärmsten Dank für diese Unterstützung der wissenschaftlichen Arbeiten ausgesprochen und bittet die Gesellschaft diesen Dank ausdrücklich zu votieren. Zum Kassenrevisor wird Herr Professor H. Ahlborn gewählt. Zum Jahrverwalter wird Herr Dr. Edm. Hoppe wiedergewählt, sodaß der Vorstand für 1906/7 aus den Herren Professor Dr. Edm. Hoppe, Jahrverwalter; Dr. J. Schröder, Mitjahrverwalter, und Dr. A. Schwaßmann, Adjunkt, besteht.

Nach dem Kassenbericht des Mitjahrverwalters besitzt die Gesellschaft ein Vermögen von 2246,59 Mk.

Im Anschluß an die Hauptversammlung findet das übliche Festessen unter Teilnahme einiger Gäste und vieler Mitglieder im Hôtel zum Kronprinzen statt.

Versammlung am 10. März 1906.

Die Gesellschaft beschließt der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften in Upsala auch Band 2 und 3 der Mitteilungen zu übersenden.

Herr Dr. B. Walter hält einen Vortrag über radioaktive Umwandlungen.

Herr A. Wetzler trägt vor über automorphe Funktionen.

Versammlung am 31. März 1906.

Der Revisionsbericht des Herrn Professors Ahlborn wird verlesen und dem Kassenführer Entlastung erteilt; der Jahrverwalter wird ermächtigt wegen des Druckes des Kataloges mit der Firma Schröder und Jeve abzuschließen.

Herr Dr. P. Frank gibt ein Referat über die neueren Arbeiten über Translationsflächen.

Herr Dr. Edm. Hoppe spricht dann über die Bedeutung der Geschwindigkeitsmessungen für die Anschauungen über die Natur der Elektronen.

Versammlung am 12. Mai 1906.

Durch die Vermittlung des Herrn Direktor Prof. Dr. Rautenberg ist der Gesellschaft ein Exemplar des 1736 herausgegebenen Werkes: Museum mathematicum ihres damaligen Mitgliedes J. N. Steding von Herrn Architekten Glimmann für das Archiv überreicht worden. Der Vorsitzende spricht den wärmsten Dank der Gesellschaft aus.

Die Gesellschaft beschließt ihr Ehrenmitglied Exz. von Neumayer zu seinem 80ten Geburtstage durch ein Anschreiben zu begrüßen.

Herr Dr. Berkhan hält einen Vortrag über eine Verwendung der Kreispunkte zur Ordnung der planimetrischen Lehrsätze.

Versammlung am 23. Juni 1906.

Bei dem Festaktus zur Feier des 80ten Geburtstages Exz. von Neumayers ist die Gesellschaft durch ihr Mitglied Herrn Dr. Oppenheim vertreten gewesen. Für den Neumayerfond bewilligt die Gesellschaft 50 Mk. Herr Kandidat Dr. G. Haecker wird als ordentliches Mitglied der Gesellschaft aufgenommen.

Herr Professor Dr. Köpcke trägt vor über Vernachlässigungen und Grenzübergänge im Schulunterricht.

Herr Dr. J. Schröder referiert über die Umgestaltung des mathematischen Unterrichts an den höheren Schulen.

Versammlung am 7. Juli 1906.

Herr Kandidat Dr. P. Riebesell wird statutengemäß als ordentliches Mitglied in die Gesellschaft aufgenommen.

Im Anschluß an die Arbeit des Herrn Professor Schmidt-Düren: „Wie gewinnen wir für die Behandlung des Funktionsbegriffes Platz im mathematischen Unterricht?“ findet eine eingehende Diskussion statt über die Einführung des Funktionsbegriffes. Die Gesellschaft erklärt einstimmig ihr Einverständnis zu folgender Resolution:

Die Mathematische Gesellschaft hält die Behandlung der Elemente der Differential- und Integralrechnung in dem mathematischen Unterricht an allen neunstufigen höheren Schulen Hamburgs, einschließlich der Gymnasien, für möglich und notwendig.

Versammlung am 25. August 1906.

Es wird beschlossen, den Katalog-Nachtrag in 500 Exemplaren drucken zu lassen.

Der Jahrverwalter referiert über die Reformvorschläge der Unterrichtskommission der Naturforscherversammlung für den physikalischen Unterricht. Daran schließt sich eine eingehende Diskussion.

Versammlung am 8. September 1906.

Herr A. Wetzler tritt bei seiner Abreise von Harburg aus der Reihe der ordentlichen einheimischen Mitglieder in die der auswärtigen.

Der Jahrverwalter spricht den Wunsch der Gesellschaft aus, daß der Erkrankte bald genesen möge, und den Dank für die tätige und anregende Mitarbeit, die Herr Wetzler der Gesellschaft geleistet.

Herr Professor Dr. Busche hält einen Vortrag über einen Beitrag zur Mengenlehre.

Herr Professor Dr. Edm. Hoppe trägt vor über die Intensität nach dem Weberschen Gesetze als einhüllende Kurve der Intensitätskurven der Einzelreize.

Herr Professor Dr. Köpcke demonstriert ein Modell zur Veranschaulichung der durch einen Spalt hervorgerufenen Beugungserscheinungen.

Versammlung am 13. Oktober 1906.

Die Herren Kandidaten Dr. A. Winter und A. Partz werden als ordentliche Mitglieder in die Gesellschaft aufgenommen.

Herr Dr. W. Büchel trägt vor über die gestaltlichen Verhältnisse der Integralkurven von Differentialgleichungen zweiten Grades.

Versammlung am 10. November 1906.

Der Jahrverwalter verliest das Dankschreiben des Herrn Geheimrat von Neumayer Exz. für die Begrüßung zum 80ten Geburtstage. Herr Kandidat C. Meyer wird als ordentliches Mitglied in die Gesellschaft aufgenommen.

Herr Dr. W. Brügmann hält einen Vortrag über Berührungstransformationen.

Versammlung am 1. Dezember 1906.

Der Jahrverwalter gedenkt des schweren Verlustes, den die Gesellschaft durch den Tod ihres langjährigen Mitgliedes, Herrn Schiffbauingenieur Timm, erlitten hat; die Versammlung ehrt das Andenken des Entschlafenen durch Erheben von den Sitzen.

Der Jahrverwalter berichtet, daß die Bürgermeister Kellinghusen-Stiftung zur Drucklegung des Katalognachtrages 500 Mk. Unterstützung gewährt habe und spricht dafür den wärmsten Dank der Gesellschaft aus.

Die Herren Oberlehrer Dr. E. Boehm und H. Thorade und Oberlehrer des. W. Ehlers werden als ordentliche Mitglieder der Gesellschaft aufgenommen.

Das Ehrenmitglied Herr Geheimrat Bubendey hält einen Vortrag über das Thema: Wie sind die Aufgaben der Hydraulik im praktischen Wasserbau zu behandeln?

Versammlung am 12. Januar 1907.

Der 2te Nachtrag zum Katalog der auf Hamburger Bibliotheken vorhandenen Literatur auf dem Gebiet der Mathematik und Physik ist fertiggestellt und wird den Mitgliedern und Bibliotheken in den nächsten Tagen zugestellt. Er umfaßt $22\frac{1}{2}$ Bogen.

Es wird beschlossen Herrn Direktor Dr. Niebour, welcher im Jahre 1857 der Gesellschaft beigetreten ist und sich vielerlei Verdienste um dieselbe erworben hat, zum Ehrenmitgliede zu ernennen.

Herr Dr. P. Riebesell trägt vor: Über die Theorie der Gleichstrom-Dynamomaschine.

Herr Dr. J. Schröder macht eine Mitteilung über Binomial-Koeffizienten-Summen.

Die Bibliothek der Gesellschaft verdankt folgenden Herren wertvolle Zuwendungen, wofür sie den verehrten Verfassern und Gebern den besten Dank auch auf diesem Wege aussprechen möchte:

W. Ahrens, E. Barkow, W. Brügmann, H. Burkhardt, E. Busche, M. Dehn, M. Falk, G. B. Guccia, Glimmann, Issaly, M. Lerch, A. Matern, N. Nielsen, H. Oppenheimer, Pittard-Bullock, E. Rautenberg, O. Rosenstock, G. Scheffers, W. Schmidt, H. Schuh, P. Stäckel, Cl. Thaer.

Außerdem steht die Gesellschaft in Schriftenaustausch mit zahlreichen deutschen und ausländischen gelehrten Gesellschaften.

Mitgliederverzeichnis.

Bestand der Mathematischen Gesellschaft in Hamburg am 1. Januar 1907.

I. Ehrenmitglieder.

Se. Magnifizenz Bürgermeister Dr. jur. O. Stammann in Hamburg.

Bruns, H., Dr. phil., Geh. Hofrat, Professor, Direktor der Sternwarte in Leipzig.

Bubendey, J. F., Geh. Baurat und Wasserbaudirektor in Hamburg.

Cantor, M., Dr. phil., Geh. Hofrat, Professor der Mathematik in Heidelberg.

Günther, S., Dr. phil., Professor der Geographie in München.

Hübbe, H. W. C., Stadtbaumeister in Schwerin.

Hurwitz, A., Dr. phil., Professor der Mathematik in Zürich.

von Neumayer, G., Dr. phil., Professor, Wirkl. Geh. Admiralitätsrat, Exzellenz, Neustadt a. d. Haardt.

Netto, E., Dr. phil., Geh. Hofrat, Professor der Mathematik in Gießen.

Reye, Th., Dr. phil., Professor der Mathematik in Straßburg.

Schuback, D. A., Deich- und Grenzinspektor in Hamburg.

Sturm, R., Dr. phil., Geh. Reg.-Rat, Professor der Mathematik in Breslau.

II. Auswärtige Mitglieder.

Ahrens, W., Dr. phil., Oberlehrer an der Maschinenbauschule in Magdeburg.

Ambronn, L., Dr. phil., Professor, Observator der Sternwarte in Göttingen.

Bibliothek, Königliche, in Berlin.

Blater, J., in Baden-Baden.

Harzer, P., Dr. phil., Professor, Direktor der Sternwarte in Kiel.

Ludendorff, H., Dr. phil., Observator am Astrophysikalischen Observatorium in Potsdam.

Mahlke, A., Dr. phil., Assistent an der Phys. Reichsanstalt, Charlottenburg.

Mainka, C., Dr. phil., Assistent an der Kais. Hauptstation für Erdbebenforschung, Straßburg.

Maurer, H., Dr. phil., Physiker am Reichsmarineamt.

Meyn, H. W., Direktor der Karlshütte in Rendsburg.

Mügge, O., Dr. phil., Professor der Mineralogie in Königsberg.

Oppenheimer, H., Dr. phil., Kgl. Reallehrer in Neustadt a. H. (Pfalz).

Pund, O., Dr. phil., Oberlehrer am Reformrealgymnasium in Charlottenburg.

Scheller, A., Dr. phil., Adjunkt der K. K. Universitätssternwarte in Prag.

Schönwiese, R., Versicherungsmathematiker an der Alten Leipziger Lebensversicherungs-Gesellschaft zu Leipzig.

Schrader, C., Dr. phil., Geh. Reg.-Rat, Reichsprüfungsinspektor in Berlin.

Servus, H., Dr. phil., Oberlehrer am Friedrichs-Realgymnasium in Berlin.

Sieveking, J. H., in Bielefeld.

Sprung, A., Dr. phil., Professor, Sektionschef am meteorolog. Institut in Potsdam.

Seege, H., Dr. phil., Marineoberlehrer in Wilhelmshaven.

Vetzler, A., Kgl. Realgymnasiallehrer, Nürnberg.

Virtz, C. W., Dr. phil., Observator der Sternwarte und Privatdozent in Straßburg.

III. Einheimische Mitglieder.

Ahlborn, F. H. H., Professor am Realgymnasium des Johanneums.
Banning, F., Dr. phil., Oberlehrer an der Gelehrtenschule des Johanneums.
Bauch, F., Lehrer an der Realschule von Dr. Bieber.
Bensberg, E., Wasserbauinspektor, Baurat.
Berkhan, G. W., Dr. phil., Kand. des höher. Lehramts a. d. Oberrealschule Uhlenhorst.
Böger, R., Dr. phil., Professor am Realgymnasium des Johanneums.
Boehm, E., Dr. phil., Oberlehrer an der Realschule in Eilbeck.
Bohnert, E. F. Ph., Dr. phil., Professor, Direktor der Realschule St. Georg.
Bolte, F. G., Dr. phil., Direktor der Navigationsschule.
Brügman, W., Dr. phil., Oberlehrer an der Oberrealschule Eimsbüttel.
Büchel, W., Dr. phil., Oberlehrer an der Realschule in Eppendorf.
Busche, E., Dr. phil., Professor an der Oberrealschule Eimsbüttel.
Classen, J., Dr. phil., Professor am physikalischen Staatslaboratorium.
Dencker, F., Chronometerfabrikant.
Detels, F., Dr. phil., Oberlehrer an der Realschule in Eilbeck.
Dörge, O., Dr. phil., Oberlehrer an der höher. Staatsschule, Bergedorf.
Dressler, M., Oberlehrer am Wilhelmgymnasium.
Ehlers, W., Seminaroberlehrer des.
Fischer, F., Assecuradeur.
Franck, P., Dr. phil., Oberlehrer an der Oberrealschule v. d. Holstentor.
Genzken, E., Kand. des höher. Lehramts an der Oberrealschule v. d. Holstentor.
Glage, F. E. A., Dr. phil., Oberlehrer an der Gelehrtenschule des Johanneums.
Graff, K., Dr. phil., Assistent an der Sternwarte.
Grimpen, A., Dr. phil., Lehrer.
Groscurth, F., Dr. phil., Oberlehrer an den Unterrichtsanstalten des Klosters St. Johannis.
Haecker, G., Dr. phil., Kand. des höher. Lehramts an dem Realgymnasium des Johanneums.
Hadenfeldt, E., Direktor der Hafen-Dampfschiffahrts-Gesellschaft.
Heidke, P., Dr. phil., Assistent an der Seewarte.
Hillers, W., Dr. phil., Oberlehrer am Realgymnasium des Johanneums.
Hoppe, E., Dr. phil., Professor am Wilhelmgymnasium.
Jaerisch, P. G. M., Dr. phil., Professor an der Oberrealschule Eimsbüttel.

)ferstein, H. J., Dr. phil., Professor an der Oberrealschule Uhlenhorst.
)pcke, H. A., Dr. phil., Professor an der Oberrealschule in Altona-Ottensen.
)ldewey, C. C., Admiralitätsrat a. D.
)rner, Th., Dr. phil., z. Z. Einj.-Freiwilliger.
'üss, H., Dr. phil.
ndemann, A., Dr. phil., Oberlehrer an der Oberrealschule Uhlenhorst.
)ny, G. F. C., Dr. phil., Oberlehrer an der Oberrealschule vor dem Holstentor.
)wer, G. F., Baurat, Wasserbauinspektor.
essow, B., Assistent an der Sternwarte.
eyer, C., z. Z. Einj.-Freiwilliger.
ichaelsen, A., Dr. phil., Professor am Christianeum in Altona.
)gel, A. C., Zivilingenieur.
ebour, C. T, B., Dr. phil., Direktor a. D.
)rden, M., Oberlehrer an der Realschule in Eppendorf.
)ltjen, H., Dr. phil., Oberlehrer an der Oberrealschule in Eimsbüttel.
denburg, Fr., Kand. des höher. Lehramts an der Oberrealschule vor dem Holstentor.
)permann, A., Oberlehrer an der Oberrealschule vor dem Holstentor.
rtz, A., Kand. des höher. Lehramts an der Oberrealschule vor dem Holstentor.
laumbaum, G., Dr. phil., Oberlehrer an der Realschule in St. Pauli.
)psold, J. A., Dr. phil.
ebesell, P., Dr. phil., Kand. des höher. Lehramts an der Oberrealschule in Eimsbüttel.
)loff, H. P., Kand. des höher. Lehramts an der Oberrealschule Uhlenhorst.
hader, F., Dr. phil., Professor am Wilhelmgymnasium.
horr, R., Dr. phil., Professor, Direktor der Sternwarte.
hröder, J., Dr. phil., Oberlehrer an der Oberrealschule vor dem Holstentor.
hubert, H. C. H., Dr. phil., Professor an der Gelehrtenschule des Johanneums.
humpelick, A., Oberlehrer an der Gelehrtenschule des Johanneums.
hwassmann, A., Dr. phil., Observator an der Sternwarte.
)gmeyer, K., Oberlehrer an der höheren Staatsschule in Bergedorf.
)veking, F., Dr. jur., Rechtsanwalt.
aer, A., Dr. phil., Professor, Direktor der Oberrealschule vor dem Holstentor.
orade, H., Oberlehrer an der Realschule in Eilbeck.

Tuch, Th., Dr. phil.

Uetzmann, R., Dr. phil., Oberlehrer an der Realschule in Hamm.

Umlauf, K., Dr. phil., Seminaroberlehrer.

Wagner, H. A., Dr. phil., Professor, Direktor der Realschule vor dem Lübeckertor.

Walter, B., Dr. phil., Assistent am Phys. Staatslaboratorium.

Winter, A., Dr. phil., Kand. des höher. Lehramts an dem Realgymnasium des Johanneums.

Zwingenberger, H., z. Z. Einj.-Freiwilliger.

MITTEILUNGEN
DER MATHEMATISCHEN GESELLSCHAFT
IN HAMBURG.

BAND IV. № 8. AUSGEGEBEN IM FEBRUAR 1908.

Die physikalischen Bedeutungen der durch die Differentialgleichung $\frac{dy}{dx} = \frac{Y(x,y)}{X(x,y)}$ definierten Kurvenschar.

Von Wilhelm Büchel in Hamburg.

Mit 3 Figuren im Text.

In Band IV, Heft 4 der Mitteilungen habe ich nach einer von Poincaré[1]) angegebenen Methode den Gesamtverlauf der Integralkurven der Differentialgleichung $\frac{dy}{dx} = \frac{Y(x,y)}{X(x,y)}$ für in x und y quadratische Funktionen von X und X festgestellt.

Es sind zum Teil aus der Physik bekannte Kurvenbilder, die man erhält, und es ist deshalb von einigem Interesse, einmal die physikalischen Bedeutungen der wichtigsten der dort gezeichneten und ähnlicher Bilder zusammenzustellen, und zu zeigen, daß man auch in der mathematischen Physik mit Nutzen die Poincarésche Methode verwenden kann.

Durch die Gleichung $\frac{dy}{dx} = \frac{Y}{X}$, worin wir uns unter Y und X rationale Funktionen von y und x vorstellen wollen, ist ein ebenes Vektorfeld definiert. Ein solches ist uns gegeben in den Stromlinien einer stationären Flüssigkeitsbewegung, bei der in allen horizontalen Ebenen die Bewegung dieselbe ist. Aber nicht nur die Flüssigkeitsströmung, sondern jede Art von Strömung ist, sofern wir uns auf das ebene Problem beschränken, durch die obige Gleichung bestimmt: die Luftströmung, die Wärmeströmung und schließlich auch die „Kraftströmung". Besonders wichtig ist die Differentialgleichung als Gleichung des magnetischen und elektrischen Kraftfeldes.[2])

1) Journal de Mathématiques Série 3, Bd. VII und VIII: Mémoire sur les courbes définies par une équation différentielle.

2) Maxwell; Über Faradays Kraftlinien. Einleitung.

Der Gesamtverlauf der Integralkurven ist bestimmt durch die singulären Punkte der Differentialgleichung. Die physikalische Deutung muß also auch mit der Deutung der singulären Stellen beginnen. Diese können Knotenpunkte, Sattelpunkte, Wirbelpunkte und Strudelpunkte sein.

Den Knotenpunkt betrachten wir zunächst in der besonderen Form, daß von ihm strahlenförmig nach allen Seiten Kurven ausgehen oder von allen Seiten in ihn hineinlaufen. Für die Strömung hat er die Bedeutung eines Quellpunktes oder einer Senke, eines Temperaturmaximums oder -minimums, eines positiven oder negativen Pols. Die Geschwindigkeit, die durch einen solchen Punkt in einem Punkte (x, y) in der Richtung der Verbindungslinie hervorgerufen wird, ist aus einfachen geometrischen Gründen, umgekehrt proportional der Entfernung des Punktes (x, y) von der Quelle.

Der Sattelpunkt ist ein Punkt, durch den 2 Integralkurven hindurchgehen. Für die Strömung ist er ein Stillstandspunkt, für das Kraftlinienfeld ein Punkt des Gleichgewichts. Die hindurchlaufenden Kurven trennen verschiedene Gebiete der Strömung.

Der Wirbelpunkt ist ein Punkt, in dessen Umgebung die Strömung sich in geschlossenen Bahnen vollzieht: Wasserwirbel, Luftwirbel. Ein Wirbelpunkt für das magnetische Kraftfeld ist der Schnittpunkt eines stromdurchflossenen Leiters mit der Feldebene. Den Wirbelpunkt betrachten wir zunächst in der besonderen Form, daß die Kurven in der unmittelbaren Umgebung Kreise sind. Die Strömung, die durch einen Wirbelpunkt im Punkte (x, y) hervorgerufen wird, steht senkrecht auf der Verbindungslinie, und ihre Geschwindigkeit ist umgekehrt proportional der Entfernung vom Wirbel.

Ein Strudelpunkt entsteht, wie wir noch sehen werden, dadurch, daß sich im gleichen Punkte ein Wirbel und eine Quelle befinden.

Ich betrachte eine Reihe von Beispielen, ohne alle physikalischen Bedeutungen jedesmal gleichmäßig hervorzuheben.

1. Im einfachsten Fall sei nur eine einzige Quelle oder Senke vorhanden. Wenn man die durch diese hervorgerufenen Geschwindigkeiten in jedem Punkt nach den Achsenrichtungen in die Komponenten u und v zerlegt und beachtet, daß $\frac{dy}{dx} = \frac{u}{v}$, so erhält man $\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}}{\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}} = \frac{y}{x}$. Im Quellpunkt selbst würde die Geschwindigkeit unendlich groß sein. Er ist deshalb durch einen kleinen Kreis auszuschließen. Im Unendlichen ruht die Flüssigkeit.

2. Im Punkte $\begin{cases} y=0 \\ x=-1 \end{cases}$ befindet sich eine Quelle, in $\begin{cases} y=0 \\ x=+1 \end{cases}$ eine Senke von gleicher Stärke. Die Geschwindigkeitskomponenten in gleicher Achsenrichtung addieren sich.[1]) Man erhält

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\dfrac{y}{(x+1)^2+y^2} - \dfrac{y}{(x-1)^2+y^2}}{\dfrac{x+1}{(x+1)^2+y^2} - \dfrac{x-1}{(x-1)^2+y^2}} = \frac{2xy}{x^2-y^2-1}.$$

Die Kurven sind Bd. IV, 4, Tafel I, 3 gezeichnet.

Im Unendlichen entstehen auf der X-Achse 2 Sattelpunkte. Die Trennungskurven sind die X-Achse und der unendlich-ferne Kreis. In den beiden entstehenden Teilgebieten verläuft die Strömung von der Quelle zur Senke. Rücken Quelle und Senke einander unendlich nahe, so geht die Differentialgleichung über in $\frac{dy}{dx} = \frac{2xy}{x^2-y^2}$, die Differentialgleichung der Kreise, die die X-Achse im Nullpunkt berühren.

3. In $\begin{cases} y=0 \\ x=\pm 1 \end{cases}$ liegen Quellen gleicher Stärke:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\dfrac{y}{(x+1)^2+y^2} + \dfrac{y}{(x-1)^2+y^2}}{\dfrac{x+1}{(x+1)^2+y^2} + \dfrac{x-1}{(x-1)^2+y^2}} = \frac{y(x^2+y^2+1)}{x(x^2+y^2-1)}.$$

Bei der Diskussion ist zu beachten, daß $\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$ ein Stillstandspunkt ist. Die beiden durch ihn hindurchgehenden Kurven sind die Koordinatenachsen. Im Unendlichen sind keine Singularitäten. Dort verhält sich die Gleichung wie $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$. Es ergibt sich das bekannte Bild sich abstoßender Kraftlinien zweier gleichnamiger Pole. Man vergleiche, auch für das folgende, die Tafeln in dem fundamentalen Werk von Maxwell, Treatise on Electricity and Magnetism. Reproduziert sind diese Zeichnungen in Frick, Physikalische Technik II, 1. 1907. Eine elementare Darstellung findet sich bei Jaumann, Vorlesungen über Elektrizität und Licht.

4. Eine der beiden Quellen verlege ich ins Unendliche auf die X-Achse und die andere in den Nullpunkt. Mit anderen Worten, ich betrachte die Strömung, die entsteht durch eine Quelle in einem von Westen nach Osten strömenden Flusse. Die Stromstärke des Flusses sei 1. Wenn ich die Strömungsrichtungen umkehre, so erhalte ich

1) Man vergleiche z. B. Voigt, Elementare Mechanik S. 357.

das Bild einer Senke in einem von Osten nach Westen strömenden Fluß. Die Differentialgleichung lautet:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{y}{x^2+y^2}}{\frac{x}{x^2+y^2}+1} = \frac{y}{x^2+y^2+x}.$$

Siehe Bd. IV, 4, Tafel I, 5. Die Figur ist anders orientiert.

5. Außer den beiden Quellen in $\begin{cases} y=0 \\ x=\pm 1 \end{cases}$ will ich im Nullpunkt einen Abfluß anbringen:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{y}{(x+1)^2+y^2}+\frac{y}{(x-1)^2+x^2}-\frac{y}{x^2+y^2}}{\frac{x+1}{(x+1)^2+y^2}+\frac{x-1}{(x-1)^2+y^2}-\frac{x}{x^2+y^2}} = \frac{y}{x}\cdot\frac{(y^2+x^2+1)(y^2+x^2-1)+4x^2}{(y^2+x^2+1)(y^2+x^2-1)-4y^2}$$

Stillstandspunkte sind die Schnittpunkte von $x^2+y^2=1$ mit der Y-Achse. Die beiden Achsen und $x^2+y^2=1$ sind Trennungskurven. Im Unendlichen verhalten sich die Kurven wie die der Gleichung $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$. Mit Hilfe dieser Angaben läßt sich die entstehende Strömung in den 8 Teilgebieten zeichnen (Figur 1).

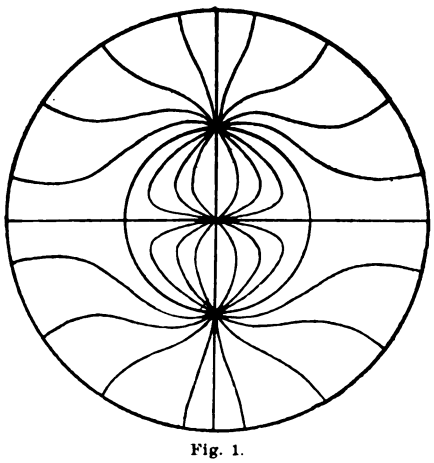


Fig. 1.

6. Die Strömung von 4 gleichstarken Quellen in den Punkten $\begin{cases} x=\pm 1 \\ y=\pm 1 \end{cases}$ ist definiert durch

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}\cdot\frac{(x^2+y^2)^3+3x^2-y^2}{(x^2+y^2)^3+3y^2-x^2}.$$

Der Nullpunkt ist eine Singularität höherer Art[1]), ein Stillstandspunkt höherer Art. Es gehen 4 Integralkurven durch ihn hindurch, die beiden Achsen und die Halbierungslinien der von ihnen gebildeten Winkel. Im Unendlichen verhält sich die Gleichung wie $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$. Man übersieht, wie der Kurvenverlauf sich gestaltet bei einer weiteren Vermehrung der Quellen.

7. Das einfachste Beispiel für einen Wirbelpunkt gibt die Gleichung $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$. Die Integralkurven sind die bekannten Kreise, die in einer zu einem stromdurchflossenen Leiter senkrechten Ebene von den Kraftlinien gebildet werden. Der Nullpunkt ist auszuschließen.

1) Bd. IV, 4, p. 136.

da hier die Kraft unendlich wäre; im Unendlichen ist die Wirkung verschwindend.

8. Befindet sich im Nullpunkt eine Quelle und zugleich ein Wirbelpunkt, so ergibt sich, wenn die Wirbelbewegung im Sinne der Drehung des Uhrzeigers erfolgt:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{y}{x^2+y^2} + \frac{-x}{x^2+y^2}}{\frac{x}{x^2+y^2} + \frac{y}{x^2+y^2}} = \frac{y-x}{y+x}.$$

Die Integralkurven sind eine Schar von logarithmischen Spiralen: es entsteht ein Strudelpunkt. Ein Beispiel hierfür ist die Bewegung der Luft um ein barometrisches Maximum.

9. Die Quelle verlege ich ins Unendliche auf die X-Achse, den Wirbelpunkt in $\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$. Dann habe ich einen Wirbel in einem Fluß. Die Stromrichtung des Flusses sei die von Westen nach Osten, die Stromstärke 1. Die Gleichung lautet:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{x}{x^2+y^2}}{\frac{-y}{x^2+y^2}+1} = \frac{x}{x^2+y^2-y}.$$

Das Strömungsbild ist von der Art der Figur 7 an der angeführten Stelle. Das Bild gibt auch die Störung an, die ein ursprünglich homogenes magnetisches Feld durch die Kraftlinien eines zu ihm senkrechten geradlinigen Stromes erfährt.

10. Liegen Quelle und Wirbel beide im Endlichen und in verschiedenen Punkten $\begin{cases} y=0 \\ x=\mp 1 \end{cases}$, so ist

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(x-1)\{(x+1)^2+y^2\}+y\{(x-1)^2+y^2\}}{(x+1)\{(x-1)^2+y^2\}-y\{(x+1)^2+y^2\}}.$$

Im Unendlichen verhält sich die Gleichung wie $\frac{dy}{dx} = \frac{x+y}{x-y}$, d. h. die Kurven nähern sich asymptotisch dem unendlich fernen Kreis. $\begin{cases} x=0 \\ y=1 \end{cases}$ ist ein Stillstandspunkt. Die Kurven, die durch ihn hindurchgehen, zerlegen die Strömung in Teilgebiete, wie es die Figur zeigt. Das Bild (Figur 2) erklärt die Einwirkung eines zur Zeichenebene senkrechten Stromes auf einen magnetischen Pol;

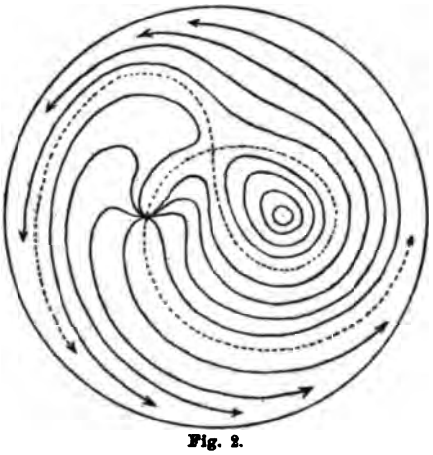


Fig. 2.

Figur 15 in Bd. IV, 4, Tafel II die Einwirkung eines solchen Stromes auf 2 entgegengesetzte Pole, also z. B. eine Magnetnadel.

11. Wichtig ist die Strömung, die durch 2 Wirbelpunkte von entgegengesetztem Drehungssinn erzeugt wird: $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 - y^2 - 1}{-2xy}$. Die Kurven sind l. c. Figur 18 gezeichnet. Es sind die bekannten Kurven, zu denen Eisenfeilspäne sich in der Umgebung eines kreisförmigen Leiters anordnen. Bei Rotation um die Y-Achse entstehen die Stromlinien um einen kreisförmigen Wirbelfaden (Rauchringe).

12. Haben die Wirbel gleichen Drehungssinn, so erhält man $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}\frac{x^2+y^2-1}{x^2+y^2+1}$. Der Nullpunkt ist ein Stillstandspunkt. Im Unendlichen haben wir das Bild der Gleichung $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$. Um die Wirbelpunkte strömt die Flüssigkeit in geschlossenen Bahnen. Diese Gebiete werden abgeschlossen durch eine Kurve mit Doppelpunkt. Im Außengebiet runden sich die Kurven immer mehr zu Kreisen ab. Wir haben das magnetische Feld zweier gleichgerichteter elektrischer Ströme.

13. 2 Wirbel entgegengesetzten Drehungssinnes in einem Flusse führen zu der folgenden Gleichung, wenn der Fluß zwischen den Wirbeln die der Wirbelströmung entgegengesetzte Richtung hat, im Beispiel von Süden nach Norden:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(x^2+y^2+1)(x^2+y^2-1)}{-4xy}.$$

Man erhält die zugehörigen Kurven, wenn man Figur 9 (l. c. Tafel I) richtig orientiert.

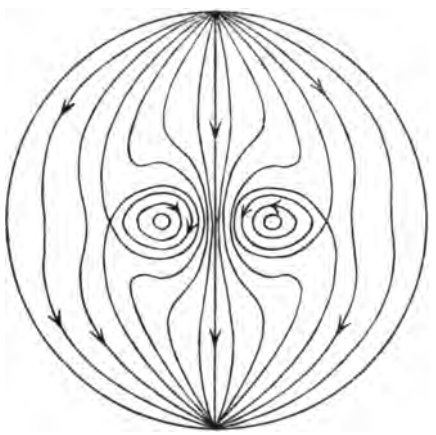


Fig. 3.

14. Strömt der Fluß von Norden nach Süden, während die Wirbelrichtungen dieselben bleiben, so wird

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(x^2+y^2+1)(x^2+y^2+3) - 8x^2}{4xy},$$

$y = 0$, $x = \pm\sqrt{3}$ sind Sattelpunkte, und man kommt zu dem dargestellten Kurvenverlauf (Figur 3).

In derselben Weise läßt sich die Strömung feststellen für Wirbelpunkte gleichen Drehungssinnes im Flusse. Interessant sind auch die Bilder, die entstehen, wenn man entgegengesetzte Pole im entgegengesetzten oder gleichsinnigen homogenen Felde betrachtet. Es läßt sich ferner die Anzahl der Wirbelpunkte vermehren. Durch passende Anordnung kommt man zum Verlauf der Kraftlinien bei

iem Solenoid. Auch die Kurven der Figur 24 (l. c. Tafel II) stellen n Verlauf von Kraftlinien in der Umgebung elektrischer Ströme r, und zwar muß man durch den Wirbelpunkt im Nullpunkt und rch die 8 äußeren Wirbelpunkte Ströme derselben Richtung und rch die 4 dazwischen liegenden Wirbelpunkte Ströme schicken, die n erstgenannten entgegengesetzt gerichtet sind.

Erhalten die linearen Glieder im Zähler und Nenner der rechten ite für eine Singularität, wenn diese in den Nullpunkt verlegt wird, gleiche Koeffizienten, so hat man eine Strömung in einem aniso-ıpen Medium. Man kann die entstehenden Kurven dann auch auf-sen als die Projektionen der Kurven stärksten Falles auf einer iche. Die Differentialgleichung der orthogonalen Trajektorien gibt ı Niveaukurven dieser Fläche. Vergleiche die eingangs erwähnte beit Poincarés.

Rein mathematisch formuliert ist im vorhergehenden die Aufgabe löst, eine Differentialgleichung aufzustellen, die vorgeschriebene irbel- und Knotenpunkte hat. Es lassen sich dann die Sattelpunkte ffinden, die Trennungskurven durch diese zeichnen, und es läßt sich ließlich der Gesamtverlauf qualitativ feststellen.

Die gebräuchlichen Methoden, die besprochenen Kurvenbilder zu den, sind die folgenden. Der nächstliegende Weg ist der der In-gration.[1]) Sehr hübsche Verfahren sind die geometrische Zusammen-zung der Kraftlinienfelder, die die singulären Stellen hervorrufen, d die Superposition der Potentiale.[2]) Man gelangt auch zu der-igen Kurvenbildern durch Betrachtung des reellen und imaginären iles komplexer Funktionen.[3]) Handelt es sich nur um die quali-ive Feststellung des Kurvenverlaufes, so bietet jedenfalls die in ıser Mitteilung benutzte Poincarésche Methode große Vorteile.

Über lineare Kongruenzen.

Von E. Busche.

1.

Die rationalen Zahlen $\frac{y}{x}$, wo x und y ganze positive oder nega-e Zahlen sind, kann man sich dadurch geometrisch veranschau-hen, daß man dem Bruch $\frac{y}{x}$ den Gitterpunkt mit den Koordinaten

1) Siehe z. B. Voigt, Elementare Mechanik S. 357.
2) Maxwell, Treatise on Electricity and Magnetism I.
3) Holzmüller, Theorie der isogonalen Verwandtschaften.

$x|y$ eines rechtwinkligen Koordinatensystems zuordnet. Der Koordinatenanfangspunkt O nimmt dabei eine ausgezeichnete Stellung ein, weil er mit dem unbestimmten Wert $\frac{0}{0}$ zu bezeichnen ist. Alle Gitterpunkte auf derselben Geraden durch O stellen Brüche mit demselben Betrage dar, der durch den ersten Gitterpunkt angegeben wird, den man von O aus auf der Geraden in einer der beiden Richtungen fortschreitend erreicht. Der x-Achse entspricht der Betrag Null, der y-Achse der Betrag Unendlich, den rationalen Richtungen des ersten und dritten Quadranten entsprechen positive, denen des zweiten und vierten Quadranten negative Beträge.

Den aufeinanderfolgenden Gitterpunkten eines Halbstrahles durch den Nullpunkt entsprechen Brüche, die aus dem durch den ersten Gitterpunkt angegebenen reduzierten Bruch durch Erweiterung mit einer ganzen positiven Zahl t hervorgehen. Schreibt man diese Zahl, die gleich dem positiv genommenen größten gemeinsamen Teiler $t = (x, y)$ der Koordinaten des Gitterpunktes ist, an diesen Gitterpunkt, so erhält man die Kroneckersche Ebene, die ich früher behandelt habe.[1]) Im folgenden will ich die vorläufig mit $\frac{y}{x}$ bezeichneten Gitterpunkte in bezug auf einen ganzzahligen positiven Modul m betrachten und ihnen auf diese Weise gewisse ganze Zahlen zuweisen. Da zwei Punkte, deren entsprechende Koordinaten beide (mod m) einander kongruent sind, mit denselben Zahlen bezeichnet werden sollen, so kann man sich auf den ersten Quadranten mit Einschluß der positiven Achsen beschränken. Die Buchstaben bezeichnen demgemäß im folgenden immer nicht negative ganze Zahlen. Die Kongruenzen beziehen sich, wenn nicht ausdrücklich ein anderer Modul angegeben wird, immer auf den Modul m, der deshalb meistens weggelassen wird.

2.

Die lineare Kongruenz

$$(1) \qquad az \equiv b \pmod m, \qquad \text{wo } 0 \leqq a < m, 0 \leqq b < m$$

ist, hat für $(a, m) = 1$ immer eine einzige Lösung $z \equiv \frac{b}{a}$. Diese ganze Zahl z, die $\geqq 0$ und $< m$ angenommen wird, wird an den Punkt $a\ b$ geschrieben, so daß also die Punkte $1|0$, $1|1$, $1|2$, . . ., $1|m-1$ mit den Zahlen 0, 1, 2, . . ., $m-1$ zu bezeichnen sind. Dieselben Zahlen in anderer Reihenfolge stehen an den Punkten $a|0$, $a|1$, . . ., $a|m-1$, und zwar 0 an $a|0$, 1 an $a|a$, 2 an $a|2a$ usw. Dabei ist $ka > m$ durch seinen kleinsten positiven Rest (mod m) zu

1) Math. Annalen, Bd. 60.

ersetzen Es braucht nur die Bezeichnung der Punkte in dem Quadrat Q_m mit den Ecken $0|0$, $m|0$, $m|m$, $0|m$ festgestellt zu werden. In jedem Quadrat, dessen Eckpunkte Koordinaten haben, die beide durch m teilbar sind, kehrt die Bezeichnung in derselben Weise an den homologen Punkten wieder. Zu Q_m werden die auf den Achsen liegenden Seiten gerechnet, die gegenüberliegenden nicht. Die ganze Ebene werde E_m genannt.

Ist $(a, m) = d > 1$, so hat die Kongruenz (1) nur dann Lösungen, und zwar d verschiedene, wenn b durch d teilbar ist. An einen derartigen Punkt $a|b$ schreibt man diese d Zahlen der Größe nach in einer Horizontalreihe hin, z. B. an den Punkt $a|0$ die Zahlen $0, \frac{m}{d}, 2\frac{m}{d}, \ldots, (d-1)\frac{m}{d}$, an $a|a$ die Zahlen $1, \frac{m}{d}+1, 2\frac{m}{d}+1, \ldots, (d-1)\frac{m}{d}+1$ usw. Auf diese Weise werden wieder die Zahlen $0, 1, 2, \ldots, m-1$ auf Gitterpunkte der Strecke von $a|0$ bis $a|m-1$ verteilt, so daß jede der Zahlen einmal vorkommt, aber an jedem der $\frac{m}{d}$ Punkte, deren Ordinate durch d teilbar ist, stehen jetzt d Zahlen, während die übrigen Punkte frei bleiben. Auf der Strecke von $0|0$ bis $0|m-1$ stehen z. B. an $0|0$ die sämtlichen Zahlen $0, 1, 2, \ldots, m-1$, an einem anderen Punkt dieser Strecke steht keine Zahl.

Die bis dahin fertiggestellte Figur unterscheidet sich nicht wesentlich von der „Divisionstabelle“ des Herrn Gabriel Arnoux.[1]) Nun vervollständige ich sie aber in einer Weise, die meines Wissens neu ist, indem ich uneigentliche Lösungen der Kongruenz (1) einführe. Auf diese Lösungen selbst hat schon Gauß in den „Disquisitiones arithmeticae“ hingewiesen. Im Art. 31 sagt er: „Generaliter ex praecedentibus patet, $\frac{b}{a}$ (mod. c) nihil reale significare (aut si quis malit aliquid imaginarii), si a, c habeant divisorem communem, qui ipsum b non metiatur.“ Auch Arnoux spricht sich a. a. O. (Bd. II, S. 20) anscheinend unabhängig von Gauß ähnlich aus: „Cette impossibilité de la division dans certains cas peut s'exprimer en disant que le quotient est imaginaire. Nous pourrons alors regarder, par exemple, le symbole $(\frac{2}{4})$ [es bezieht sich auf den Modul 12] comme exprimant une certaine imaginaire arithmétique, n'ayant d'ailleurs que le nom de commun avec les imaginaires de l'Algèbre.“

---

1) Arithmétique graphique. 2 Bde. Paris 1894 und 1906. Ich bin durch dieses Werk, das ich erst nachträglich kennen gelernt habe, und das andere Ziele hat, als ich im Auge habe, nicht beeinflußt worden.

Gauß und Arnoux geben keine Theorie dieser imaginären Größen, die ich übrigens lieber als uneigentliche oder transfinite Lösungen der Kongruenz (1) oder auch der Einfachheit wegen kurz als transfinite Zahlen bezeichnen will. Sie sind ja eine Verallgemeinerung der Lösung der Gleichung $0 \cdot x = b$ $(b \neq 0)$, die geometrisch gedeutet zu dem unendlich fernen oder uneigentlichen Punkt einer Geraden führt. Es ist nicht auffällig, daß Gauß die transfiniten Lösungen nicht weiter beachtet, da er bekanntlich die aktual unendlichen Größen überhaupt verwarf.[1]) Nachdem aber die Cantorschen transfiniten Zahlen ein fast allgemein anerkanntes Hilfsmittel der Forschung geworden sind, scheint mir der Versuch gerechtfertigt zu sein, auch die uneigentlichen Kongruenzlösungen zu berücksichtigen. Übrigens hat man in der Theorie der Kongruenzgruppen ein gewisses System von p^n Größen (wo p eine Primzahl ist) schon längst durch Hinzunahme eines Elementes ∞ erweitert[2]), das für $n = 1$ nichts anderes ist als eine transfinite Zahl in dem hier gemeinten Sinne. Wenn der Modul eine Primzahl ist, so gibt es, wie aus dem Folgenden hervorgeht, nur eine transfinite Lösung der Kongruenz (1).

3.

Ist p die kleinste Primzahl, die in m aufgeht, also p der kleinste von 1 verschiedene Teiler von m, so sollen nun auch den Kongruenzen $pz \equiv b$, wenn b nicht durch p teilbar ist, ganzzahlige Lösungen zugeschrieben werden. Dann handelt es sich zunächst darum, für diese Lösungen eine passende Bezeichnung zu finden, da das Zeichen ∞ dazu nicht ausreicht, wenn m zusammengesetzt ist. Bisher sind in der Figur nur die Zahlen von 0 bis $m - 1$ benutzt worden. Wenn nun festgesetzt wird, daß zur Angabe einer eigentlichen Lösung der Kongruenz (1) überhaupt nur diese Zahlen genommen werden sollen, so kann man die Zahlen $> m$ verwenden, um die uneigentlichen Lösungen zu bezeichnen. Dabei ist es zweckmäßig, für jeden Teiler von m Zahlen aus einem Intervall von einem Vielfachen von m bis zum nächsten zu benutzen, für den kleinsten Teiler p also Zahlen von m bis $2m - 1$. Die uneigentlichen Lösungen der Kongruenz

1) Auf demselben Standpunkt steht auch Herr H. Poincaré. In „Les mathématiques et la logique", Revue de Métaphysique et de Morale, t. 14, p. 316 sagt er: „Il n'y a pas d'infini actuel: les Cantoriens l'ont oublié, et ils sont tombés dans la contradiction." (Zitiert nach E. Zermelo, Math. Ann., Bd. 65, S. 116.)

2) Vgl. z. B. H. Webers Algebra, Bd. 2, 2. Aufl. [S. 313] oder L. E. Dickson: Linear Groups (Leipz. 1901), S. 260.

$px \equiv b$ sollen die zu dem Teiler p gehörigen Lösungen genannt werden.

Es möge zuerst angenommen werden, daß $\left(p, \frac{m}{p}\right) = 1$ sei. Der Kongruenz $px \equiv 0$ werde, obgleich sie schon p eigentliche Lösungen hat, außerdem noch die transfinite Lösung m zugewiesen. Die Lösung von $px \equiv 1$ kann dann mit $m + 1$ bezeichnet werden[1]), die von $px \equiv 2$ mit $m + 2$ usw., die von $px \equiv \frac{m}{p} - 1$ mit $m + \frac{m}{p} - 1$. Diese Zahlen m, $m + 1, \ldots$ schreibt man an die Punkte $p\,|\,0$, $p\,|\,1, \ldots$, und zwar unter die etwa schon vorhandenen eigentlichen Lösungen. Die Lösung von $px \equiv \frac{m}{p}$ ist wieder gleich m zu setzen. Denn mit pm muß man auch $2pm$, $3pm$, $\ldots$, $p^2m \equiv 0$ setzen, so daß an dem Punkt $p^2\,|\,0$ und deshalb auch an dem homologen Punkt $p^2\,|\,m$ die Zahl m steht. Dieser letztere Punkt liegt aber auf der Geraden des Nullpunktes, die durch $p\,\Big|\,\frac{m}{p}$ geht, und daher muß auch an diesem Punkt die Zahl m und nicht irgendeine andere zu dem Teiler p gehörige Lösung angetroffen werden. Denn die Eigenschaft der Ebene E_m, daß auf derselben Geraden des Nullpunktes die Zahlen, die zu dem Teiler 1 gehören (die eigentlichen Lösungen), an allen Gitterpunkten wiederkehren, muß auf die zu einem beliebigen Teiler gehörigen Lösungen übertragen werden, um den uneigentlichen Lösungen die größtmögliche Analogie mit den eigentlichen Lösungen zu geben. Übrigens würde man, wenn man anders verfahren wollte, für den Fall $m = p$ nicht mit einem Zeichen ∞ auskommen. Der Einwand, den man erheben könnte, daß aus $p \cdot m \equiv 0$ und $p \cdot m \equiv \frac{m}{p}$ folgen würde $\frac{m}{p} \equiv 0$, ist nicht stichhaltig, da ein Teiler des Moduls m an den Eigenschaften der Zahl 0, die transfinite Zahl m an denen des Zeichens ∞ der gewöhnlichen Arithmetik teilnimmt, so daß es nicht überraschen darf, daß das Produkt $p \cdot m$ vieldeutig ist.

Nun ist es klar, daß $px \equiv \frac{m}{p} + 1$, $px \equiv \frac{m}{p} + 2, \ldots$ die Lösungen $m + 1$, $m + 2, \ldots$ haben, und daß sich die uneigentlichen Lösungen

1) Man könnte zweifelhaft sein, ob es nicht angemessener wäre, wenn f die eigentliche Lösung von $px \equiv 1 \left(\mathrm{mod}\ \frac{m}{p}\right)$ ist, der Kongruenz $px \equiv 1 \pmod{m}$ die transfinite Lösung $m + f$ zu geben; es hat sich aber als einfacher erwiesen, sie als $m + 1$ zu definieren. Die Sätze, die ich über die transfiniten Zahlen aufstelle, sind natürlich von ihrer Bezeichnung ganz unabhängig, obgleich diese für die Beweise nicht gleichgültig ist.

$m, m+1, \ldots, m+\frac{m}{p}-1$ überhaupt an der Geraden $x=p$ einfach nach je $\frac{m}{p}$ Gitterpunkten in derselben Weise wiederholen.

In dem bis jetzt betrachteten Fall, wo $\left(p, \frac{m}{p}\right)=1$ ist, sind alle Lösungen insofern als gleichberechtigt anzusehen, als jede von ihnen als einzige Lösung einer Kongruenz auftreten kann. Denn wenn die Lösung m für $pz \equiv 0$ auch mit den eigentlichen Lösungen $0, \frac{m}{p}, 2\frac{m}{p}, \ldots, (p-1)\frac{m}{p}$ zugleich vorkommt, so ist sie doch für $pz \equiv \frac{m}{p}$ die einzige Lösung. Solche Lösungen, die also an einem Punkt allein vorhanden sein können, will ich primitive Lösungen oder Zahlen nennen. Ist dagegen $\left(p, \frac{m}{p}\right)=p$, enthält also der Modul m die Primzahl p mindestens in der zweiten Potenz, so kommt die Zahl m nur an solchen Punkten vor, an denen auch schon Zahlen $<m$ stehen. In diesem Falle würde es also, wenn man nur dafür sorgen wollte, daß jede Kongruenz $pz \equiv b$ mindestens eine Lösung hat, gar nicht nötig sein, z. B. der Kongruenz $pz \equiv 0$ außer ihren eigentlichen Lösungen noch die uneigentliche Lösung m zu geben, denn sie wäre ja auch für $pz \equiv \frac{m}{p}$, wo sie noch auftritt, entbehrlich. Es ist aber bei weitem einfacher, auch in diesem Falle die Lösung m von $pz \equiv 0$ beizubehalten. Eine solche Zahl, die also niemals an einem Punkt allein stehen kann, möge eine imprimitive Lösung heißen. Alle eigentlichen Lösungen sind primitiv; imprimitiv sind für $\left(p, \frac{m}{p}\right)>1$ auch die Lösungen $m+p$ von $pz \equiv p$, ferner $m+2p$ von $pz \equiv 2p$ usw.

Die zu p gehörigen Zahlen kommen auch an den Geraden $x=kp$ $(k=0, 1, 2, \ldots)$ vor und nur an diesen, und zwar in derselben Weise wie die eigentlichen Lösungen der auf den Modul $\frac{m}{p}$ bezüglichen Kongruenzen an den Geraden $x=k$ vorkommen würden. Dabei entspricht der transfiniten Lösung $m+r\left(r=0, 1, 2, \cdots, \frac{m}{p}-1\right)$ (mod m) die eigentliche Lösung $r\left(\text{mod } \frac{m}{p}\right)$.

Das, was über den Teiler p von m ausgesagt worden ist, überträgt sich nun leicht auf den beliebigen Teiler d, so daß an Stelle einer längeren Auseinandersetzung der Anblick der folgenden auf den Modul $m=12$ sich beziehenden Figur treten kann. Wenn d der Größe nach der ϱ^{te} Teiler von m ist, so sind die zu d gehörigen transfiniten Zahlen mit $(\varrho-1)m, (\varrho-1)m+1, \ldots, (\varrho-1)m+\frac{m}{d}-1$ bezeichnet. Eine solche Figur kann mit großer Leichtigkeit ganz mechanisch hergestellt werden. Zur Erläuterung möge bemerkt werden,

laß die Gitterpunkte, an denen die einzelnen Systeme von Lösungen tehen, die Mittelpunkte der kleinen Quadrate sind, und daß an dem Nullpunkt O das folgende System aller überhaupt vorhandenen Lösungen stehen müßte:

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11,
12, 13, 14, 15, 16, 17,
24, 25, 26, 27,
36, 37, 38,
48, 49,
60.

Q_{12}

11	17	27	38	7	49	5	37	25	13	1
10	5, 11 16	26	14, 17 37	2	25, 27 48	10	13, 16 38	26	1, 7 14	2
9	15	3, 7, 11 25	36	9	13, 15, 17 49	3	36	1, 5, 9 27	15	3
8	4, 10 14	24	2, 5, 8, 11 13, 16 38	4	24, 26 48	8	1, 4, 7, 10 14, 17 37	24	2, 8 16	4
7	13	27	37	11	49	1	38	25	17	5
6	3, 9 12	2, 6, 10 26	12, 15 36	6	1,3,5,...,11 12, 14, 16 25, 27 48	6	12, 15 36	2, 6, 10 26	3, 9 12	6
5	17	25	38	1	49	11	37	27	13	7
4	2, 8 16	24	1, 4, 7, 10 14, 17 37	8	24, 26 48	4	2, 5, 8, 11 13, 16 38	24	4, 10 14	8
3	15	1, 5, 9 27	36	3	13, 15, 17 49	9	36	3, 7, 11 25	15	9
2	1, 7 14	26	13, 16 38	10	25, 27 48	2	14, 17 37	26	5, 11 16	10
1	13	25	37	5	49	7	38	27	17	11
0	0, 6 12	0, 4, 8 24	0, 3, 6, 9 12, 15 36	0	0,2,4,...,10 12, 14, 16 24, 26 48	0	0, 3, 6, 9 12, 15 36	0, 4, 8 24	0, 6 12	0

4.

Aus der Figur Q_m ergeben sich unmittelbar einige Sätze über die Systeme von Zahlen, die eine Kongruenz $as \equiv b$ befriedigen. Ein solches System, das an dem Punkt $a|b$ steht, will ich, auch wenn es nur eine einzige Zahl enthält, die dann immer primitiv ist, ein Lösungssystem nennen und es durch den symbolischen Bruch $\frac{b}{a}$ bezeichnen. Daß die Kongruenz $as \equiv b$ unendlich viele kongruente Lösungssysteme besitzt, kommt dadurch zum Ausdruck, daß das Symbol $\frac{b}{a}$ durch jedes andere ersetzt werden kann, dessen Zähler und Nenner mit b bzw. a (mod m) kongruent sind; b und a werden aber im folgenden immer als nicht negativ und $< m$ vorausgesetzt. Man erkennt nun sehr leicht folgende Fundamentaleigenschaften der Figur Q_m.

1. Q_m ist symmetrisch in bezug auf den Punkt $\frac{m}{2}|\frac{m}{2}$, abgesehen von den Systemen auf den Achsen.

2. Ist d ein Teiler von m, $a = kd$ und $(a, m) = d$, so trägt die Gerade $x = a$ dieselben Systeme wie die Gerade $x = d$, nur in anderer Reihenfolge.

3. Das System $\frac{b}{a}$ besteht aus $T(a, b, m)$ Horizontalreihen, wo $T(a, b, m)$ die Teileranzahl des größten gemeinsamen Teilers (a, b, m) ist. Jede solche Horizontalreihe enthält nämlich Lösungen, die zu einem Teiler von (a, m) gehören, und zwar die erste solche, die zu $\frac{(a, m)}{(a, b, m)}$, die folgenden solche, die zu den in (a, m) aufgehenden Vielfachen dieses Teilers gehören. Die letzte Horizontalreihe besteht immer aus einer zu (a, m) gehörigen Zahl.

4. Die Zahlen aller Horizontalreihen der an den Punkten der Geraden $x = a$ vorkommenden Systeme bilden arithmetische Reihen mit der Differenz $\frac{m}{(a, m)}$, und zwar enthält, wenn die Zahlen der Horizontalreihe zu dem Teiler δ von (a, m) gehören, diese Reihe $\frac{(a, m)}{\delta}$ Zahlen. Ist δ der kleinste Teiler, zu dem Zahlen des Systems gehören, also $\delta = \frac{(a, m)}{(a, b, m)}$, so ist $\frac{(a, m)}{\delta} = (a, b, m)$. So viele Zahlen stehen deshalb in der ersten Horizontalreihe, in den folgenden ist die Anzahl der Reihe nach gleich den nach abnehmender Größe geordneten echten Teilern von (a, b, m).

5. Deshalb besteht das System $\frac{b}{a}$ aus $\Phi(a, b, m)$ Zahlen, wo $\Phi(a, b, m)$ die Summe aller Teiler von (a, b, m) angibt.

6. Da an $0|0$ alle Zahlen vorkommen, so gibt es im ganzen $\Phi(m)$ verschiedene Lösungen aller Kongruenzen $ax \equiv b$.

Ich füge noch die folgende Bemerkung hinzu, obgleich sie für das Folgende nicht von Wichtigkeit ist. Die Figur Q_m ist, abgesehen von der Bezeichnung, genau dieselbe wie die, die ich in einer Arbeit „Über Gitterpunkte in der Ebene“[1]) benutzt habe, um eine Übersicht über die sämtlichen Einteilungen der Gitterpunktebene in Parallelogramme vom Inhalt m zu gewinnen, so daß ich mich geradezu auf diese Arbeit wegen der eben angegebenen und einiger folgender Eigenschaften (Art. 6, 7) von Q_m hätte beziehen können. Ich habe das aber unterlassen, um die vorliegende Abhandlung auch ohne Kenntnis der anderen leicht lesbar zu machen. Daß diese Figur zu verschiedenen Zwecken verwendbar ist, erklärt sich daraus, daß sie — und nicht die einfache parallelogrammatische Zerlegung der Ebene — die vollständige Verallgemeinerung der äquidistanten Punktreihe einer Geraden ist.

5.

Die Aufgabe, alle Lösungen der Kongruenz $ax \equiv b$ zu finden ist gleichbedeutend mit der Bestimmung des an $a|b$ stehenden Lösungssystems und daher jetzt leicht zu erledigen. Wenn $(a, m) = d$ und $a = kd$ ist, so ist $\left(k, \frac{m}{d}\right) = 1$. An der Geraden $x = a$ stehen also (vgl. die Eigenschaft 2 im vorigen Art.) dieselben Zahlen wie an $x = d$, also alle, die zu Teilern δ von d gehören. Bezeichnet man den Überschuß einer zu dem Teiler δ, der unter den der Größe nach geordneten Teilern von m der ϱ^{te} sei, gehörigen Zahl über $(\varrho - 1)m$ kurz als den Rest der Zahl, so stehen an den Geraden $x = a$ und $x = d$ die zu δ gehörigen Zahlen mit dem Rest 0 an den Punkten, deren Ordinate b ein Vielfaches von $\frac{m}{\delta}$ ist, aber während diese Zahlen an $x = d$ der Reihe nach in Abständen gleich $\frac{d}{\delta}$ aufeinander folgen, geschieht das an $x = a$ im Abstande $k \cdot \frac{d}{\delta}$. Da die Zahlen eines Punktes, die zu demselben δ gehören, an $x = d$ arithmetische Reihen von der Differenz $\frac{m}{d}$ bilden, und da k relativ prim zu $\frac{m}{d}$ ist, so ist dasselbe an $x = a$ der Fall, und der Rest $\left(\text{mod } \frac{m}{d}\right)$ der zu δ gehörigen Zahlen eines Punktes $a|b$, wo $b \equiv 0 \left(\text{mod } \frac{d}{\delta}\right)$ ist, ergibt sich aus dem

1) Journal für Math., Bd. 131.

Rest der entsprechenden Zahlen an $d|b$ durch Multiplikation mit der endlichen Zahl $k' \equiv \frac{1}{k} \pmod{\frac{m}{d}}$.

Hieraus und aus Nr. 3 und 4 von Art. 4 folgt das folgende **Verfahren zur Bestimmung der Lösungen von** $az \equiv b \pmod{m}$:

Man bestimme $(a, m) = d$, $\frac{a}{d} = k$, $(a, b, m) = (d, b) = D$. Dann **teile man** d **durch alle Teiler von** D. Die Quotienten δ geben die **Teiler an, zu denen die gesuchten Lösungen gehören. Darauf teile man auch** b **durch die Teiler von** D, bestimme die Reste der Quotienten $\pmod{\frac{m}{d}}$ **und multipliziere sie mit** k'. Die Reste der Produkte $\pmod{\frac{m}{d}}$ **sind die Reste der Lösungen.**

Ist z. B. $m = 24$, $a = 18$, $b = 9$, also $d = (18, 24) = 6$, $\frac{a}{d} = k = 3$, $D = (6, 9) = 3$, $\frac{m}{d} = 4$, **so ist 6 durch die Teiler 3 und 1 von 3 zu teilen. Die gesuchten Lösungen gehören also zu den Teilern 2 und 6. Ferner teilt man 9 durch 3 und 1. Die Reste der Quotienten (mod 4) sind 3 und 1. Diese Reste mit** $k' \equiv \frac{1}{3} \equiv 3 \pmod 4$ **multipliziert ergeben die Reste (mod 4) 1 und 3. Die zu dem Teiler 2 gehörigen Lösungen sind, weil 2 der zweite Teiler von 24 ist, 24, 25, 26, . . ., 35.** Von ihnen sind 25, 29, 33, weil sie $\equiv 1 \pmod 4$ sind, die zu 2 gehörigen Lösungen von $18z \equiv 9 \pmod{24}$. Die zu 6 gehörigen Lösungen sind, weil 6 der fünfte Teiler von 24 ist, 96, 97, 98, 99. Weil von diesen Zahlen $99 \equiv 3 \pmod 4$ ist, ist 99 die zu 6 gehörige Lösung von $18z \equiv 9 \pmod{24}$. An dem Punkt $18|9$ von Q_{24} steht also das Lösungssystem $\left(\begin{smallmatrix} 25, & 29, & 33 \\ & 99 & \end{smallmatrix}\right)$.

Das Verfahren gilt auch für $0 \cdot z \equiv b$. In diesem Falle ist $d = m$. Für $b > 0$ sind alle Lösungen uneigentlich, für $b = 0$ ist jede Zahl eine Lösung.

6.

Die Anzahl aller Zahlen in Q_m ist schon gleich der Teilersumme $\Phi(m)$ gefunden worden. Um die Anzahl $\psi(m)$ der primitiven Zahlen zu finden, überzeugt man sich ohne Schwierigkeit davon, daß, wenn τ^2 ein quadratischer Teiler von m ist, jeder primitiven Zahl in $Q_{\frac{m}{\tau^2}}$ eindeutig eine imprimitive Zahl in Q_m entspricht, und zwar eine solche, die an Punkten steht, deren (x, y) durch τ teilbar ist, während sie an einem Punkt, für den (x, y) nicht durch τ teilbar ist, nicht vorkommt. Einer etwa vorhandenen imprimitiven Zahl in $Q_{\frac{m}{\tau^2}}$ entspricht eine imprimitive Zahl in Q_m, die aber nur an solchen Punkten

steht, deren (x, y) durch ein Vielfaches von τ teilbar ist. Diese Zahl wird also bei der entsprechenden Abzählung für einen größeren quadratischen Teiler als τ^2 gezählt. Hieraus folgt, daß

$$(1) \qquad \sum_{\tau} \psi\left(\frac{m}{\tau^2}\right) = \Phi(m)$$

ist, wo τ alle Teiler von m durchläuft, deren Quadrat auch in m aufgeht. Unter Benutzung des sogenannten Moebiusschen Zeichens $\mu(\tau)$, das $= 1$ ist für $\tau = 1$, gleich $+1$, wenn τ aus einer geraden Anzahl von verschiedenen Primfaktoren, $= -1$, wenn τ aus einer ungeraden Anzahl von verschiedenen Primfaktoren zusammengesetzt ist, und $= 0$, wenn τ einen von 1 verschiedenen quadratischen Faktor hat, findet man

$$(2) \qquad \psi(m) = \sum_{\tau} \mu(\tau) \cdot \Phi\left(\frac{m}{\tau^2}\right).$$

Der Beweis für diese Gleichung ergibt sich, wenn man rechts nach (1) alle Φ durch ψ ausdrückt, aus der Fundamentaleigenschaft des Zeichens $\mu(\tau)$, wonach $\sum_{\delta/\tau} \mu(\delta) = 0$ ist. Da nun Φ die Eigenschaft hat, die ich, weil sie noch öfter gebraucht werden wird, kurz als Multiplizierbarkeit bezeichnen will, daß nämlich $\Phi(n) \cdot \Phi(n') = \Phi(nn')$ ist, wenn n und n' teilerfremd sind, und da μ ebenfalls multiplizierbar ist, so gilt nach (2) dasselbe für $\psi(m)$. Für eine Primzahlpotenz ist nun nach (2)

$$\psi(p^\alpha) = \Phi(p^\alpha) - \Phi(p^{\alpha-2}),$$

oder

$$\psi(p^\alpha) = p^\alpha + p^{\alpha-1} = p^\alpha\left(1 + \frac{1}{p}\right),$$

und daher ist

$$\psi(m) = m\left(1 + \frac{1}{p_1}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{p_2}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{p_\nu}\right),$$

wenn $p_1, p_2, \ldots, p_\nu$ die verschiedenen in m aufgehenden Primfaktoren sind.

Die Anzahl der primitiven Lösungen aller Kongruenzen $as \equiv b \pmod m$ $(a, b = 0, 1, 2, \ldots, m-1)$ ist also gleich der bekannten Funktion $\psi(m)$.

7.

Es soll nun die Anzahl der primitiven Lösungen einer bestimmten Kongruenz $as \equiv b$ bestimmt werden, d. h. die Anzahl der primitiven Zahlen an dem Punkt $a|b$. Bezeichnet man sie mit $\Psi((a, b); m)$, so ist $\Psi\left(\left(\frac{a}{\tau}, \frac{b}{\tau}\right); \frac{m}{\tau^2}\right)$ die Anzahl derjenigen imprimitiven Zahlen an $a|b$,

die nur an solchen Punkten vorkommen, deren (x, y) durch τ teilbar ist, wie sofort wieder durch Betrachtung von $Q_{\frac{m}{\tau^2}}$ erkannt wird. Daher ist

$$\sum_{\tau} \Psi\left(\left(\frac{a}{\tau}, \frac{b}{\tau}\right); \frac{m}{\tau^2}\right) = \Phi(a, b, m),$$

nämlich gleich der Anzahl aller an $a|b$ stehenden Zahlen. Daraus folgt

$$\Psi((a, b); m) = \sum_{\tau} \mu(\tau) \cdot \Phi\left(\frac{a}{\tau}, \frac{b}{\tau}, \frac{m}{\tau^2}\right).$$

Die Funktion Ψ ist demnach multiplizierbar. Für

$$m = p^{\alpha}(\alpha \gtrless 2),\ (a, b) = cp^{\beta}(\beta \gtrless 1;\ (c, p) = 1)$$

erhält man

$$\begin{aligned} \Psi(cp^{\beta}; p^{\alpha}) &= \Phi(p^{\beta}, p^{\alpha}) - \Phi(p^{\beta-1}, p^{\alpha-1}) \\ &= p^{\beta}, \quad \text{wenn} \quad \beta < \alpha, \\ &= p^{\alpha} + p^{\alpha-1} = \psi(p^{\alpha}), \quad \text{wenn} \quad \alpha \lessgtr \beta \quad \text{ist.} \end{aligned}$$

Es ist daher

$$\Psi(cp^{\beta}; p^{\alpha}) = \frac{\psi(p^{\alpha})}{\psi\left(\frac{p^{\alpha}}{(p^{\beta}, p^{\alpha})}\right)},$$

und damit ist der Satz bewiesen:

Die Anzahl der primitiven Lösungen der Kongruenz $az \equiv b \pmod{m}$ ist $\dfrac{\psi(m)}{\psi\left(\frac{m}{(a, b, m)}\right)}$.

Für $m = 12$ z. B. und $a = 6$, $b = 6$ ist diese Anzahl $= \frac{\psi(12)}{\psi(2)} = 8$, wie es auch die Figur Q_{12} ergibt, da nur die Zahlen 12, 14, 16 und 48 imprimitiv sind.

Ist (a, b) durch τ teilbar, so ist die Anzahl solcher imprimitiver Zahlen an $a|b$, die an den Punkten $x|y$ mit durch τ teilbarem (x, y) vorkommen, wie man durch Heranziehung von $Q_{\frac{m}{\tau^2}}$ leicht einsieht, gleich

$$\frac{\psi\left(\frac{m}{\tau^2}\right)}{\psi\left(\frac{\frac{m}{\tau^2}}{\left(\frac{a}{\tau}, \frac{b}{\tau}, \frac{m}{\tau^2}\right)}\right)} = \frac{\psi\left(\frac{m}{\tau^2}\right)}{\psi\left(\frac{m}{(a, b)\tau, m}\right)}.$$

Indem man die Anzahl der Zahlen an $a|b$ auf doppelte Weise berechnet, ergibt sich daraus beiläufig der Satz

$$\sum_{\tau} \frac{\psi\left(\frac{m}{\tau^2}\right)}{\psi\left(\frac{m}{(a,b)\,\tau,m}\right)} = \Phi(a,b,m),$$

wo τ die Teiler von (a, b) durchläuft, deren Quadrat in m aufgeht. Für $a = b = 0$ erhält man hieraus wieder die Gleichung (1) des vorigen Artikels.

8.

Zwei verschiedene Kongruenzen $az \equiv b$ können, wie die Figur Q_m zeigt, dasselbe Lösungssystem haben. Es ist deshalb zu untersuchen, wieviel verschiedene Lösungssysteme es gibt. Die Anzahl der verschiedenen Punkte, die nur mit einer Zahl bezeichnet sind, ist schon in Art. 6 bestimmt und gleich $\psi(m)$ gefunden worden. Durch Vergleichung von $Q_{\frac{m}{d}}$ mit Q_m kann man dieses Resultat sofort dahin verallgemeinern, daß die Anzahl der verschieden bezeichneten Punkte, für die $(a, b, m) = d$ ist, durch $\psi\left(\frac{m}{d}\right)$ angegeben wird. Also:

Die Anzahl der Kongruenzen $az \equiv b \pmod m$ $(a,b = 0,1,2,\ldots,m-1)$, von denen nicht zwei dasselbe Lösungssystem haben, ist

$$F(m) = \sum_{d/m} \psi(d).$$

Andere Beweise dieses Satzes, bei denen $Q_{\frac{m}{d}}$ nicht benutzt wird, folgen aus den Schlußbemerkungen von Art. 12 und 13. Die Funktion $F(m)$, die multiplizierbar ist, kann man durch die Primfaktoren von m ausdrücken, da $\sum_{d/p^\alpha} \psi(p^\alpha)$ leicht zu berechnen ist. Ist $m = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_\nu^{\alpha_\nu}$, so findet man

$$F(m) = \prod_{i=1}^{\nu} \frac{p_i^{\alpha_i+1} + p_i^{\alpha_i} - 2}{p_i - 1}.$$

9.

Im vorhergehenden sind die nächstliegenden Fragen, die sich an die Einführung der transfiniten Lösungen einer Kongruenz $az \equiv b$ knüpfen, erledigt worden. Nun soll die Struktur der Figur Q_m etwas genauer betrachtet werden. Dabei wird man auf einige neue zahlentheoretische Funktionen geführt. Manche — übrigens größtenteils bekannte — Formeln über die Funktionen Φ, φ, T lassen sich schon mittelst der bisherigen Resultate aus der Figur ablesen, wobei ich nicht verweilen will.

Nach der Eigenschaft 2 im Art. 4 kann man sich bei der Untersuchung der Lösungssysteme $\frac{b}{a}$ auf die Systeme $\frac{b}{d}$ beschränken, wo d ein Teiler von m ist. Zuerst mögen die $\frac{m}{d}$ zu dem Teiler d selbst gehörigen Lösungen auf der Geraden $x = d$ hinsichtlich ihrer Primitivität untersucht werden. Ist d der ϱ^{te} Teiler von m, so sind die Zahlen $(\varrho - 1)m + r\left(r = 0, 1, 2, \ldots \frac{m}{d} - 1\right)$ diese Lösungen. Die Zahl N mit dem Rest r steht an den Punkten

$$d \mid b = d \,\Big|\, k \cdot \frac{m}{d} + r = d \,\Big|\, k \cdot \frac{m}{d} + N - (\varrho - 1)m. \quad (k = 0, 1, 2, \ldots)$$

Daher ist $\left(d, b, \frac{m}{d}\right) = \left(d, N, \frac{m}{d}\right)$, und (d, b) hat mithin mit $\frac{m}{d}$ denselben größten gemeinsamen Teiler wie N mit $\left(d, \frac{m}{d}\right)$. Die Zahlen zerfallen also in $\frac{\frac{m}{d}}{\left(d, \frac{m}{d}\right)}$ Abteilungen von je $\left(d, \frac{m}{d}\right)$, und wenn τ ein Teiler von $\left(d, \frac{m}{d}\right)$ ist, so haben $\varphi\left(\frac{\left(d, \frac{m}{d}\right)}{\tau}\right)$ Zahlen einer Abteilung mit $\left(d, \frac{m}{d}\right)$ den größten gemeinsamen Teiler τ. Diese Zahlen, deren es demnach $\frac{\frac{m}{d}}{\left(d, \frac{m}{d}\right)} \varphi\left(\frac{\left(d, \frac{m}{d}\right)}{\tau}\right)$ gibt, stehen also nur an solchen Punkten $d\ b$, für die (d, b) mit $\frac{m}{d}$ den größten gemeinsamen Teiler τ hat. Für $\tau = 1$ folgt, daß es

$$(1) \qquad \frac{\frac{m}{d}}{\left(d, \frac{m}{d}\right)} \cdot \varphi\left(d, \frac{m}{d}\right)$$

primitive zu d gehörige Zahlen gibt. Denn wenn b eine Zahl ist, für die man $\left(d, b, \frac{m}{d}\right) = 1$ hat, so kann zwar $(d, b) > 1$ sein, so daß die zu d gehörige Zahl an $d \mid b$ nicht allein steht, aber dieselbe Zahl steht dann auch an $d \mid b + k \cdot \frac{m}{d}$. Setzt man $b' = b + k \cdot \frac{m}{d} = \left(b, \frac{m}{d}\right) \cdot (q + ks)$, so ist nach Voraussetzung $\left(b, \frac{m}{d}\right)$ relativ prim zu d und in $q + ks$ kann k, weil $(q, s) = 1$ ist, so bestimmt werden, daß auch $(d, q + ks) = 1$ und damit $(d, b') = 1$ ist. Die an $d \mid b$ stehende zu d gehörige Zahl steht also an $d\ b'$ allein und ist deshalb primitiv.

Weil die Anzahl aller primitiven Zahlen in Art. 6 schon gleich $\psi(m)$ gefunden wurde, folgt aus (1) die Gleichung

$$\sum_{d/m} \frac{\frac{m}{d}}{\left(d, \frac{m}{d}\right)} \varphi\left(d, \frac{m}{d}\right) = \psi(m),$$

die zuerst von Herrn R. Dedekind[1]) angegeben ist.

Die an $d \mid b$ stehenden Zahlen, die zu dem Teiler δ von d gehören, sind dann die kleinsten an $d \mid b$ vorkommenden Zahlen (d. h. δ ist der kleinste unter den Teilern, zu denen an $d \mid b$ Zahlen gehören), wenn $(d, b) = \frac{d}{\delta}$ ist (vgl. Satz 3 von Art. 4). Die zu δ gehörigen Zahlen folgen an $x = d$ im Abstande $\frac{d}{\delta}$ aufeinander, so daß an dem Punkt $d \mid b = d \left| \left(k\frac{m}{d} + r\right)\frac{d}{\delta}\right.$ die Zahlen stehen, die $\left(\mathrm{mod}\ \frac{m}{d}\right)$ den Rest r haben. Sollen nun diese Zahlen die kleinsten an $d \mid b$ sein, so muß

$$\left(d, \left(k\frac{m}{d} + r\right)\frac{d}{\delta}\right) = \frac{d}{\delta}\left(\delta, k\frac{m}{d} + r\right) = \frac{d}{\delta}$$

sein. Also muß sich k so bestimmen lassen, daß δ und $k \cdot \frac{m}{d} + r$ relativ prim sind, d. h. r muß teilerfremd zu $\left(\delta, \frac{m}{d}\right)$ sein. Bedenkt man noch, daß zwei Lösungssysteme, bei denen die ersten Horizontalreihen übereinstimmen, identisch sind, so folgt der Satz:

Die Anzahl der verschiedenen an der Geraden $x = d$ vorkommenden Lösungssysteme, deren kleinste Zahlen zu dem Teiler δ von d gehören, ist gleich

$$\frac{\frac{m}{d}}{\left(\delta, \frac{m}{d}\right)} \varphi\left(\delta, \frac{m}{d}\right). \tag{2}$$

Für $\delta = d$ erhält man wieder die Anzahl der primitiven zu d gehörenden Zahlen.

10.

Jetzt soll die Anzahl der verschiedenen Lösungssysteme in Q_m bestimmt werden, deren kleinste Zahl zu einem bestimmten Teiler δ von m gehört. Unter den Systemen an den Punkten $d \mid b$

1) Schreiben an Herrn Borchardt über die Theorie der elliptischen Modul-Funktionen. Journal für Math. Bd. 83. S. 288. Vgl. auch H. Weber: Elliptische Funktionen und algebraische Zahlen (Braunschweig 1891). S. 244.

$(b = 0, 1, 2, \ldots, m-1)$ sind, wenn d ein in m enthaltenes Vielfaches von δ ist, nach (2) des Art. 9 von solchen Systemen $\frac{\frac{m}{d}}{\left(\delta, \frac{m}{d}\right)} \varphi\left(\delta, \frac{m}{d}\right)$ vorhanden, im ganzen also

$$H_\delta(m) = \sum_d \frac{\frac{m}{d}}{\left(\delta, \frac{m}{d}\right)} \varphi\left(\delta, \frac{m}{d}\right), \quad \left(d = t\delta;\ t \text{ ein Teiler von } \frac{m}{\delta}\right)$$

oder

$$H_\delta(m) = \sum_{t/\frac{m}{\delta}} \frac{\frac{m}{\delta t}}{\left(\delta, \frac{m}{\delta t}\right)} \varphi\left(\delta, \frac{m}{\delta t}\right) = \sum_{t/\frac{m}{\delta}} \frac{t}{(\delta, t)} \varphi(\delta, t),$$

da $\frac{m}{\delta t}$ mit t alle Teiler von $\frac{m}{\delta}$ durchläuft. Dieser Ausdruck für $H_\delta(m)$ kann weiter ausgerechnet werden, da er multiplizierbar ist. Für die Primzahlpotenz p^α findet man, wenn $\delta = p^\beta$, $\frac{m}{\delta} = p^{\alpha-\beta}$ ist, für $0 < \beta \lesseqgtr \alpha$

$$H_{p^\beta}(p^\alpha) = \frac{1}{(p^\beta, 1)} \cdot 1 + \frac{p}{(p^\beta, p)} \cdot \varphi(p^\beta, p)$$
$$+ \frac{p^2}{(p^\beta, p^2)} \varphi(p^\beta, p^2) + \cdots + \frac{p^{\alpha-\beta}}{(p^\beta, p^{\alpha-\beta})} \varphi(p^\beta, p^{\alpha-\beta}).$$

Ist nun erstens $p^\beta \gtreqless p^{\alpha-\beta}$, so ergibt sich

$$(1)\quad H_{p^\beta}(p^\alpha) = 1 + \varphi(p) + \varphi(p^2) + \cdots + \varphi(p^{\alpha-\beta}) = p^{\alpha-\beta} = \frac{m}{\delta},$$

und wenn zweitens $p^\beta < p^{\alpha-\beta}$ ist, so ist

$$H_{p^\beta}(p^\alpha) = 1 + \varphi(p) + \cdots + \varphi(p^\beta) + p \cdot \varphi(p^\beta) + p^2 \varphi(p^\beta) + \cdots + p^{\alpha-2\beta} \varphi$$
$$(1')\qquad = 1 + \varphi(p) + \cdots + \varphi(p^\beta) + \varphi(p^{\beta+1}) + \varphi(p^{\beta+2}) + \cdots + \varphi(p^{\alpha-}$$
$$= p^{\alpha-\beta} = \frac{m}{\delta}.$$

Ist aber $\delta = 1$, $\frac{m}{\delta} = p^\alpha$, so erhält man

$$(2)\qquad H_1(p^\alpha) = 1 + p + p^2 + \cdots + p^\alpha = \Phi(p^\alpha) = \Phi\left(\frac{m}{\delta}\right).$$

Nun will ich im Anschluß an eine Bezeichnung von Herrn P. Epstein[1]) den größten in einem Teiler d einer Zahl m enthaltenen

1) Theorie der Potenzreste für zusammengesetzte Moduln. Archiv der Math. u. Phys. III. Reihe, Bd. 12, S. 145. Ich bemerke, daß der von mir benutzte in d enthaltene Hauptteiler $(d)_h$ nicht mit dem zu d gehörigen Hauptteiler (d) des Herrn Epstein identisch ist; d ist ein Teiler von (d), dagegen ein Vielfaches von $(d)_h$.

Teiler, der zu seinem in bezug auf m komplementären Teiler relativ prim ist, den in d enthaltenen Hauptteiler von m nennen und mit $(d)_h$ bezeichnen. Es ist dann $d = (d)_h \cdot (d)_n$, und $(d)_n$ möge der in d enthaltene Nebenteiler heißen. Für $m = p^\mu$ ist $(d)_h = 1$, $(d)_n = p^\nu$, wenn $d = p^\nu < p^\mu$ ist, dagegen $(d)_h = p^\mu$, $(d)_n = 1$, wenn $d = p^\mu$ ist.

Die Gleichungen (1), (1'), (2) lassen sich hiernach zusammenfassen in

$$H_{p^\beta}(p^\alpha) = \left(\frac{p^\alpha}{p^\beta}\right)_n \cdot \Phi\left(\frac{p^\alpha}{p^\beta}\right)_h,$$

wo die eigentlich zu setzende zweite Klammer bei Φ weggelassen ist. Diese Gleichung überträgt sich auf ein beliebiges m und einen beliebigen Teiler δ von m:

Die Anzahl aller verschiedenen Lösungssysteme $\frac{b}{a}$, deren kleinste Zahlen zu dem Teiler δ gehören, ist

$$H_\delta(m) = \left(\frac{m}{\delta}\right)_n \cdot \Phi\left(\frac{m}{\delta}\right)_h, \tag{3}$$

wo $\frac{m}{\delta} = \left(\frac{m}{\delta}\right)_h \cdot \left(\frac{m}{\delta}\right)_n$ die Zerlegung von $\frac{m}{\delta}$ in den Haupt- und Nebenteiler von m ist.

Ist z. B. $m = 3600$ und $\delta = 24$, so ist $\frac{m}{\delta} = 150 = 25 \cdot 6$, wo 25 der in 150 enthaltene Hauptteiler von 3600, 6 der Nebenteiler ist. Dann ist $H_{24}(3600) = 6 \cdot \Phi(25) = 6 \cdot 31 = 186$. Durch Ausrechnung von $\sum_{t/150} \frac{t}{(24, t)} \varphi(24, t)$ findet man dieselbe Zahl.

Für $\delta = 1$ ergibt sich aus (3)

$$H_1(m) = \Phi(m),$$

was man leicht direkt bestätigt. Für $\delta = m$ erhält man $H_m(m) = 1$; in diesem Falle kommt auch nur als einziges System die eine zu dem Teiler m gehörige (primitive) Zahl in Betracht.

Zwischen den Funktionen $H_\delta(m)$ und ψ besteht die Beziehung

$$\sum_{\delta/m} H_\delta(m) = \sum_{\delta/m} \psi(\delta), \tag{4}$$

weil beide Summen gleich der Anzahl $F(m)$ aller verschiedenen Lösungssysteme sind.

11.

Aus der Anzahl $\frac{\frac{m}{d}}{\left(\delta, \frac{m}{d}\right)} \varphi\left(\delta, \frac{m}{d}\right)$ aller verschiedenen Systeme $\frac{b}{d}$ $(b = 0, 1, 2, \ldots, m-1)$, deren kleinste Zahlen zu dem Teiler δ von d gehören, findet man die Anzahl aller verschiedenen Lösungssysteme an der Geraden $x = d$ gleich

$$G_d(m) = \sum_{\delta/d} \frac{\frac{m}{d}}{\left(\delta, \frac{m}{d}\right)} \varphi\left(\delta, \frac{m}{d}\right).$$

Auch diese Funktion läßt sich, weil sie multiplizierbar ist, weiter ausrechnen. Für $m = p^\alpha$, $d = p^\beta < p^\alpha$, $\frac{m}{d} = p^{\alpha-\beta}$ findet man

$$\begin{aligned} G_{p^\beta}(p^\alpha) &= \frac{p^{\alpha-\beta}}{(1, p^{\alpha-\beta})} \varphi(1, p^{\alpha-\beta}) + \frac{p^{\alpha-\beta}}{(p, p^{\alpha-\beta})} \varphi(p, p^{\alpha-\beta}) + \cdots + \frac{p^{\alpha-\beta}}{(p^\beta, p^{\alpha-\beta})} \varphi(p^\beta, p^{\alpha-\beta}) \\ &= p^{\alpha-\beta} + p^{\alpha-\beta-1}(p-1) + p^{\alpha-\beta-1}(p-1) + \cdots + p^{\alpha-\beta-1}(p-1) \\ &= p^{\alpha-\beta} + \beta \cdot p^{\alpha-\beta-1}(p-1) \\ &= p^{\alpha-\beta} \cdot \left(1 + \beta \cdot \frac{p-1}{p}\right), \end{aligned}$$

einerlei, ob β oder $\alpha - \beta$ die größere von beiden Zahlen ist. Ist aber $d = p^\alpha$, $\frac{m}{d} = 1$, so ist

$$G_{p^\alpha}(p^\alpha) = 1 + 1 + 1 + \cdots + 1 = \alpha + 1 = T(p^\alpha) = p^{\alpha-\alpha} \cdot T(p^\alpha).$$

Definiert man also eine Funktion $\chi(n)$ der Zahl $n = p_1^{\beta_1} \cdot p_2^{\beta_2} \cdots$ durch die Gleichung

$$\chi(n) = \left(1 + \beta_1 \frac{p_1 - 1}{p_1}\right) \cdot \left(1 + \beta_2 \frac{p_2 - 1}{p_2}\right) \cdots \left(1 + \beta_\nu \frac{p_\nu - 1}{p_\nu}\right),$$

so ist die Anzahl der verschiedenen Lösungssysteme an d Geraden $x = d$

$$G_d(m) = \frac{m}{d} T(d)_h \cdot \chi(d)_n. \tag{1}$$

Dabei ist $d = (d)_h \cdot (d)_n$ die Zerlegung von d in den Haupt- und Nebenteiler von m.

Ist z. B. $m = 720$, $d = 48$, $\frac{m}{d} = 15$, so ist $(d)_h = 16$, $(d)_n = 3$, also $G_{48}(720) = \frac{720}{48} \cdot T(16) \cdot (1 + \frac{2}{3}) = 125$. Dasselbe ergibt sich, wenn man $\sum_{\delta/48} \frac{15}{(\delta, 15)} \varphi(\delta, 15)$ direkt ausrechnet.

Für die Funktion $G_d(m)$ gilt aus demselben Grunde, der bei der Gleichung (4) des vorigen Art. angegeben wurde, die Beziehung

$$\sum_{d/m} G_d(m) = \sum_{d/m} \psi(d).$$

12.

Die Kongruenz $as \equiv b$ hat, wenn $(a, b, m) + 1$ ist, mit anderen Kongruenzen Lösungen gemeinsam, oder in dem Lösungssystem $\frac{b}{a}$ sind, wie ich mich ausdrücken will, andere Lösungssysteme enthalten. Es ist von Interesse, die Anzahl dieser Systeme zu bestimmen, wobei $\frac{b}{a}$ selbst mitgezählt werden soll.

Unter einer Geraden der Ebene E_m werde eine gerade Linie verstanden, auf der zwei, also auch unendlich viele Gitterpunkte liegen. Geht eine Gerade durch einen mit $0 \mid 0$ homologen Punkt, z. B. durch den Nullpunkt selbst, so steht an jedem ihrer Gitterpunkte ein und dieselbe primitive Zahl, durch die die Gerade, die ich eine Nullgerade nennen will, gekennzeichnet wird. Es gibt also $\psi(m)$ verschiedene Nullgeraden. Durch einen Punkt $a \mid b$ gehen so viele verschiedene Nullgeraden, als an ihm primitive Zahlen stehen, also nach Art. 7

$$\frac{\psi(m)}{\psi\left(\frac{m}{(a, b, m)}\right)}.$$

Jede Nullgerade führt dem Punkt gewissermaßen eine primitive Zahl zu. Ist ferner $(a, b, m) = D$ und δ ein Teiler von D, so werden dem Punkt auch solche Lösungssysteme zugeführt, die an Punkten mit durch δ teilbarem (x, y, m) stehen, aber immer so viele Nullgerade führen $a \mid b$ dasselbe derartige System zu, wie die Anzahl der verschiedenen Nullgeraden durch einen mit diesem System bezeichneten Punkt beträgt. An $a \mid b$ kommen also nur

$$\frac{\psi(m)}{\psi\left(\frac{m}{D}\right)} : \frac{\psi(m)}{\psi\left(\frac{m}{\delta}\right)} = \frac{\psi\left(\frac{m}{\delta}\right)}{\psi\left(\frac{m}{D}\right)}$$

verschiedene Systeme $\frac{y}{x}$ vor, für die $(x, y, m) = \delta$ ist. Daß wirklich jede primitive Zahl in $\frac{b}{a}$ zu einem in $\frac{b}{a}$ enthaltenen System $\frac{y}{x}$, für das $(x, y, m) = \delta$ ist, Veranlassung gibt, folgt daraus, daß auf jeder Nullgeraden genau ein solches System vorhanden ist, das auf der

Geraden bei jedem Punkt, dessen (a, b, m) durch δ teilbar ist, wiederkehrt. Die Anzahl der verschiedenen in $\frac{b}{a}$ enthaltenen Systeme ist

$$K_D(m) = \sum_{\delta/D} \frac{\psi\left(\frac{m}{\delta}\right)}{\psi\left(\frac{m}{D}\right)}.$$

Auch diese Summe kann berechnet werden, weil sie multiplizierbar ist. Für $m = p^\alpha$, $D = p^\beta < p^\alpha$ erhält man

$$K_{p^\beta}(p^\alpha) = \frac{p^\alpha\left(1+\frac{1}{p}\right) + p^{\alpha-1}\left(1+\frac{1}{p}\right) + \cdots + p^{\alpha-\beta}\left(1+\frac{1}{p}\right)}{p^{\alpha-\beta}\left(1+\frac{1}{p}\right)} = \Phi(p^\beta).$$

Für $D = p^\alpha$ aber ist

$$K_{p^\alpha}(p^\alpha) = \psi(p^\alpha) + \psi(p^{\alpha-1}) + \cdots + \psi(p) + \psi(1) = F(p^\alpha).$$

Daraus folgt:

Die Anzahl der Lösungssysteme, die in dem System $\frac{b}{a}$ enthalten sind, ist

$$K_D(m) = F(D)_h \cdot \Phi(D)_n,$$

wo $D = (a, b, m)$ in den Hauptteiler $(D)_h$ von m und den Nebenteiler $(D)_n$ zerlegt ist.

Für $D = m$ erhält man natürlich die Anzahl $F(m)$ aller Lösungssysteme der Kongruenz $0 \cdot z \equiv 0 \pmod{m}$.

13.

Zwei Lösungssysteme sollen miteinander verwandt heißen, wenn sie mindestens eine Zahl gemeinsam haben, also nicht etwa gerade ein ganzes System, sondern auch nur eine imprimitive Zahl, die ja kein System bildet. Zwei Systeme, die beide mit einem dritten verwandt sind, brauchen nicht miteinander verwandt zu sein.

Mit wie vielen der $F(m)$ verschiedenen Lösungssysteme ist das System $\frac{b}{a}$ verwandt? Um diese Frage zu beantworten, möge als bewiesen angenommen werden — worauf übrigens alle bisherigen Ergebnisse hindeuten —, daß zwei Systeme mit demselben (a, b, m) als völlig gleichberechtigt anzusehen sind, insbesondere also auch gleich viel verwandte Systeme haben. Der Beweis für diese Behauptung läßt sich leicht vermittels der homogenen linearen unimodularen Transformation der Ebene E_m führen, die überhaupt für die weitere Theorie von der größten Bedeutung ist, hier aber nicht mehr erörtert

erden kann. Sie folgt aber auch aus der Deutung der Figur Q_m, ıf die am Schluß des Art. 4 hingewiesen wurde.

An Stelle des beliebigen Systems $\frac{b}{a}$, für das $(a, b, m) = D$ sein ıöge, kann hiernach das System an dem Punkt $0 \mid D$ betrachtet erden. Bei diesem System wird die erste Horizontalreihe von allen ı $\frac{m}{D}$ gehörigen Lösungen gebildet, die übrigen Reihen enthalten die ahlen, die zu den in m aufgehenden Vielfachen von $\frac{m}{D}$ gehören, die tzte Reihe besteht aus der einen zu m gehörigen Lösung. Mit dem ystem $\frac{D}{0}$ sind daher alle Systeme verwandt, die an den Geraden $= \delta \cdot \frac{m}{D}$ stehen, wo δ die Teiler von D durchläuft. Die Anzahl ır verschiedenen unter diesen Systemen ist also nach Gleichung (1) ın Art. 11:

$$R_D(m) = \sum_{\delta / D} G_{\delta \frac{m}{D}}(m) = \sum_{\delta / D} \frac{D}{\delta} \cdot T\left(\delta \frac{m}{D}\right)_h \cdot \chi\left(\delta \frac{m}{D}\right)_n.$$

a die Funktion G multiplizierbar ist, gilt dasselbe von R. Setzt ıan $m = p^\alpha$, $D = p^\beta$, so ist, weil nur p^α ein von 1 verschiedener Hauptteiler ist,

$$R_{p^\beta}(p^\alpha) = p^\beta\left(1 + (\alpha - \beta)\frac{p-1}{p}\right) + p^{\beta-1} \cdot \left(1 + (\alpha - \beta + 1)\frac{p-1}{p}\right) + \cdots$$

$$+ p \cdot \left(1 + (\alpha - 1)\frac{p-1}{p}\right) + 1 + \alpha = \frac{p^{\beta+1} - 1}{p-1} + (p-1)s + \alpha.$$

ier ist

$$s = p^{\beta-1} \cdot (\alpha - \beta) + p^{\beta-2} \cdot (\alpha - \beta + 1) + \cdots + (\alpha - 1),$$

ler, wie man findet, wenn man s von ps subtrahiert:

$$(p-1)s = p^\beta(\alpha - \beta) + p \cdot \frac{p^{\beta-1} - 1}{p-1} - \alpha + 1.$$

lso ist

$$R_{p^\beta}(p^\alpha) = \frac{p^{\beta+1}(\alpha - \beta + 1) - p^\beta(\alpha - \beta - 1) - 2}{p-1}.$$

Somit ist der Satz bewiesen:

Die Anzahl der verschiedenen mit $\frac{b}{a}$ verwandten Sy-ıeme ist

$$R_D(m) = \prod_{i=1}^{\nu} \frac{p_i^{\beta_i+1}(\alpha_i - \beta_i + 1) - p_i^{\beta_i}(\alpha_i - \beta_i - 1) - 2}{p_i - 1}.$$

Dabei ist $D = (a, b, m)$ und $\beta_i \gtreqless 0$ ist der Exponent von p_i in D.

Für $(a, b, m) = 1$, d. h. für $\beta_i = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, \nu)$ ergibt sich

$$R_1(m) = \prod_{i=1}^{\nu} (\alpha_i + 1) = T(m)$$

als die Anzahl der Systeme, die mit einem aus einer (primitiven) Zahl bestehenden System verwandt sind, also diese Zahl enthalten, was man auch durch Betrachtung der durch diese Zahl gekennzeichneten Nullgeraden sofort bestätigen kann. Für $\beta_i = \alpha_i$ erhält man als den anderen extremen Fall der Funktion R

$$R_m(m) = \prod_{i=1}^{\nu} \frac{p_i^{\alpha_i+1} + p_i^{\alpha_i} - 2}{p_i - 1} = F(m).$$

Das System $\frac{0}{0}$, dem dieser Fall entspricht, ist ja auch mit allen $F(m)$ Lösungssystemen verwandt.

14.

Eine engere Verwandtschaft zwischen zwei Lösungssystemen, als die soeben definierte, findet statt, wenn die Systeme nicht bloß überhaupt in mindestens einer Zahl übereinstimmen, sondern in einem System, wenn sie also z. B. eine primitive Zahl gemeinsam haben. Zwei solche Systeme mögen systemverwandt heißen. Um die Anzahl der mit dem System $\frac{b}{a}$ in dieser Beziehung stehenden Systeme zu bestimmen, habe ich den folgenden Weg eingeschlagen. Die Figur Q_m kann in bestimmter Weise, auf die näher einzugehen hier nicht möglich ist, aus den Figuren $Q_{p_i^{\alpha_i}}$ $(i = 1, 2, \ldots, \nu)$ entstanden gedacht werden. Für jedes $Q_{p_i^{\alpha_i}}$ kann in ähnlicher Weise wie bei der allgemeineren Verwandtschaft die gesuchte Zahl bestimmt werden, und durch Multiplikation dieser Zahlen erhält man die gesuchte Anzahl für Q_m. Dabei ergibt sich das folgende Resultat:

Die Anzahl der mit dem Lösungssystem $\frac{b}{a}$ systemverwandten Systeme ist

$$F(D)_h \cdot \prod_k \left(\frac{p_k^{\beta_k+1} - 1}{p_k - 1} + \alpha_k - \beta_k \right).$$

Hier ist $(D)_h$ der in $D = (a, b, m)$ enthaltene Hauptteiler von m, und das Produkt ist über alle in $(D)_h$ nicht vor-

kommenden Primzahlen von m zu erstrecken, wobei α_k der Exponent von p_k in m und $\beta_k \gtreqless 0$ der Exponent von p_k in (a, b, m) ist.

Es ist bemerkenswert, daß das Produkt, wenn β_k für jeden Wert von k gleich 0 ist, in $T\left(\frac{m}{(D)_k}\right)$ übergeht, und daß in dem anderen Grenzfalle, der übrigens hier nicht vorkommen kann, nämlich wenn immer $\beta_k = \alpha_k$ wäre, das Produkt gleich $\Phi\left(\frac{m}{(D)_k}\right)$ sein würde. Es hat also einen Wert, der zwischen der Teileranzahl und der Teilersumme von $\frac{m}{(D)_k}$ liegt. Für $D = 1$ und für $D = m$ erhält man dieselben Werte wie in Art. 13.

15.

Es hat sich gezeigt, daß die transfiniten Lösungen der linearen Kongruenz, insbesondere die primitiven, in sehr vielen Beziehungen sich genau so verhalten wie die endlichen Lösungen. Das gilt auch von den Gesetzen, nach denen mit ihnen gerechnet werden muß. Allerdings hört dabei die Eindeutigkeit auf. Die Teiler von m haben eben in mancher Hinsicht die Eigenschaften der Zahl Null, und daher ist ja auch der durch die Kongruenz $ax \equiv b$ definierte Bruch $\frac{b}{a}$ vieldeutig, sobald $(a, b, m) + 1$ ist. Ebenso teilen die transfiniten Lösungen die Eigenschaften des Zeichens ∞ der gewöhnlichen Arithmetik, und daher ist es zu erwarten, daß auch z. B. bei der Addition und Subtraktion zweier transfiniter Zahlen das Resultat vieldeutig wird. Es ist daher naturgemäß, von vornherein als Objekte der Rechnung nicht die einzelnen transfiniten Lösungen, sondern allgemein die Lösungssysteme zu betrachten, zu denen ja auch jede primitive Lösung gehört.

Mit den symbolischen Brüchen $\frac{b}{a}$ soll nun gerechnet werden wie mit rationalen Brüchen. Die $F(m)$ Symbole $\frac{b}{a}$ bilden dann einen endlichen Körper, weil Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division immer wieder auf ein Symbol derselben Art führen. Die Division unterliegt dabei keiner Beschränkung.

Zähler und Nenner eines symbolischen Bruches müssen immer (mod m) auf ihren kleinsten Rest reduziert werden. Wenn im Laufe einer Rechnung ein Bruch noch nicht diese Form hat, so ist eine Verwechslung des Zählers oder Nenners mit einer transfiniten Zahl doch nicht zu befürchten, da eben nur mit den Symbolen, nicht mit

den transfiniten Zahlen selbst gerechnet wird. Das Resultat kann natürlich auch in Form des durch das erhaltene Symbol dargestellten Lösungssystems angegeben werden.

Das Heben eines Bruches durch einen Teiler von m ist ausgeschlossen. Es würde, wenn es vor dem Reduzieren geschieht, im allgemeinen zu einem anderen Resultat führen, als wenn es nach der Reduktion vorgenommen würde; die Resultate würden in der Regel sogar nicht verwandt sein. Das vollständige Heben eines Bruches führt nämlich zu der primitiven Zahl, die die bestimmte Nullgerade kennzeichnet, die den das Symbol repräsentierenden Punkt mit dem Nullpunkt verbindet. Diese Nullgerade ist aber vor irgendeiner anderen Nullgeraden des Punktes in keiner Weise ausgezeichnet und im allgemeinen durch eine andere Zahl gekennzeichnet, als die Nullgerade, die einen homologen Punkt mit dem Nullpunkt verbindet.

Da das Heben und das Erweitern eines Bruches mit einer zu m teilerfremden Zahl erlaubt ist, so kann man jedes Symbol auf einen Nenner bringen, der ein Teiler von m ist.

Bei der Addition und Subtraktion der symbolischen Brüche ist noch zu entscheiden, ob als Generalnenner das kleinste gemeinschaftliche Vielfache der Nenner oder das Produkt der Nenner zu nehmen ist. In beiden Fällen hat man sich natürlich klar zu machen, daß, wenn man die Brüche durch Erweiterung mit einem Teiler von m auf einen anderen Nenner bringt, man gar nicht die ursprünglichen Systeme addiert, sondern andere. Da nun dasselbe System durch verschiedene Symbole $\frac{b}{a}$ dargestellt werden kann, so ist es erwünscht, daß das Resultat einer Rechnung unabhängig davon sei, durch welches der verschiedenen Symbole man das gegebene System bezeichnet. Bei der Multiplikation und Division ist das nun, wie man leicht sieht, der Fall, dagegen bei der Addition und Subtraktion nur dann, wenn man als Generalnenner das Produkt der Nenner nimmt.

Damit steht folgendes im Zusammenhange. Die symbolischen Brüche, die dasselbe System bezeichnen, sind natürlich als gleich anzusehen. Bildet man die Differenz zweier solcher Brüche, die schon denselben Nenner haben mögen, z. B. $\frac{1}{2}$ und $\frac{1}{2}$ (mod 12), die beide das aus der transfiniten Zahl 13 bestehende System (13) angeben, so erhält man, wenn man 2 als Generalnenner nimmt, $\frac{6}{2}$, also das System $\binom{3,9}{12}$. Ebenso wäre $\frac{10}{3} - \frac{2}{3} = \frac{8}{3} = (24)$. Bildet man dagegen die Differenz mit dem Generalnenner 4 bzw. 9, so erhält man $\binom{0,3,6,9}{12,15}_{36}$ bzw. $\binom{0,4,8}{24}$. Die beiden letzten Differenzen enthalten die Zahl 0, können also als

Analoga der gewöhnlichen Null betrachtet werden. Es hätte hiernach den Anschein, als ob die erste Art der Subtraktion und deshalb auch die entsprechende Addition sicher zu verwerfen wäre. Dabei ist jedoch zu bedenken, daß die Zahl 0 in dieser Theorie durchaus nicht in derselben Weise vor allen andern Zahlen ausgezeichnet ist wie die Zahl Null der Arithmetik, sondern daß ja die Teiler von m und auch die transfiniten Zahlen, die durch ein Vielfaches von m bezeichnet werden, ebenfalls darauf Anspruch haben, als Analoga der Null angesehen zu werden. Bei der Subtraktion mit dem Produkt der Nenner als Generalnenner haben übrigens je zwei verwandte Systeme als Differenz ein die Zahl 0 enthaltendes System.

Wegen des Umstandes, daß man bei der Addition von Brüchen, deren Nenner verschiedene Teiler von m enthalten, tatsächlich nicht die ursprünglich zu addierenden Systeme addiert, wäre auch der Standpunkt berechtigt, daß man nur dann die Addition und Subtraktion zuläßt, wenn beide Bruchnenner denselben größten gemeinsamen Teiler mit m haben (wie das z. B. bei zwei eigentlichen Lösungen immer der Fall ist). Zwei solche Brüche kann man, ohne ihre Bedeutung zu ändern, so umformen, daß sie denselben Teiler von m als Nenner haben, und kann dann die Addition oder Subtraktion ausführen, indem man unter Beibehaltung des Nenners die Zähler addiert oder subtrahiert. Dann kann es allerdings, wie schon erwähnt, vorkommen, daß dieselben beiden Systeme, je nach dem Bruchsymbol, das sie vertritt, eine verschiedene Summe haben. Sind z. B. die aus den Zahlen 25 und 26 (mod 12) bestehenden Systeme (25) und (26) zu addieren, und setzt man $(25) = \frac{1}{3}$, $(26) = \frac{2}{3}$, so erhält man nach der jetzt geltenden Vorschrift als Summe $\frac{3}{3} = (^{1,\,5,\,9}_{27})$. Setzt man aber $(25) = \frac{5}{3}$, $(26) = \frac{2}{3}$, so ist die Summe $\frac{7}{3} = (27)$. Allgemein zeigt sich, daß in einem derartigen Fall alle verschiedenen Summen vermittels eines ganz bestimmten Systems miteinander verwandt sind. Dieses System, also in dem Beispiel die transfinite Zahl 27, könnte man als Summe der beiden zu addierenden Systeme definieren.

Die Schwierigkeiten, die die Addition und Subtraktion der transfiniten Kongruenzlösungen darbieten, und die ich vorläufig nicht beseitigen kann, scheinen mir so sehr in der Natur der Sache zu liegen, daß sie nicht gegen die Einführung und weitere Untersuchung dieser Zahlen sprechen dürften.

16.

Zum Schluß soll noch ganz kurz die Frage gestreift werden, ob es außer den bis jetzt betrachteten transfiniten Kongruenzlösungen

noch andere gibt, die, wenn man die bisher betrachteten mit der Mächtigkeit der abzählbaren Mengen vergleichen wollte, als höhere Mächtigkeiten anzusehen wären. Tatsächlich führt die Theorie der Potenzreste in bezug auf einen Primzahlmodul auf neue transfinite Zahlen.

Die Auflösung der Kongruenz

$$x^n \equiv b \pmod{p}$$

ist gleichbedeutend mit der Auflösung der linearen Kongruenz

$$n \cdot \operatorname{ind} x \equiv \operatorname{ind} b \pmod{p-1}$$

oder

$$n \cdot \xi \equiv \beta \pmod{p-1}, \tag{1}$$

wo die Basis des Indexsystems die primitive Wurzel g der Primzahl p sein möge. Ist nun β nicht durch $(n, p-1)$ teilbar, so gibt es keine eigentliche Lösung dieser Kongruenz. Unter Benutzung der transfiniten Lösungen der linearen Kongruenzen ist aber ein Lösungssystem auch dann vorhanden, wenn b im gewöhnlichen Sinne des Wortes nicht n^{ter} Potenzrest von p ist. Wenn ξ_0 eine transfinite Lösung von (1) ist, so ist g^{ξ_0} als eine transfinite Zahl (mod p) anzusehen, deren n^{te} Potenz $\equiv b \pmod{p}$ ist. Daß diese transfiniten Zahlen von den bisher betrachteten wirklich verschieden sind, zeigt der Umstand, daß (mod p) nur eine transfinite Lösung der ersten Art (nämlich die mit p bezeichnete transfinite Zahl oder das im Art. 2 erwähnte Zeichen ∞) vorhanden ist, während von dieser neuen Art $\Phi(p-1) - p + 1$ existieren. Es zeigt sich also, daß auch hier, wie bei den Cantorschen Mächtigkeiten, die Zahlen der höheren Art dadurch entstehen, daß man eine endliche Zahl mit einer transfiniten Zahl der ersten Art potenziert.

Zur Theorie der Luftdruckschwankungen.

Von Paul Jaerisch.

In meiner kürzlich in der meteorologischen Zeitschrift 1907 S. 481 erschienenen Arbeit: „Zur Theorie der Luftdruckschwankungen auf Grund der hydrodynamischen Gleichungen in sphärischen Koordinaten“ habe ich mich auf die Luftdruckschwankungen mit täglich doppelter Periode beschränkt, welche den wesentlichsten Teil der regelmäßigen täglichen Luftdruckschwankungen ausmachen. Aber den

obachtungen entsprechend hat man noch ganztägige Schwankungen s Luftdrucks sowie solche mit täglich dreifacher Periode zu beksichtigen, wenn auch für diese weniger günstige Resultate zu warten sind, da sie den lokalen Einflüssen in weit höherem Grade terliegen. Ich werde im folgenden zeigen, daß die hydrodynamiıen Gleichungen in der von mir vereinfachten Form allgemein für iftdruckschwankungen beliebiger Periode nach der gleichen Methode egriert werden können.[1])

Das System der partiellen Differentialgleichungen werde ich im genden dadurch vereinfachen, daß ich dieselben auf den stationären stand der Luft anwende. Dann schließen die Gleichungen nicht Annahme einer nur von der Seehöhe abhängigen Mitteltemperatur L. Die Ergebnisse hinsichtlich der halbtägigen Luftdruckschwanngen in meiner obengenannten Arbeit erleiden dadurch keine ıderung.

In § 5 und 6 gebe ich die allgemeine Auflösung des Systems r Differentialgleichungen für den stationären Zustand, die erforderh sind, um die vollständigen Formeln für die Luftdruckschwanngen und besonders auch um die Bedingung aufzustellen, welcher Temperaturschwankung zu genügen hat.

§ 1.

Es sei r die Entfernung eines Luftteilchens vom Erdmittelnkte, φ seine geographische Breite, λ seine östliche Länge; es seien b, c die Geschwindigkeitskomponenten in diesem System, so daß

$$a = \frac{dr}{dt}, \quad b = r\frac{d\varphi}{dt}, \quad c = r\cos\varphi\frac{d\lambda}{dt} \tag{)}$$

; es sei ferner p der Druck, μ die Dichtigkeit der Luft, t die Zeit, die Rotationsgeschwindigkeit der Erde, g die Beschleunigung der dschwere und T die absolute Temperatur, so sind die hydrodynaischen Gleichungen:

$$\left)\begin{cases} \mu\dfrac{\partial a}{\partial t} = -\dfrac{\partial p}{\partial r} - \mu g + 2\omega\mu c\cos\varphi, \\ \mu\dfrac{\partial b}{\partial t} = -\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial p}{\partial \varphi} \quad - 2\omega\mu c\sin\varphi, \\ \mu\dfrac{\partial c}{\partial t} = -\dfrac{1}{r\cos\varphi}\dfrac{\partial p}{\partial \lambda} - 2\omega\mu(a\cos\varphi - b\sin\varphi), \\ \dfrac{\partial \mu}{\partial t} + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial(r^2\mu a)}{\partial r} + \dfrac{1}{r\cos\varphi}\dfrac{\partial(\mu b\cos\varphi)}{\partial\varphi} + \dfrac{1}{r\cos\varphi}\dfrac{\partial(\mu c)}{\partial\lambda} = 0; \end{cases}$$

1) E. Herrmann weist in seinem Vortrage auf der letzten Naturforscherrsammlung zu Dresden 1907 auf das tatsächliche Vorhandensein vieltägiger rioden des Luftdrucks hin.

(2a) $$p = R\mu T.$$

Nun sei gesetzt

(3a) $$\begin{cases} p = p_0 + q, \\ \mu = \mu_0 + \delta, \\ T = T_0 + \theta, \end{cases}$$

wo p_0, μ_0, T_0 die für den stationären Zustand der Luft also für $t=0$ geltenden Werte von p, μ, T sind, und wo mit q, δ, θ die Schwankungen des Drucks, der Dichtigkeit und der Temperatur bezeichnet werden; und ferner sei gesetzt

(3b) $$\begin{cases} \mu a = u_0 + u, \\ \mu b = v_0 + v, \\ \mu c = w_0 + w, \end{cases}$$

wo u_0, v_0, w_0 die Werte der Produkte $\mu a, \mu b, \mu c$ für den stationären, u, v, w diejenigen für den nicht stationären Zustand sein sollen. Dann gehen die identischen Gleichungen

$$\frac{\partial(\mu a)}{\partial t} = \mu \frac{\partial a}{\partial t} + a \frac{\partial \mu}{\partial t},$$
$$\frac{\partial(\mu b)}{\partial t} = \mu \frac{\partial b}{\partial t} + b \frac{\partial \mu}{\partial t},$$
$$\frac{\partial(\mu c)}{\partial t} = \mu \frac{\partial c}{\partial t} + c \frac{\partial \mu}{\partial t},$$

durch (3a) und (3b) über in die folgenden Gleichungen

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \mu \frac{\partial a}{\partial t} + a \frac{\partial \delta}{\partial t},$$
$$\frac{\partial v}{\partial t} = \mu \frac{\partial b}{\partial t} + b \frac{\partial \delta}{\partial t},$$
$$\frac{\partial w}{\partial t} = \mu \frac{\partial c}{\partial t} + c \frac{\partial \delta}{\partial t},$$

in denen die Produkte $a \frac{\partial \delta}{\partial t}$, $b \frac{\partial \delta}{\partial t}$, $c \frac{\partial \delta}{\partial t}$ vernachlässigt werden können. Durch die entstehenden Gleichungen

$$\mu \frac{\partial a}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial t},$$
$$\mu \frac{\partial b}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial t},$$
$$\mu \frac{\partial c}{\partial t} = \frac{\partial w}{\partial t},$$

und durch (2a) und (2b) erhält man nun aus (2)

$$)\quad\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t} = -\dfrac{\partial (p_0+q)}{\partial r} - (\mu_0+\delta)g + 2\omega(w_0+w)\cos\varphi,\\[2ex] \dfrac{\partial v}{\partial t} = -\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial (p_0+q)}{\partial \varphi} - 2\omega(w_0+w)\sin\varphi,\\[2ex] \dfrac{\partial w}{\partial t} = -\dfrac{1}{r\cos\varphi}\dfrac{\partial (p_0+q)}{\partial \lambda} - 2\omega\{(u_0+u)\cos\varphi - (v_0+v)\sin\varphi\},\\[2ex] \dfrac{\partial \delta}{\partial t} + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial [r^2(w_0+w)]}{\partial r} + \dfrac{1}{r\cos\varphi}\dfrac{\partial [(v_0+v)\cos\varphi]}{\partial \varphi} + \dfrac{1}{r\cos\varphi}\dfrac{\partial (w_0+w)}{\partial \lambda} = 0.\end{cases}$$

eraus sowie aus (2a) und (3a) folgen für $u=v=w=q=\delta=0$, also

I. für den stationären Zustand

e Gleichungen:

$$)\quad\begin{cases} 0 = \dfrac{\partial p_0}{\partial r} + \mu_0 g - 2\omega w_0\cos\varphi,\\[2ex] 0 = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial p_0}{\partial \varphi} + 2\omega w_0\sin\varphi,\\[2ex] 0 = \dfrac{1}{r\cos\varphi}\dfrac{\partial p_0}{\partial \lambda} + 2\omega(u_0\cos\varphi - v_0\sin\varphi),\\[2ex] \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial (r^2 u_0)}{\partial r} + \dfrac{1}{\cos\varphi}\dfrac{\partial (v_0\cos\varphi)}{\partial \varphi} + \dfrac{1}{\cos\varphi}\dfrac{\partial w_0}{\partial \lambda} = 0;\end{cases}$$

a) $$p_0 = R\mu_0 T_0;$$

id aus (4) und (5) sowie entsprechend aus (2a) und (5a) gehen

II. für den nicht stationären Zustand

e Gleichungen hervor:

$$)\quad\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = -\dfrac{\partial q}{\partial z} - \delta g + 2\omega w\cos\varphi,\\[2ex] \dfrac{\partial v}{\partial t} = -\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial q}{\partial \varphi} - 2\omega w\sin\varphi,\\[2ex] \dfrac{\partial w}{\partial t} = -\dfrac{1}{r\cos\varphi}\dfrac{\partial q}{\partial \lambda} - 2\omega(u\cos\varphi - v\sin\varphi),\\[2ex] \dfrac{\partial \delta}{\partial t} + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial (r^2 u)}{\partial r} + \dfrac{1}{r\cos\varphi}\dfrac{\partial (v\cos\varphi)}{\partial \varphi} + \dfrac{1}{r\cos\varphi}\dfrac{\partial w}{\partial \lambda} = 0,\end{cases}$$

a) $$q = R\mu_0\theta + R\delta(T_0+\theta).$$

Der Gleichung (6a) kann, wenn das Glied, welches das Produkt s Dichtigkeits- und Temperaturschwankung enthält, gegen die ieder 1. Ordnung vernachlässigt wird, durch (5a) die Form gegeben rden:

b) $$\theta = \left(\frac{q}{p_0} - \frac{\delta}{\mu_0}\right) T_0.$$

Die Gleichungen (6) sind dieselben wie diejenigen (8) meiner nannten Arbeit. Nur sind U, V, W hier durch u, v, w ersetzt.

Aus den Gleichungen (6) ergeben sich daher für die Druck- und Dichtigkeitschwankungen q und δ dieselben Werte wie aus jenen Gleichungen.

§ 2. Integration der Gleichungen des nicht stationären Zustandes für Luftwellen beliebiger Periode.

Wie in meiner genannten Arbeit sei gesetzt:

$$(7)\qquad \begin{cases} q = q_1 \sin(kt + \nu\lambda) + q_2 \cos(kt + \nu\lambda), \\ \delta = \delta_1 \sin(kt + \nu\lambda) + \delta_2 \cos(kt + \nu\lambda), \\ u = u_1 \cos(kt + \nu\lambda) + u_2 \sin(kt + \nu\lambda), \\ v = v_1 \cos(kt + \nu\lambda) + v_2 \sin(kt + \nu\lambda), \\ w = w_1 \sin(kt + \nu\lambda) + w_2 \cos(kt + \nu\lambda); \end{cases}$$

dann ist für eine halbtägige Welle (vgl. § 4 meiner genannten Arbeit) $k = 2\omega$, $\nu = 2$, für eine ganztägige $k = \omega$, $\nu = 1$ usw.

Es sei ferner zur Abkürzung gesetzt:

$$(8a)\qquad \begin{cases} \omega_1 = \dfrac{k^2 - 4\omega^2}{4\omega^2}, \\ \omega_2 = \dfrac{k\nu}{2\omega}, \\ \omega_3 = \dfrac{k^2}{g}; \end{cases}$$

$$(8b)\qquad z_i = 2\omega r \cos\varphi\, w_i,$$

dann werden die Gleichungen (6) durch die folgenden Beziehungen (vgl. in § 3 meiner genannten Arbeit die Gleichungen (10a), (10b) und (11)) erfüllt:

$$(9a)\qquad \begin{cases} ku_1 = \dfrac{\partial q_1}{\partial r} + g\delta_1 - \dfrac{z_1}{r}, \\ kv_1 = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial q_1}{\partial \varphi} + \operatorname{tg}\varphi \dfrac{z_1}{r}; \end{cases}$$

$$(9b)\qquad \begin{cases} ku_2 = -\dfrac{\partial q_2}{\partial r} - g\delta_2 + \dfrac{z_2}{r}, \\ kv_2 = -\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial q_2}{\partial \varphi} - \operatorname{tg}\varphi \dfrac{z_2}{r}; \end{cases}$$

$$(9c)\qquad \begin{cases} rg\delta_i = -r\dfrac{\partial q_i}{\partial r} + \operatorname{tg}\varphi \dfrac{\partial q_i}{\partial \varphi} - \omega_2 \dfrac{q_i}{\cos^2\varphi} - \omega_1 \dfrac{z_i}{\cos^2\varphi}, \\ \omega_3 rg\delta_i + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial (r^2 g\delta_i)}{\partial r} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \dfrac{\partial q_i}{\partial r}\right) + \dfrac{1}{r\cos\varphi}\dfrac{\partial}{\partial \varphi}\left(\cos\varphi \dfrac{\partial q_i}{\partial \varphi}\right) \\ \qquad = \dfrac{\partial z_i}{\partial r} - \dfrac{1}{r}\operatorname{tg}\varphi \dfrac{\partial z_i}{\partial \varphi} - \omega_2 \dfrac{z_i}{r\cos^2\varphi}. \end{cases}$$

Werden q_i, δ_i, s_i durch die Gleichungen (9c) und durch die aus a) und (7) hervorgehende Gleichung, wo θ eine gegebene Funktion , bestimmt, so sind u_i, v_i und w_i durch (9a), (9b) und (8b) eintig gegeben. q_1, δ_1, s_1 unterscheiden sich dabei von q_2, δ_2, s_2 nur rch die Integrationskonstanten.

Nach der in der Einleitung meiner genannten Arbeit dargeten Integrationsmethode bleibt die Gleichung (6a) zunächst unrücksichtigt. Es sind daher für die drei Funktionen q_i, δ_i, s_i Werte fzusuchen, welche zwei Differentialgleichungen erfüllen. Dazu sehe wie bei dem speziellen Problem der halbtägigen Wellen

$$\text{)} \qquad \begin{cases} q_i = Q_{in}\cos^n\varphi, \\ s_i = Z_{in}\cos^n\varphi, \end{cases}$$

d bestimme Q_{in} und Z_{in} als Funktionen von r.

Aus den Gleichungen von 9c) folgt

$$\text{l)} \quad \begin{aligned} &\left[\omega_3\cdot + \frac{1}{2}\frac{\partial(r\cdot)}{\partial r}\right]\left\{-r\frac{\partial q_i}{\partial r} + \operatorname{tg}\varphi\frac{\partial q_i}{\partial\varphi} - \omega_2\frac{q_i}{\cos^2\varphi} - \omega^1\frac{s_i}{\cos^2\varphi}\right\} \\ &+\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial q_i}{\partial\varphi}\right) + \frac{1}{r\cos\varphi}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\cos\varphi\frac{\partial q_i}{\partial\varphi}\right) = \frac{\partial s_i}{\partial r} - \frac{1}{r}\operatorname{tg}\varphi\frac{\partial s_i}{\partial\varphi} - \omega_2\frac{s_i}{r\cos^2\varphi}, \end{aligned}$$

) die Eckklammer ein Operationszeichen ist.

Durch (10) zerfällt diese Gleichung, wenn die Koeffizienten von $s^n\varphi$ und $\cos^{n-2}\varphi$ auf beiden Seiten derselben einander gleich getzt werden, in die folgenden Gleichungen:

$$\text{2)} \quad \begin{cases} \left[\omega_3\cdot + \frac{1}{r}\frac{d(r\cdot)}{dr}\right]\left\{-r\frac{dQ_{in}}{dr} + nQ_{in}\right\} + \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dQ_{in}}{dr}\right) - n(n+1)\frac{Q_{in}}{r} \\ \qquad\qquad = \frac{dZ_{in}}{dr} - n\frac{Z_{in}}{r}, \\ \left[\omega_3\cdot + \frac{1}{r}\frac{d(r\cdot)}{dr}\right]\{-nQ_{in} - \omega_2 Q_{in} - \omega_1 Z_{in}\} + n^2\frac{Q_{in}}{r} = (n-\omega_2)\frac{Z_{in}}{r}. \end{cases}$$

Hieraus folgt durch Ausführung der durch die Eckklammer andeuteten Operation

$$\text{3)} \quad \begin{cases} (\omega_3 r - n)\frac{dQ_{in}}{dr} - n(\omega_3 r - n)\frac{Q_{in}}{r} = -\frac{dZ_{in}}{dr} + n\frac{Z_{in}}{r}, \\ (\omega_2 + n)\frac{dQ_{in}}{dr} + \{(\omega_2+n)(\omega_3 r+1) - n^2\}\frac{Q_{in}}{r} = -\omega_1\frac{dZ_{in}}{dr} \\ \qquad\qquad + \{\omega_2 - n - \omega_1(\omega_3 r+1)\}\frac{Z_{in}}{r}. \end{cases}$$

Aus beiden Gleichungen ergibt sich

$$\text{4)} \quad \begin{cases} \{\omega_1(\omega_3 r - n) - (\omega_2+n)\}\frac{dQ_{in}}{dr} \\ \qquad - \{n\omega_1(\omega_3 r - n) + (\omega_2+n)(\omega_3 r+1) - n^2\}\frac{Q_{in}}{r} \\ \qquad = \{\omega_1(\omega_3 r + n + 1) - \omega_2 + n\}\frac{Z_{in}}{r}. \end{cases}$$

Setzt man nun zur Abkürzung

$$(15)\qquad \begin{cases} \gamma = \omega_3 r - n, \\ \xi = \omega_1\omega_3 r - n\omega_1 - \omega_2 - n, \\ \eta = (n\omega_1 + \omega_2 + n)\omega_3 r - n^2\omega_1 + \omega_2 - n(n-1), \\ \zeta = \omega_1\omega_3 r + (n+1)\omega_1 - \omega_2 + n, \end{cases}$$

und weiter

$$(15a)\qquad \begin{cases} \zeta' = (n-1)\xi + \eta - \gamma\zeta, \\ \zeta'' = n\{\eta - \gamma\zeta - (\omega_1 + 1)\omega_3 r\} - \omega_2\omega_3 r, \end{cases}$$

so erhält die Gleichung (14) sowie diejenige Gleichung, welche aus (14) und der ersten Gleichung (13) hervorgeht, die folgende Form:

$$(16)\qquad \begin{cases} \xi r\frac{dQ_{in}}{dr} - \eta Q_{in} = \zeta Z_{in}, \\ \xi\zeta r^2\frac{d^2Q_{in}}{dr^2} - \{\xi\zeta' + \omega_1\omega_3 r(\xi+1)\} r\frac{dQ_{in}}{dr} + (\xi\zeta'' + \omega_1\omega_3 r\eta)Q_{in} = 0. \end{cases}$$

Die zweite Gleichung (16) bestimmt Q_{in} als Funktion von r, die erste dann Z_{in}. Somit ist unsere Aufgabe auf die Lösung einer gewöhnlichen Differentialgleichung zweiter Ordnung zurückgeführt.

δ_i ist durch die erste der Gleichungen (9c) gegeben. Wir haben somit gezeigt, daß Integralsysteme der Form (7) den Differentialgleichungen (6) genügen; und zwar gehört zu jedem reellen Werte von n, für welchen (vgl. die erste Gleichung (9c))

$$(16a)\qquad n \leqq 2$$

ist, ein solches Integral.

Hinsichtlich der Integration der zweiten Gleichung (16), welche für Wellen beliebiger Periode Geltung hat, ist zu bemerken, daß für dieselbe in gleicher Weise stark konvergente Potenzreihen als Integrale gewonnen werden können wie für die entsprechende Gleichung der halbtägigen Wellen (vgl. § 5 der genannten Arbeit sowie auch § 3 des Folgenden).

§ 3. Die Gleichungen (16) für ganz- und halbtägige Wellen und für Wellen mit täglich drei Perioden.

Zunächst soll gezeigt werden, daß die Gleichungen (16) für halbtägige Wellen zu den in meiner genannten Arbeit erhaltenen Resultaten führen. Für solche Wellen ist

$$k = 2\omega, \qquad \nu = 2,$$

also nach (8a)

$$\omega_1 = 0, \qquad \omega_2 = 2, \qquad \omega_3 = \frac{4\omega^2}{g}$$

ıd nach (15)

$$\gamma = \frac{4\omega^2}{g} 2 - n,$$

$$\xi = -(n+2),$$

$$\eta = (n+2)\frac{4\omega^2}{g} r - n^2 + n + 2,$$

$$\zeta = n - 2,$$

rner nach (15a)

$$\zeta' = \frac{16\omega^2}{g} r - n^2 - 2n + 4,$$

$$\zeta'' = \frac{4\omega^2}{g} r(3n-2) - n(n-2).$$

Demnach ergibt sich aus (16)

6b)
$$\begin{cases} -(n+2)r\frac{dQ_{in}}{dr} - \left\{(n+2)\frac{4\omega^2}{g} r - n^2 + n + 2\right\} Q_{in} = (n-2)Z_{in}, \\ (n+2)r^2\frac{d^2Q_{in}}{dr^2} + \left(\frac{16\omega^2}{g} r - n^2 - 2n + 4\right) r\frac{dQ_{in}}{dr} \\ \qquad - \left\{\frac{4\omega^2}{g} r(3n-2) - n(n-2)\right\} Q_{in} = 0; \end{cases}$$

d dies sind die Gleichung (19) und die zweite Gleichung (18) einer genannten Arbeit.

Für ganztägige Wellen ist

$$k = \omega, \qquad \nu = 1$$

ıd demnach

$$\omega_1 = -\frac{3}{4}, \qquad \omega_2 = \frac{1}{2}, \qquad \omega_3 = \frac{\omega^2}{g}$$

ıd ferner

$$\gamma = \frac{\omega^2}{g} r - n,$$

$$\xi = -\frac{1}{4}\left(3\frac{\omega^2}{g} r + n + 2\right),$$

$$\eta = \frac{1}{4}\left\{(n+2)\frac{\omega^2}{g} r - n^2 + 4n + 2\right\},$$

$$\xi = -\frac{1}{4}\left(3\frac{\omega^2}{g} r - n + 5\right)$$

$$\zeta' = \frac{1}{4}\left\{3\left(\frac{\omega^2}{g} r\right)^2 - 2(3n-5)\frac{\omega^2}{g} r - n^2 - 2n + 4\right\},$$

$$\zeta'' = \frac{1}{4}\left\{3n\left(\frac{\omega^2}{g} r\right)^2 - (3n^2 - 6n + 2)\frac{\omega^2}{g} r - n^2 + 2n\right\}.$$

Für Wellen mit täglich drei Perioden ist

$$k = 3\omega, \qquad \nu = 3,$$

$$\omega_1 = \frac{5}{4}, \qquad \omega_2 = \frac{9}{2}, \qquad \omega_3 = 9\frac{\omega^2}{g},$$

$$\gamma = 9\frac{\omega^2}{g}r - n,$$

$$\xi = \frac{9}{4}\left(5\frac{\omega^2}{g}r - n - 4\right),$$

$$\eta = \frac{1}{4}\left\{81(n+2)\frac{\omega^2}{g}r - 9n^2 + 4n + 18\right\},$$

$$\zeta = \frac{1}{4}\left(45\frac{\omega^2}{g}r + 9n - 13\right),$$

$$\zeta' = \frac{1}{4}\left\{-405\left(\frac{\omega^2}{g}r\right)^2 + 18(5n+13)\frac{\omega^2}{g}r - 27n^2 - 10n + 54\right\},$$

$$\zeta'' = \frac{9}{4}\left\{-405\left(\frac{\omega^2}{g}r\right)^2 + (5n^2 + 22n - 18)\frac{\omega^2}{g}r - n^2 + 2n\right\}.$$

Für halbtägige Wellen kann, wenn $n = 2$ ist, Z_{i2} nicht der ersten Gleichung (16) entnommen werden. Es ergibt sich aus (16b)

(16c) $$Q_{i2} = C_i c^{-\frac{4\omega^2}{g}r},$$

wo C_i eine Konstante ist, und dann aus der ersten Gleichung (13) für Z_{i2} die Gleichung

$$r\frac{dZ_{i2}}{dr} - 2Z_{i2} = -\left(\frac{4\omega^2}{g}r - 2\right)r\frac{dQ_{i2}}{dr} + 2\left(\frac{4\omega^2}{g}r - 2\right)Q_{i2}$$

und hieraus wegen (16c)

$$r\frac{dZ_{i2}}{dr} - 2Z_{i2} = C_i\left\{\left(\frac{4\omega^2}{g}r\right)^2 - 4\right\}c^{-\frac{4\omega^2}{g}r}.$$

Diese Gleichung geht, wenn gesetzt wird

(16d) $$Z_{i2} = C_i c^{-\frac{4\omega^2}{g}r}Y,$$

wo Y eine zu bestimmende Funktion ist, über in

$$r\frac{dY}{dr} - \left(\frac{4\omega^2}{g}r + 2\right)Y = \left(\frac{4\omega^2}{g}r\right)^2 - 4.$$

Setzt man hier wie in (29) meiner genannten Arbeit

$$r = S(1+\varrho)$$

und

(16e) $$Y = A_0 + A_2\varrho^2 + A_3\varrho^3 + \cdots,$$

so werden A_0, A_2, A_3 ... bestimmt durch die Gleichungen

$$A_0 = 2 - \frac{4\omega^2}{g}S,$$

$$2A_2 - \frac{4\omega^2}{g}SA_0 = 2\left(\frac{4\omega^2}{g}S\right)^2,$$

$$3A_3 - \frac{4\omega^2}{g}SA_2 = \left(\frac{4\omega^2}{g}S\right)^2,$$

$$4A_4 - \left(\frac{4\omega^2}{g}S - 1\right)A_3 - \frac{4\omega^2}{g}SA_2 = 0,$$

$$5A_5 - \left(\frac{4\omega^2}{g}S - 2\right)A_4 - \frac{4\omega^2}{g}SA_3 = 0,$$

. . . . . .

Diese Gleichungen liefern wegen der kleinen Größe $\frac{4\omega^2}{g}S = 0{,}013734$: A_2, A_3, A_4..... so kleine Werte, daß wegen der sehr kleinen öße ϱ die Glieder $A_3\varrho^3$, $A_3\varrho^5$, $A_4\varrho^4$... in (16e) gegen A_0 selbst · die höchsten in Betracht kommenden Luftteilchen vernachlässigt rden können.

Es ergibt sich demnach aus (16d) und (16e)

5f) $$Z_{i2} = C_i\left(2 - \frac{4\omega^2}{g}S\right)e^{-\frac{4\omega^2}{g}r} + B_i r^2,$$

B_i eine zu bestimmende Konstante ist. Das Glied $B_i r^2$ ist mit ıcksicht auf die linke Seite der Gleichung für Z_{i2} hinzugefügt.

Es möge hier gezeigt werden, daß man für die Integrale der eiten Gleichung (16b) noch in anderer Weise als in meiner Arbeit nvergente Potenzreihen erhalten kann. Das gleiche gilt dann für allgemeinere zweite Gleichung (16).

Setzt man nämlich

6g) $$x = \frac{4\omega^2}{g}r,$$

geht die zweite Gleichung (16b) in

$$+2)x^2\frac{d^2Q_{in}}{dx^2} + (4x - n^2 - 2n + 4)x\frac{dQ_{in}}{dx} + \{(2-3n)x + n(n-2)\}Q_{in} = 0$$

ıd durch

6h) $$Q_{in} = x^m R_n$$

6i) $$n_0 x^2\frac{d^2R_n}{dx^2} + (4x - n_1 + 2mn_0)x\frac{dR_n}{dx} + \{n_0 m(m-1) - n_1 m + n_2 + (4m + n_2)x\}R_n = 0$$

ıer, wo zur Abkürzung

$$n_0 = n + 2,$$
$$n_1 = n^2 + 2n - 4,$$
$$n_2 = 2 - 3n,$$
$$n_3 = n(n-2)$$

ısetzt ist.

Nur ist

$$n_0 m(m-1) - n_1 m + n_3 = (m-n)\{(n+2)m - (n-2)\}.$$

Daher vereinfacht sich die Gleichung (16i) für

$$m = n \quad \text{und} \quad m = \frac{n-2}{n+2}$$

und wird, wenn R_n einmal durch R_n' und dann durch R_n'' ersetzt wird, im ersten Falle

$$(n+2)x\frac{d^2R_n'}{dx^2} + (4x + n^2 + 2n + 4)\frac{dR_n'}{dx} + (n+2)R_n' = 0$$

und im zweiten Falle

$$(n+2)x\frac{d^2R_n''}{dx^2} + (4x - n^2)\frac{dR_n''}{dx} - \frac{3n^2+4}{n+2}R_n'' = 0.$$

Beide Gleichungen haben die Form

$$\alpha x\frac{d^2R}{dx^2} + (4x + \beta)\frac{dR}{dx} + \gamma R = 0.$$

Dieser Gleichung wird genügt durch

$$R = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \cdots,$$

wo

$$A_1 = -\frac{\gamma}{\beta}A_0,$$

$$A_2 = \frac{\gamma(\gamma + 4\cdot 1)}{2!\,\beta(\alpha+\beta)}A_0,$$

$$A_3 = -\frac{\gamma(\gamma+4\cdot 1)(\gamma+4\cdot 2)}{3!\,\beta(\alpha+\beta)(2\alpha+\beta)}A_0,$$

$$A_4 = \frac{\gamma(\gamma+4\cdot 1)(\gamma+4\cdot 2)(\gamma+4\cdot 3)}{4!\,\beta(\alpha+\beta)(2\alpha+\beta)(3\alpha+\beta)}A_0,$$

. . . . . .

$$A_k = (-1)^k\frac{\gamma(\gamma+4\cdot 1)(\gamma+4\cdot 2)(\gamma+4\cdot 3)\ldots(\gamma+4(k-1))}{k!\,\beta(\alpha+\beta)(2\alpha+\beta)(3\alpha+\beta)\ldots((k-1)\alpha+\beta)}A_0$$

ist.

Daher ergibt sich

$$(16\mathrm{k})\quad \begin{cases} R_n' = 1 - \dfrac{n+2}{n^2+2n+4}x + \dfrac{(n+2)(n+6)}{2!(n^2+2n+4)(n^2+3n+6)}x^2 \\ \qquad - \dfrac{(n+2)(n+6)(n+10)}{3!(n^2+2n+4)(n^2+3n+6)(n^2+4n+8)}x^3 + \cdots, \\ R_n'' = 1 - \dfrac{3n^2+4}{(n+2)n^2}x + \dfrac{(3n^2+4)(3n^2-4n-4)}{2!(n+2)^2n^2(n^2-n-2)}x^2 \\ \qquad - \dfrac{(3n^2+4)(3n^2-4n-4)(3n^2-8n-12)}{3!(n+2)^3n^2(n^2-n-2)(n^2-2n-4)}x^3 + \cdots \end{cases}$$

und schließlich als Lösung der zweiten Gleichung (16b)

$$Q_{in} = Ax^n R_n' + Bx^{\frac{n-2}{n+2}}R_n'',$$

wo mit A und B die Integrationskonstanten bezeichnet werden.

Die vorstehenden Reihen konvergieren, weil jedenfalls

$$x < 2 \cdot \frac{4\omega^2}{g} S,$$

also

$$x < 0{,}027468$$

ist.

§ 4. Die Integralsysteme des nicht stationären Zustandes.

Aus (8b), (9a), (9b), der ersten Gleichung (9c) und (10) folgen die Integralsysteme:

I.

$$\text{a)} \quad \begin{cases} q_1 = Q_{1n} \cos^n \varphi, \\ g\delta_1 = \left(-\frac{dQ_{1n}}{dr} + n\frac{Q_{1n}}{r}\right)\cos^n\varphi - \frac{1}{r}\left\{(n+\omega_2)Q_{1n} + \omega_1 Z_{1n}\right\}\cos^{n-2}\varphi, \\ kru_1 = (nQ_{1n} - Z_{1n})\cos^n\varphi \quad - \{(n+\omega_2)Q_{1n} + \omega_1 Z_{1n}\}\cos^{n-2}\varphi, \\ krv_1 = -(nQ_{1n} - Z_{1n})\cos^{n-1}\varphi \sin\varphi; \\ 2\omega r w_1 = Z_{1n}\cos^{n-1}\varphi; \end{cases}$$

II.

$$\text{b)} \quad \begin{cases} q_2 = Q_{2n}\cos^n\varphi, \\ g\delta_2 = \left(-\frac{dQ_{2n}}{dr} + n\frac{Q_{2n}}{r}\right)\cos^n\varphi - \frac{1}{r}\left\{(n+\omega_2)Q_{2n} + \omega_1 Z_{2n}\right\}\cos^{n-2}\varphi, \\ kru_2 = -(nQ_{2n} - Z_{2n})\cos^n\varphi + \{(n+\omega_2)Q_{2n} + \omega_1 Z_{2n}\}\cos^{n-2}\varphi, \\ krv_2 = (nQ_{2n} - Z_{2n})\cos^{n-1}\varphi \sin\varphi, \\ 2\omega r w_2 = Z_{2n}\cos^{n-1}\varphi; \end{cases}$$

wo Z_{in}, Q_{in} durch (16) resp. (13) gegeben sind.

Diese Integralsysteme erhalten, wenn zur Abkürzung

$$\text{(18a)} \quad \begin{cases} A_{1n} = -\frac{dQ_{1n}}{dr} + n\frac{Q_{1n}}{r}, \\ B_{1n} = -\{(n+\omega_2)Q_{1n} + \omega_1 Z_{1n}\}, \\ \Gamma_{1n} = nQ_{1n} - Z_{1n} \end{cases}$$

und

$$\text{(18b)} \quad \begin{cases} A_{2n} = -\frac{dQ_{2n}}{dr} + n\frac{Q_{2n}}{r}, \\ B_{2n} = -\{(n+\omega_2)Q_{2n} + \omega_1 Z_{2n}\}, \\ \Gamma_{2n} = nQ_{2n} - Z_{2n} \end{cases}$$

gesetzt wird, die folgende übersichtlichere Form:

I.

(19a)
$$\begin{cases} q_1 = & Q_{1n}\cos^n\varphi, \\ g\delta_1 = & A_{1n}\cos^n\varphi + \frac{B_{1n}}{r}\cos^{n-2}\varphi, \\ kru_1 = & \Gamma_{1n}\cos^n\varphi + B_{1n}\cos^{n-2}\varphi, \\ krv_1 = & -\Gamma_{1n}\cos^{n-1}\varphi\sin\varphi, \\ 2\omega r w_1 = & Z_{1n}\cos^{n-1}\varphi; \end{cases}$$

II.

(19b)
$$\begin{cases} q_1 = & Q_{2n}\cos^n\varphi, \\ g\delta_2 = & A_{2n}\cos^n\varphi + \frac{B_{2n}}{r}\cos^{n-2}\varphi, \\ kru_2 = & -\Gamma_{2n}\cos^n\varphi - B_{2n}\cos^{n-2}\varphi, \\ krv_2 = & \Gamma_{2n}\cos^{n-1}\varphi\sin\varphi, \\ 2\omega r w_2 = & Z_{2n}\cos^{n-1}\varphi. \end{cases}$$

Diese Integralsysteme sind in (7) einzusetzen. Es genügen dann die Glieder mit den Faktoren q_1, δ_1, u_1, v_1, w_1 resp. mit den Faktoren q_2, δ_2, u_2, v_2, w_2 für sich den Gleichungen (6). Das folgt aus der Herleitung der Integralsysteme, kann aber leicht nachträglich gezeigt werden und soll in Kürze wenigstens für die ersteren Glieder erwiesen werden. Für dieselben gehen die Gleichungen (6) zunächst über in

$$ku_1 = \frac{\partial q_1}{\partial r} + g\delta_1 - 2\omega w_1\cos\varphi,$$

$$kv_1 = \frac{1}{r}\frac{\partial q_1}{\partial\varphi} + 2\omega w_1\sin\varphi,$$

$$kw_1 = -\frac{\nu q_1}{r\cos\varphi} - 2\omega(u_1\cos\varphi - v_1\sin\varphi),$$

$$k\delta_1 + \frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2u_1)}{\partial r} + \frac{1}{r\cos\varphi}\frac{\partial(v_1\cos\varphi)}{\partial\varphi} + \frac{\nu w_1}{r\cos\varphi} = 0$$

und dann durch (19a) in

$$\frac{\Gamma_{1n}}{r}\cos^n\varphi + \frac{B_{1n}}{r}\cos^{n-2}\varphi = \frac{dQ_{1n}}{dr}\cos^n\varphi + A_{1n}\cos^n\varphi + \frac{B_{1n}}{r}\cos^{n-2}\varphi - \frac{Z_{1n}}{r}\cos^n\varphi,$$

$$-\frac{\Gamma_{1n}}{r}\cos^{n-1}\varphi\sin\varphi = -n\frac{Q_{1n}}{r}\cos^{n-1}\varphi\sin\varphi + \frac{Z_{1n}}{r}\cos^{n-1}\varphi\sin\varphi,$$

$$\frac{k}{2\omega}\frac{Z_{1n}}{r}\cos^{n-1}\varphi = -\nu\frac{Q_{1n}}{r}\cos^{n-1}\varphi - \frac{2\omega}{kr}(\Gamma_{1n}\cos^{n+1}\varphi + B_{1n}\cos^{n-1}\varphi + \Gamma_{1n}\cos^{n-1}\varphi\sin^2\varphi),$$

$$\frac{k}{g}\left(A_{1n}\cos^n\varphi\,\frac{B_{1n}}{r}\cos^{n-2}\varphi\right)+\frac{1}{kr^2}\frac{d}{dr}\left(r\Gamma_{1n}\cos^n\varphi+rB_{1n}\cos^{n-2}\varphi\right)$$

$$-\frac{1}{kr^2}\frac{\Gamma_{1n}}{\cos\varphi}\frac{d}{d\varphi}\left(\cos^n\varphi\sin\varphi\right)+\frac{\nu}{2\omega r^2}Z_{1n}\cos^{n-1}\varphi=0.$$

Die ersten drei Gleichungen werden durch (18a) und (8a) identische Gleichungen; die vierte Gleichung zerfällt mit Rücksicht darauf, daß

$$\frac{1}{\cos\varphi}\frac{d}{d\varphi}\left(\cos^n\varphi\sin\varphi\right)=-n\cos^{n-2}\varphi+(n+1)\cos^n\varphi$$

ist, in die folgenden Gleichungen

$$\frac{k}{g}A_{1n}+\frac{1}{kr^2}\frac{d}{dr}\left(r\Gamma_{1n}\right)-\frac{n+1}{kr^2}\Gamma_{1n}=0,$$

$$\frac{k}{g}\frac{B_{1n}}{r}+\frac{1}{kr^2}\frac{d}{dr}\left(rB_{1n}\right)+\frac{n}{kr^2}\Gamma_{1n}+\frac{\nu}{2\omega r^2}Z_{1n}=0;$$

und diese Gleichungen gehen mit Rücksicht auf (8a) in die folgenden Gleichungen

$$\omega_3 r^2 A_{1n}+r\frac{d\Gamma_{1n}}{dr}-n\Gamma_{1n}=0,$$

$$\omega_3 rB_{1n}+r\frac{dB_{1n}}{dr}+B_{1n}+n\Gamma_{1n}+\omega_2 Z_{1n}=0$$

über, welche durch (18a) mit den Gleichungen (13) identisch werden.

Den Integralsystemen (19a) und (19b) sind weitere für

$$q_i=0$$

zuzufügen. Dafür ergeben die Gleichungen (9c)

$$(19c)\quad\begin{cases} rg\delta_i=-\omega_1\dfrac{z_i}{\cos^2\varphi}, \\ (\omega_1+\cos^2\varphi)r\dfrac{\partial z_i}{\partial r}+(\omega_1-\omega_2+\omega_1\omega_3 r)z_i-\sin\varphi\cos\varphi\dfrac{\partial z_i}{\partial\varphi}=0. \end{cases}$$

Für $\omega_1=0$, also für die halbtägigen Wellen, nehmen diese Integralsysteme eine einfache Form an und sollen hier aufgestellt werden. In diesem Falle geht die zweite Gleichung (19c), weil $\omega_2=2$ wird, über in

$$\cos^2\varphi\,r\frac{\partial z_i}{\partial r}-2z_i-\sin\varphi\cos\varphi\frac{\partial z_i}{\partial\varphi}=0$$

und für

$$z_i=r^n Z$$

in

$$\sin\varphi\cos\varphi\frac{\partial Z}{\partial\varphi}+(2-n\cos^2\varphi)Z=0.$$

Setzt man noch

$$Z = \sin^m \varphi \cdot Y,$$

so entsteht für Y die Gleichung

$$\sin\varphi \cos\varphi \frac{dY}{d\varphi} + \{2 + (m-n)\cos^2\varphi\} Y = 0,$$

welcher

$$Y = A_i \cos^2\varphi$$

genügt, wenn die Beziehung

$$2 + m - n = 0$$

besteht, und A_i eine Konstante ist.

Daher ergibt sich

$$z_i = A_i r^n \sin^{n-2}\varphi \cos^2\varphi$$

für

$$n \geqq 2.$$

Somit sind für halbtägige Wellen den obigen Integralsystemen die folgenden zuzufügen, wobei $n-1$ durch n ersetzt werden soll:

(19d)
$$\begin{cases} 2\omega u_1 = -A_1 r^n \sin^{n-3}\varphi \cos^2\varphi, \\ 2\omega v_1 = A_1 r^n \sin^{n-2}\varphi \cos\varphi, \\ 2\omega w_1 = A_1 r^n \sin^{n-3}\varphi \cos\varphi, \\ q_1 = 0, \\ \delta_1 = 0, \end{cases}$$

(19e)
$$\begin{cases} 2\omega u_2 = A_2 r^n \sin^{n-3}\varphi \cos^2\varphi, \\ 2\omega v_2 = -A_2 r^n \sin^{n-2}\varphi \cos\varphi, \\ 2\omega w_2 = A_2 r^n \sin^{n-3}\varphi \cos\varphi, \\ q_2 = 0, \\ \delta_2 = 0, \end{cases}$$

wo

(19f)
$$n \geqq 3$$

ist, und wo A_1 und A_2 Integrationskonstanten sind.

§ 5. Integration des Systems partieller Differentialgleichungen für den stationären Zustand.

Auf die Differentialgleichungen (5) und (5a) des stationären Zustandes soll die gleiche Integrationsmethode angewendet werden. Es bleibt also die Gleichung (5a) zunächst unberücksichtigt, und es sollen die fünf Funktionen p_0, u_0, v_0, r_0, w_0 den übrigen vier Gleichungen

entsprechend bestimmt werden. Das Resultat wird willkürliche Funktionen enthalten, durch welche dann der Gleichung (5a) und weiteren Bedingungen genügt werden kann.

Es sei gesetzt

$$(20)\qquad \begin{cases} u_0 = \dfrac{U}{2\omega r}\dfrac{dF(\lambda)}{d\lambda}, \\ v_0 = \dfrac{V}{2\omega r}\dfrac{dF(\lambda)}{d\lambda}, \\ w_0 = \dfrac{W}{2\omega r}F(\lambda), \\ p_0 = PF(\lambda), \end{cases}$$

wo U, V, W, P zu bestimmende Funktionen von r und φ, $F(\lambda)$ eine beliebige Funktion von λ sein sollen. Dadurch gehen die letzten drei Gleichungen (5) über in

$$0 = \frac{\partial P}{\partial \varphi} + W \sin\varphi,$$

$$0 = \frac{P}{\cos\varphi} + U\cos\varphi - V\sin\varphi,$$

$$0 = \frac{\partial (rU)}{\partial r} + \frac{1}{\cos\varphi}\frac{\partial(\cos\varphi V)}{\partial\varphi} + \frac{W}{\cos\varphi}.$$

Aus der zweiten dieser Gleichungen folgt

$$(21)\qquad P = -U\cos^2\varphi + V\sin\varphi\cos\varphi$$

und dann aus der ersten

$$(22)\qquad W = \frac{\cos^2\varphi}{\sin\varphi}\frac{\partial U}{\partial\varphi} - 2\cos\varphi\, U - \cos\varphi\frac{\partial V}{\partial\varphi} - \frac{\cos^2\varphi}{\sin\varphi}V + \sin\varphi\, V;$$

und hierdurch geht die dritte Gleichung über in

$$(23)\qquad V = \operatorname{tg}\varphi\left(r\frac{\partial U}{\partial r} - U\right) + \frac{\partial U}{\partial\varphi}.$$

Durch (23) und dann durch (21) und (22) sind V, P, W als Funktionen von U bestimmt. Der Ausdruck (22) für W kann durch (23) in den einfacheren

$$(24)\qquad W = -\cos\varphi\frac{\partial(rU)}{\partial r} - \frac{\partial(\cos\varphi V)}{\partial\varphi}$$

umgeformt werden, der sich direkt aus der dritten Gleichung ergibt.

Die erste der Gleichungen (5) liefert μ_0. Wir haben demnach folgendes Integralsystem:

$$(25)\quad \begin{cases} p_0 = F(\lambda)\,(-\,U\cos^2\varphi + V\sin\varphi\cos\varphi), \\ g\mu_0 = -\frac{\cos\varphi}{r}F(\lambda)\left\{\sin\varphi\left(r\frac{\partial V}{\partial r} - V\right) + \cos\varphi\left(U + \frac{\partial V}{\partial\varphi}\right)\right\}, \\ u_0 = \frac{1}{2\omega r}\frac{dF(\lambda)}{d\lambda}U, \\ v_0 = \frac{1}{2\omega r}\frac{dF(\lambda)}{d\lambda}V, \\ w_0 = -\frac{1}{2\omega r}F(\lambda)\left\{\cos\varphi\frac{\partial(rU)}{\partial r} + \frac{\partial(\cos\varphi V)}{\partial\varphi}\right\}; \end{cases}$$

hier ist $F(\lambda)$ eine beliebige, aber endliche und stetige Funktion von λ, U eine solche von r und φ; und V ist durch (23) als Funktion von U bestimmt.

Damit V und folglich auch v_0 nicht für $\varphi = 90^0$ unendlich wird, muß U von der Form

$$U = f(r, \varphi)\cos\varphi$$

sein, wo mit $f(r, \varphi)$ eine beliebige, endliche und stetige Funktion von r und φ bezeichnet wird.

Denkt man sich $f(r, \varphi)$ nach Potenzen von $\cos\varphi$ resp. von $\sin\varphi$ entwickelt, so wird man setzen können entweder

$$U = H_n\cos^n\varphi$$

oder

$$U = G_n\sin^n\varphi\cos\varphi.$$

Das Integralsystem (25) geht daher in folgende zu jedem möglichen n gehörende speziellere Integralsysteme über:

I.

$$(26a)\quad \begin{cases} p_0 = F(\lambda)\cos^n\varphi\left\{-\left(r\frac{dH_n}{dr} - nH_n\right)\cos^2\varphi + r\frac{dH_n}{dr} - (n+1)H_n\right\}, \\ g\mu_0 = F(\lambda)\cos^n\varphi\left\{\left[\frac{d}{dr}\left(r\frac{dH_n}{dr}\right) - 2(n+1)\frac{dH_n}{dr} + n(n+2)\frac{H_n}{r}\right]\cos^2\varphi\right. \\ \qquad\left. - \frac{d}{dr}\left(r\frac{dH_n}{dr}\right) + (2n+1)\frac{dH_n}{dr} - n(n+1)\frac{H_n}{r}\right\}, \\ u_0 = \frac{1}{2\omega r}\frac{dF(\lambda)}{d\lambda}\cos^n\varphi\,H_n, \\ v_0 = \frac{1}{2\omega r}\frac{dF(\lambda)}{d\lambda}\cos^{n-1}\varphi\sin\varphi\left\{r\frac{dH_n}{dr} - (n+1)H_n\right\}, \\ w_0 = -\frac{1}{2\omega r}F(\lambda)\cos^{n-1}\varphi\left\{(n+2)\left(r\frac{dH_n}{dr} - nH_n\right)\cos^2\varphi\right. \\ \qquad\left. - n\left[r\frac{dH_n}{dr} - (n+1)H_n\right]\right\}. \end{cases}$$

$F(\lambda)$ ist eine beliebige, endliche und stetige Funktion von λ, H_n von r; n ist jede reelle Zahl, welche $\geqq 1$ ist.

II.

b)
$$\begin{cases} p_0 = f(\lambda)\sin^n\varphi\cos\varphi\left\{\left[r\frac{dG_n}{dr}-(n+1)G_n\right]\sin^2\varphi+(n-1)G_n\right\}, \\ g\mu_0 = -f(\lambda)\sin^{n-2}\varphi\cos\varphi\left\{\left[\frac{d}{dr}\left(r\frac{dG_n}{dr}\right)-2(n+2)\frac{dG_n}{dr}\right.\right. \\ \qquad +(n+1)(n+3)\frac{G_n}{r}\Big]\sin^4\varphi+\Big[(2n+1)\frac{dG_n}{dr} \\ \qquad \left.\left.-(n+1)(2n+1)\frac{G_n}{r}\right]\sin^2\varphi+n(n-1)\frac{G_n}{r}\right\}, \\ u_0 = \frac{1}{2\omega r}\frac{df(\lambda)}{d\lambda}\sin^n\varphi\cos\varphi\,G_n, \\ v_0 = \frac{1}{2\omega r}\frac{df(\lambda)}{d\lambda}\sin^{n-1}\varphi\left\{\left[r\frac{dG_n}{dr}-(n+2)G_n\right]\sin^2\varphi+nG_n\right\}, \\ w_0 = \frac{1}{2\omega r}f(\lambda)\sin^{n-2}\varphi\left\{(n+3)\left[r\frac{dG_n}{dr}-(n+1)G_n\right]\sin^4\varphi\right. \\ \left.+\left[-(n+2)r\frac{dG_n}{dr}+(n+1)(2n+1)G_n\right]\sin^2\varphi-n(n-1)G_n\right\}. \end{cases}$$

) ist eine beliebige, endliche und stetige Funktion von λ, G_n ı r; n ist jede reelle Zahl, welche $\geqq 2$ ist.

§ 6. Besondere Integralsysteme für den stationären Zustand.

Für λ = konst. sind den Integralsystemen des § 4 folgende hinzuügen:

')
$$\begin{cases} 1. \quad u_0 = v_0 = w_0 = 0, \\ g\mu_0 = -\frac{dp_0}{dr}; \end{cases}$$

ist eine beliebige, endliche und stetige Funktion von r.

')
$$\begin{cases} 2. \quad u_0 = v_0 = 0, \\ w_0 = -\frac{1}{2\omega r}\frac{1}{\sin\varphi}\frac{\partial p_0}{\partial\varphi}, \\ g\mu_0 = -\frac{\partial p_0}{\partial r}-\frac{1}{r}\cdot\operatorname{tg}\varphi\frac{\partial p_0}{\partial\varphi}; \end{cases}$$

ist eine beliebige, endliche und stetige Funktion von r und φ. eraus folgt entsprechend (26a) und (26b)

3a)
$$\begin{cases} 2a. \quad p_0 = \cos^n\varphi\,H_n, \\ g\mu_0 = -\cos^n\varphi\left(\frac{dH_n}{dr}-n\frac{H_n}{r}\right), \\ u_0 = 0, \\ v_0 = 0, \\ w_0 = \frac{n}{2\omega r}\cos^{n-1}\varphi\,H_n; \end{cases}$$

H_n ist eine beliebige, endliche und stetige Funktion von r.

$$(28b)\quad \begin{cases} 2b. & p_0 = \sin^n\varphi\, G_n, \\ & g\mu_0 = -\sin^{n-2}\varphi\left(\frac{dG_n}{dr}\sin^2\varphi + n\frac{G_n}{r}\cos^2\varphi\right), \\ & u_0 = 0, \\ & v_0 = 0, \\ & w_0 = -\frac{n}{2\omega r}\sin^{n-2}\varphi\cos\varphi\, G_n; \end{cases}$$

G_n ist eine beliebige, endliche und stetige Funktion von r. Ferner kann gesetzt werden

$$p_0 = \mu_0 = w_0 = 0,$$
$$u_0 = X\sin\varphi,$$
$$v_0 = X\cos\varphi,$$

wo X der Gleichung

$$r\frac{\partial X}{\partial r}\sin\varphi + \frac{\partial X}{\partial\varphi}\cos\varphi = 0$$

genügt. Demnach ist

$$X = A\cdot r^n\cos^n\varphi,$$

und es ergibt sich

$$(29)\quad \begin{cases} 3. & p_0 = \mu_0 = w_0 = 0, \\ & u_0 = A\cdot r^n\cos^n\varphi\sin\varphi, \\ & v_0 = A\cdot r^n\cos^{n+1}\varphi; \end{cases}$$

A ist eine Integrationskonstante, n jede reelle Zahl, welche >0 ist.

Hamburg, im Januar 1908.

Bericht über das 218. Gesellschaftsjahr 1907/1908.

(Zusammengestellt vom Adjunkten Dr. A. Schwaßmann.)

Hauptversammlung am 11. Februar 1907.

Der Jahrverwalter Professor Dr. Hoppe erstattet den Jahresbericht über das 217. Gesellschaftsjahr. Die Gesellschaft besteht hiernach z. Z. aus 11 Ehrenmitgliedern, 22 auswärtigen und 70 einheimischen Mitgliedern. Die Gesellschaft hat im Laufe des letzten Jahres ihr langjähriges Ehrenmitglied Wasserbaudirektor Hübbe und ihr einheimisches Mitglied Ingenieur A. Timm durch den Tod verloren, deren Andenken die Versammlung durch Erheben von den Sitzen

hrt. Herr Oberlehrer Dr. Wetzler ist infolge seines Fortgangs nach Bayern aus der Reihe der einheimischen Mitglieder in die der auswärtigen übergetreten. Herr Direktor Niebour, welcher nunmehr der Gesellschaft 50 Jahre lang als ordentliches Mitglied angehört, wird zum Ehrenmitglied ernannt. Herr Oberlehrer Walter Lange aus Altona wird statutengemäß als ordentliches Mitglied in die Gesellschaft aufgenommen. An Publikationen sind im 217. Gesellschaftsjahr herausgegeben worden: Heft 7 des 4. Bandes der „Mitteilungen" der Gesellschaft und Nachtrag 2 des „Kataloges mathematischer Werke auf Hamburgs Bibliotheken". Es wird beschlossen, in Zukunft alle 6 Jahre einen neuen Nachtrag zu diesem Katalog zu veröffentlichen und das hierfür erforderliche Material jedes Jahr auf den Bibliotheken zu sammeln. Das einheimische Mitglied Herr Ingenieur Nagel stiftet der Gesellschaft für die Vorträge eine sinnreich ausgestaltete, auseinanderklappbare Tafel, wofür ihm auch an dieser Stelle der Dank der Gesellschaft ausgesprochen sei.

Nach dem Kassenbericht des Mitjahrverwalters besitzt die Gesellschaft ein Vermögen von 3548,11 M. Zum Kassenrevisor wird Herr Professor H. Ahlborn gewählt.

Im Anschluß an die Hauptversammlung findet das übliche Festessen unter Teilnahme einiger Gäste und vieler Mitglieder im Hotel zum Kronprinzen statt.

Versammlung am 9. März 1907.

Die Versammlung beschließt, die nächste Sitzung dem Gedächtnis Leonhard Eulers zu widmen, dessen 200jähriger Geburtstag am 15. April sein wird.

Herr Professor Jaerisch hält einen Vortrag über die Theorie der Luftdruckschwankungen mit täglich doppelter Periode.

Herr Chronometermacher F. Dencker hält einen Vortrag über die Entwicklung des Chronometers. Im Anschluß hieran besichtigt eine größere Anzahl von Mitgliedern der Gesellschaft am 10. März die von Herrn Dencker ins Leben gerufenen „Hamburger Chronometer-Werke".

Versammlung am 13. April 1907.

Die Sitzung ist dem Andenken Leonhard Eulers gewidmet, um den 200jährigen Geburtstag des großen Mathematikers und Physikers festlich zu begehen, und findet im kleinen Saale des Patriotischen

Gebäudes unter sehr reger Beteiligung von Gästen und Mitgliedern statt. Der Jahrverwalter Herr Professor Hoppe schildert in seinem Festvortrage Eulers Leben und Wirken im allgemeinen. Herr Professor Busche würdigt in einem zweiten Vortrage Eulers Verdienste als Zahlentheoriker im besonderen. Im Anschluß an die Vorträge findet eine Besichtigung der reichen Ausstellung der auf Hamburgs Bibliotheken vorhandenen Schriften und Bilder Eulers statt, unter denen sich eine Reihe seltener Exemplare befindet.

Im geschäftlichen Teile wird der Revisionsbericht des Herrn Professor Ahlborn verlesen und daraufhin dem Kassenführer Entlastung erteilt.

Herr Kandidat des höheren Schulamts Dr. Paul Haß wird statutengemäß als ordentliches Mitglied in die Gesellschaft aufgenommen.

Versammlung am 4. Mai 1907.

Herr Baumeister Schirlitz wird statutengemäß als ordentliches liches Mitglied in die Gesellschaft aufgenommen.

Herr Oberlehrer Dr. Uetzmann hält einen Vortrag über die Reduktion von Determinanten auf Elementarteiler.

Herr Dr. Paul Haß hält einen Vortrag über die beim Beweise des Cauchyschen Satzes zu machenden Voraussetzungen.

Herr Professor Köpcke zeigt einige Vorrichtungen zur Veranschaulichung des Verlaufs der Zeitgleichung und zur Darstellung der e-Funktion vor.

Versammlung am 8. Juni 1907.

Die Versammlung beschließt, mit der Naturforschenden Gesellschaft in Görlitz in Schriftenaustausch zu treten.

Die Gesellschaft wird zur Besichtigung der Hamburger Sielkonstruktion eingeladen, welcher Einladung eine Reihe von Mitgliedern am 17. August Folge leistet.

Herr Dr. A. Winter hält einen Vortrag über hypergeometrische Differentialgleichungen mit zwei singulären Punkten.

Herr Observator Dr. A. Schwaßmann gibt eine Erläuterung des Zweckes der von der Hamburger Sternwarte veröffentlichten „Tafel der Reduktionskonstanten zur Berechnung scheinbarer Sternörter für die Jahre 1830 bis 1860".

Herr Professor Dr. Edm. Hoppe referiert über das Werk: J. Smith, History of modern mathematics. 1906.

Versammlung am 14. September 1907.

Als ordentliche Mitglieder werden statutengemäß in die Gesellhaft aufgenommen: Herr Oberlehrer Dr. Schwabe, Herr Oberlehrer erz und Fräulein Meißner, Kandidatin des höheren Schulamts.

Herr Oberlehrer Dr. P. Frank hält einen Vortrag über einige agen, welche die imaginäre Berührungstransformation von Lie beffen, die gerade Linien in Kugeln überführt.

Versammlung am 12. Oktober 1907.

Herr Dr. A. Wilkens, wissenschaftlicher Hilfsarbeiter an der ernwarte, wird statutengemäß als ordentliches Mitglied in die Gellschaft aufgenommen.

Die Gesellschaft beschließt mit der Accademia Gioenia di Science aturali in Catania in Schriftenaustausch zu treten.

Herr Oberlehrer Dr. John Schröder hält im Anschluß an eine r Gesellschaft von Herrn Tye-Hamburg zugegangene Arbeit über agische Quadrate und Kuben einen Vortrag über „Magische Zahlenguren".

Versammlung am 9. November 1907.

Herr Oberlehrer Dr. Wetzler, welcher im Herbst wieder aus ayern zurückgekehrt ist und infolgedessen wieder ordentliches Mitied der Gesellschaft wurde, hält einen Vortrag über unendliche eterminanten und ihre Anwendung zur Lösung der Gleichung $n$ten ades.

Herr Professor Dr. Edm. Hoppe macht eine Mitteilung histoscher Art, das Gravitationsgesetz betreffend.

Versammlung am 14. Dezember 1907.

Herr Oberlehrer Dr. Büchel hält einen Vortrag über die Differtialgleichung der Strömungs- und Kraftlinien.

Herr Observator Dr. Schwaßmann führt einen neuen, von Pulfch-Jena konstruierten Apparat zur Bestimmung der Horizontalojektion hochgelegener und unzugänglicher Punkte vor.

Versammlung am 11. Januar 1908.

Herr Oberlehrer Dr. Uetzmann hält einen Vortrag über den sammenhang der rationalen, trigonometrischen und elliptischen nktionen.

Versammlung am 8. Februar 1908.

Die Herren Kandidaten des höheren Schulamts H. Jansen und A. Großmann werden statutengemäß als ordentliche Mitglieder in die Gesellschaft aufgenommen.

Herr Oberlehrer Dr. P. Frank trägt den Beweis eines Satzes über Haupttangentenkurven und Krümmungslinien vor.

Die Bibliothek der Gesellschaft verdankt folgenden Herren wertvolle Zuwendungen, wofür sie auch an dieser Stelle den verehrten Herren Verfassern und Gebern den besten Dank ausspricht:

Adler, W. Ahrens, Bangert, Barkhausen, Bubendey, E. Busche, M. Cantor, Dunér, Fukuzawa, Edm. Hoppe, Jaerisch, Michaelsen, Riebesell, Rogel, Schön, C. Schrader, Sforza, Smith, Svedberg.

Außerdem steht die Gesellschaft in Schriftenaustausch mit zahlreichen deutschen und ausländischen gelehrten Gesellschaften.

Die Adresse der Gesellschaft ist:

Mathematische Gesellschaft, Hamburg,
Patriotisches Gebäude.

MITTEILUNGEN
DER MATHEMATISCHEN GESELLSCHAFT
IN HAMBURG.

BAND IV. № 9. AUSGEGEBEN IM FEBRUAR 1909.

Eine geometrische Veranschaulichung des quadratischen Restcharakters.

Von E. Busche.

Mit 1 Figur.

I.

Es sei m eine positive ungerade, k eine positive zu m teilerfremde gerade oder ungerade Zahl. Man zeichne in einer Ebene mit rechtwinkligem Koordinatensystem das Quadrat $Q = ABCD$, dessen Ecken der Reihe nach die Koordinaten $0|0$, $\frac{m}{2}\left|\frac{k}{2}\right.$, $\frac{m-k}{2}\left|\frac{m+k}{2}\right.$, $-\frac{m}{2}\left|\frac{k}{2}\right.$ haben, und nenne solche Punkte auf AD und AB korrespondierende Punkte, die von A dieselbe Entfernung haben, und ebenso zwei Punkte auf CD und CB, die von C gleichweit entfernt sind. Geht man dann von A aus auf der y-Achse in das Innere des Quadrates hinein und setzt, nachdem man den Umfang erreicht hat, den Weg von dem korrespondierenden Punkt aus parallel der x-Achse wieder in das Innere des Quadrates hinein fort usw., so kommt man, indem man nach und nach alle Gitterlinien des Koordinatengitters im Innern des Quadrates durchläuft, und zwar abwechselnd eine vertikale und eine horizontale Linie, wenn k ungerade ist, schließlich zu dem Punkt C, wenn k gerade ist, zu dem Punkt B. Dabei hat man die Seite AB des Quadrates, abgesehen von A, $\frac{m-1}{2}$ mal in vertikaler Richtung getroffen. Wenn man dabei diese Seite μ mal aus dem Innern des Quadrates kommend erreicht hat, so ist

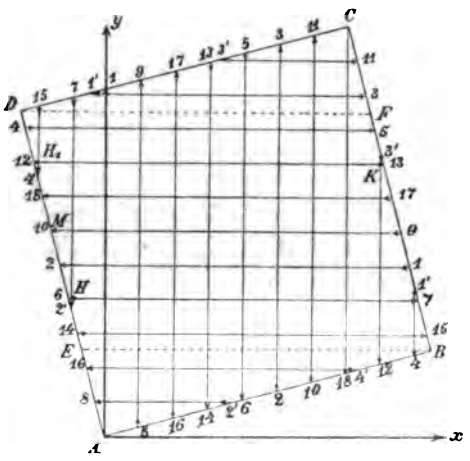
$$\left(\frac{k}{m}\right) = (-1)^{\mu},$$

wo links das Jacobische Zeichen steht, das den quadratischen Restcharakter von k in bezug auf m bestimmt.

So ist in der Figur auf S. 404, bei der $m = 19$, $k = 5$ angenommen ist, $\mu = 4$, weil man bei den mit 4, 6, 12, 14 bezeichneten

Punkten auf AB aus dem Quadrat heraustritt, was durch die Pfeilspitzen angedeutet wird, während man bei 2, 8, 10, 16, 18, in das Quadrat hineingeht. Andererseits ist $(\frac{5}{19}) = +1$, da $9^2 \equiv 5 \pmod{19}$ ist.

Zum Beweise überdecke man die Ebene mit einem quadratischen Gitter G, dessen eine Masche Q ist. Dem beweglichen Punkte P, der in dem zu beweisenden Satze die Strecken des Koordinatengitters in Q durchläuft, werde ein Punkt P' zugeordnet, der mit derselben gleichförmigen Geschwindigkeit sich auf der y-Achse bewegt. Dann entspricht jeder Lage von P' eine solche von P, nur wenn P' eine Gitterlinie von G überschreitet, entsprechen dem Schnittpunkt zwei korrespondierende Orte von P, und zwar liegen diese auf AB und AD, wenn P' eine geradzahlige Parallele zu AB oder AD überschreitet, dagegen auf CB und CD, wenn P' sich auf einer ungeradzahligen Parallelen zu AB oder AD befindet. Dabei werden AB und AD selbst als die nullten Parallelen angesehen. Die Bewegung des Punktes P' ist beendigt, wenn er den ersten Gitterpunkt S des Gitters G erreicht hat, der auf seinem Wege liegt. Dieser Punkt befindet sich an der Stelle in G, zu der man kommt, wenn man m Strecken von der Länge einer Seite von Q in der Richtung AD und dann k Strecken von derselben Länge in der Richtung AB zurücklegt. Wenn P' den Punkt S erreicht hat, ist P in B angekommen bei geradem k, in C bei ungeradem k.



Nun sollen die Schnittpunkte von AS mit den zu AB parallelen Gitterlinien von G der Reihe nach mit 0, 1, 2 . . . m bezeichnet werden, wobei 0 auf A, m auf S fällt, ebenso werden die Schnittpunkte von AS mit den zu AD parallelen Gitterlinien von G mit 0′, 1′, 2′ . . . k' bezeichnet. Dieselben Zahlen werden an die entsprechenden Orte des Punktes P auf dem Rande von Q geschrieben, wobei jede Zahl außer 0, m, 0′, k' zweimal vorkommt, nämlich an zwei korrespondierenden Punkten. Die ungeraden Zahlen befinden sich auf CB und CD, die geraden auf AB und AD. Die ungestrichelten Zahlen stehen an den Schnittpunkten solcher Gitterlinien des Koordinatengitters mit dem Umfang von Q, die alle denselben spitzen

inkel mit dem Umfang von Q bilden, die gestrichelten Zahlen an lchen Punkten, wo der Winkel das Komplement des vorigen ist. e $m-1$ mit den ungestrichelten Zahlen $1, 2 \ldots m-1$ bezeichten Punkte werden m-Punkte, die mit $1', 2' \ldots (k-1)'$ bezeichneten rden k-Punkte genannt. A und C bzw. B sollen also in diese zeichnung nicht mit eingeschlossen werden. Nur die m- und Punkte sind in der Figur mit ihren Zahlen versehen worden.

Ist nun zuerst $k < m$, und geht P von irgendeiner (geraden) hl g auf AB in das Innere von Q hinein, so kann es vorkommen, ß dieser Punkt AB wieder erreicht, ohne vorher einen k-Punkt getroffen zu haben, nämlich wenn er von g aus zu $g+1$ auf CD, nn zu dem korrespondierenden Punkt $g+1$ auf CB, dann zu $+2$ auf AD und von da zu dem korrespondierenden Punkt $g+2$ f AB gekommen ist. Von diesem Punkt geht P dann wieder in s Innere von Q hinein. Ebenso sieht man, daß, wenn P bei g auf B aus dem Quadrat herauskommt, dasselbe bei $g+2$ auf AB ittfindet, falls inzwischen nur der Punkt $g+1$, aber kein k-Punkt getroffen worden ist. Wenn dagegen der Punkt P z. B. im ersten lle, ehe er wieder zu AB zurückkehrt, einen k-Punkt überschritten t, entweder erst auf CB und dann den korrespondierenden Punkt f CD oder umgekehrt, so gelangt er zu $g+2$ auf AB, indem er nun i diesem Punkt aus Q heraustritt, so daß also jetzt die Bewegungsichtung bei g und $g+2$ entgegengesetzt ist. Dasselbe ergibt sich, nn P bei g aus Q herauskommt. Es kann, wie man z. B. durch trachtung von P' sofort sieht, wenn $k < m$ ist, niemals vorkommen, ß P zwischen g und $g+1$ oder $g+1$ und $g+2$ mehr als einen Punkt trifft, wohl aber kann P zwischen g und $g+1$ und zwischen $+1$ und $g+2$ auf je einen derartigen Punkt stoßen. In diesem lle ist die Bewegungsrichtung bei g und $g+2$ wieder die gleiche, von man sich wie vorher leicht überzeugt.

Wenn $k > m$ ist, so wird sicher dem mit der geraden Zahl g zeichneten m-Punkt auf AB ein k-Punkt, etwa h', folgen, und dem nkt $g+2$ auf AB wird ein k-Punkt l' vorangehen. Geht der nkt P etwa bei g auf AB in Q hinein, so ist h' als auf CB gegen eine ungerade Zahl, ist dann auch l' ungerade, also die Zahl r zwischen g und $g+2$ angetroffenen k-Punkte ungerade, so beutet das, daß P von BC aus wieder zu AB zurückkehrt, also in tgegengesetzter Richtung wie bei g auf AB sich bewegend. Ist er l' gerade, so kann bei der Bewegung von P auf l' nur dann $+2$ folgen, wenn P von l' auf AB in Q hineingeht, dann nach $+2$ auf AD kommt und nun bei dem korrespondierenden Punkt $g+2$

auf AB wieder in Q eintritt. Bei der jetzt vorhandenen geraden Zahl von k-Punkten zwischen g und $g+2$ ist also in g und $g+2$ auf AB die Bewegungsrichtung von P die gleiche.

In jedem Falle kommt man zu dem Ergebnis, daß die Bewegungsrichtung von P an zwei aufeinanderfolgenden m-Punkten auf AB die gleiche oder die entgegengesetzte ist, je nachdem der Punkt P dazwischen eine gerade oder ungerade Zahl von k-Punkten angetroffen hat. Das ist aber gleichbedeutend damit, daß der Punkt P' zwischen zwei aufeinanderfolgenden geradzahligen Parallelen zu AB eine gerade oder ungerade Zahl von Parallelen zu AD überschritten hat. Da der Punkt P bei A in das Quadrat hineingeht, so geht er demnach bei dem Punkt $2x$ auf AB in Q hinein oder aus Q heraus, je nachdem auf der $2x$ten Parallelen zu AB zwischen der Verlängerung von AD und der mit $2x$ bezeichneten Lage des Punktes P' eine gerade oder ungerade Anzahl von Gitterpunkten des Gitters G liegt, d. h. je nachdem $\left[\frac{2x \cdot k}{m}\right]$ gerade oder ungerade ist. Die Anzahl μ der m-Punkte auf AB, bei denen P aus Q heraustritt, ist also

$$\mu \equiv \sum_{x=1}^{\frac{m-1}{2}} \left[\frac{2x \cdot k}{m}\right] \pmod 2.$$

Daraus folgt aber nach dem verallgemeinerten Gaußschen Lemma[1]) sofort der zu beweisende Satz, denn dieses führt bekanntlich ganz unmittelbar auf dieselbe Summe von größten Ganzen.

Die folgende Bemerkung möge noch hinzugefügt werden, obgleich sie nicht weiter benutzt werden wird. Setzt man, nach Einführung einer neuen Längeneinheit, $AB = \frac{1}{2}$, so gibt der mit $2x$ bezeichnete m-Punkt auf AB durch seine Entfernung von A den absoluten Betrag des absolut kleinsten Bruchrestes von $\frac{x \cdot k}{m}$ und durch die in ihm stattfindende Bewegungsrichtung das Vorzeichen dieses Bruchrestes an, das negativ ist, wenn diese Richtung aus dem Quadrat herausführt.

II.

Aus dem geometrischen Kriterium für den quadratischen Restcharakter von k in bezug auf m folgen sehr leicht die sogenannten

1) Es kann nach art. 3 des VI. Nachlasses zur Theorie der biquadratischen Reste kaum zweifelhaft sein, daß Gauß den Inhalt des von E. Schering und Kronecker verallgemeinerten Lemmas gekannt hat. Vgl. Ges. Werke. Bd. II. S. 369. (Göttingen, 1863).

Ergänzungssätze zu dem quadratischen Reziprozitätsgesetz. Denn setzt man $k = m - 1$, so zeigt ein Blick auf die entsprechende Figur, daß die m-Punkte 2, 4, $\cdots$ $m - 1$ jetzt alle in dieser Reihenfolge auf AB liegen, und daß man bei allen diesen $\frac{m-1}{2}$ Punkten aus dem Quadrat herausgeht, so daß sich

$$\left(\frac{m-1}{m}\right) = \left(\frac{-1}{m}\right) = (-1)^{\frac{m-1}{2}}$$

ergibt.

Setzt man $k = 2$, so erkennt man leicht, da jetzt nur ein k-Punkt vorhanden ist, den der Punkt P in der Mitte seines Weges erreicht, daß P bei den ersten $\left[\frac{m}{4}\right]$ m-Punkten auf AB, deren Abszissen 2, 4, $\cdots$ $2 \cdot \left[\frac{m}{4}\right]$ sind, in das Quadrat hinein, bei den letzten $\frac{m-1}{2} - \left[\frac{m}{4}\right]$ derartigen Punkten aus dem Quadrat herausgeht. Daraus folgt

$$\left(\frac{2}{m}\right) = (-1)^{\frac{m-1}{2} - \left[\frac{m}{4}\right]} = (-1)^{\frac{m^2-1}{8}}.$$

Um das Reziprozitätsgesetz abzuleiten, setzt man k gleich der ungeraden zu m teilerfremden Zahl n, die $< m$ vorausgesetzt werden darf. Dann kann man die jetzt sich ergebende Figur ebenso gut zur Bestimmung von $\left(\frac{m}{n}\right) = (-1)^{\nu}$ wie zur Bestimmung von $\left(\frac{n}{m}\right) = (-1)^{\mu}$ verwenden, nur hat man die $\frac{n-1}{2}$ n-Punkte auf AD zu benutzen, um ν zu finden, wenn der Wortlaut des Kriteriums unverändert bleiben soll. Denn jetzt vertauschen die beiden Scharen von Parallelen des Gitters G ihre Bedeutung. Die Zahl ν ist also gleich der Zahl der n-Punkte auf AD, bei denen P aus Q heraustritt. Die Zahl μ, die eigentlich gleich der Zahl der m-Punkte auf AB war, bei denen P aus Q herauskommt, kann natürlich auch als die Zahl der korrespondierenden m-Punkte auf AD angesehen werden, bei denen P in Q hineingeht, ebenso wie ν auch die Zahl der n-Punkte auf AB ist, bei denen P in Q eintritt.

Zieht man nun die Parallelen BE und CF zur x-Achse, wo E auf AD, F auf BC liegt, so entspricht jedem n-Punkt auf AB ein m-Punkt auf AE, der mit ihm auf derselben zur x-Achse parallelen Gitterlinie des Koordinatengitters liegt. Jedem n-Punkt auf AB, bei dem P in Q hineingeht, der also den Beitrag 1 zu ν liefert, entspricht in dieser Weise auf AE ein m-Punkt, bei dem P aus Q herauskommt, der also bei der Bestimmung von μ nicht mitgezählt wird, und umgekehrt entspricht einem n-Punkt auf AB, der zu ν den Beitrag Null liefert, ein m-Punkt auf AE, der 1 zu μ beiträgt.

Alle n-Punkte auf AB und die $\frac{n-1}{2}$ m-Punkte auf AE liefern demnach zu $\mu + \nu$ zusammen den Beitrag $\frac{n-1}{2}$. In dieser Zahl $\frac{n-1}{2}$ ist also die Zahl ν ganz enthalten, aber die Zahl μ ist erst zum Teil berechnet. Es fehlen noch die m-Punkte auf ED, bei denen man in das Quadrat hineingeht. Auf ED liegen noch im ganzen $\frac{m-n}{2}$ m-Punkte. Nun ist die Figur, weil n ungerade ist, so daß P zuletzt bei C ankommt, symmetrisch in bezug auf A und C; man könnte zur Bestimmung von μ und ν ebensogut die Seiten CB und CD benutzen wie AD und AB, nur müßte man dann die Bewegungsrichtung überall umkehren oder den Wortlaut des Kriteriums entsprechend ändern. Statt der m-Punkte auf ED kann man also auch die m-Punkte auf FB untersuchen. Dabei entspricht dem m-Punkt auf ED, der E am nächsten liegt, der m-Punkt auf FB, der zunächst an F liegt usw. Geht man z. B. auf ED bei einem m-Punkt H in Q hinein, so geht man deshalb bei dem entsprechenden Punkt K auf FB (bei nicht umgekehrter Bewegungsrichtung) aus dem Quadrat heraus und daher bei dem m-Punkt H_1 auf ED, der mit K auf derselben Parallelen zur x-Achse liegt, in das Quadrat hinein, ebenso wie bei H. Dabei ist $DH_1 = FK = EH$. Die $\frac{m-n}{2}$ m-Punkte auf ED gehören deshalb derart paarweise zusammen, daß je zwei gleichweit von E und D entfernte entweder beide den Beitrag 0 oder 1 zu μ zu liefern. Ist also $\frac{m-n}{2} \equiv 0 \pmod 2$, so ist der Beitrag aller dieser Punkte $\equiv 0 \pmod 2$ und daher $\mu + \nu \equiv \frac{n-1}{2} \pmod 2$. Wenn m und n denselben Rest (mod 4) haben, ist demnach $\mu + \nu \equiv 0$ oder 1 (mod 2), je nachdem beide Zahlen m und n den Rest 1 oder 3 (mod 4) besitzen.

Ist aber $\frac{m-n}{2}$ ungerade, so bleibt in der Mitte von ED ein Punkt M übrig, und es ist noch zu untersuchen, ob dieser den Beitrag 0 oder 1 zu μ liefert. Die Parallele zur x-Achse, auf der dieser Punkt liegt, hat genau dieselbe Lage zu C wie zu A; daher ist der Mittelpunkt dieser Linie auch die Mitte des ganzen von P zurückgelegten Weges, und der Punkt M wird erreicht, nachdem P gerade die Hälfte aller n-Punkte, d. h. $\frac{n-1}{2}$ solche Punkte überschritten hat. Also ist jetzt $\mu + \nu = \frac{n-1}{2} + \frac{n-1}{2} \equiv 0 \pmod 2$. Damit ist das *Reziprozitätsgesetz* bewiesen.

Es ist interessant, daß dieser Beweis als eine geometrische Umrmung des bekannten Zellerschen Beweises[1]) angesehen werden nn, zu dem er also in ähnlicher Beziehung steht wie der Eisenensche geometrische Beweis[2]) zu dem dritten Gaußschen Beweise. ährend aber bei Eisenstein erst durch eine besondere Betrachtung e in bezug auf m und n unsymmetrische Gleichung

$$\left(\frac{n}{m}\right) = (-1)^{\sum\left[\frac{2x \cdot n}{m}\right]} \qquad \left(x = 1, 2 \cdots \frac{m-1}{2}\right)$$

die geeignetere Gleichung

$$\left(\frac{n}{m}\right) = (-1)^{\sum\left[\frac{x \cdot n}{m}\right]} \qquad \left(x = 1, 2 \cdots \frac{m-1}{2}\right)$$

ngeformt wird, worauf dann erst die geometrische Deutung einsetzt, ird hier auch die zum Beweise der Reziprozität erforderliche Symetrie durch die geometrische Betrachtung herbeigeführt.

---

bildung der hyperbolischen Geometrie auf ein zweischaliges Hyperboloid.

Von Hans Jansen.

Mit 30 Figuren.

Poincaré[3]) weist darauf hin, daß es möglich sei, die hyperlische Geometrie auf ein zweischaliges Hyperboloid abzubilden und Minkowski führte in einem Vortrage[4]) einige Ergebnisse an, die h bei dieser Abbildung herausstellten.

Hier will ich den Zusammenhang der Abbildung der hyperlischen Geometrie auf das zweischalige Hyperboloid mit den übrigen rstellungen der hyperbolischen Geometrie herstellen und die einnen Sätze, die sich bei dieser Abbildung ergeben, mit ihren Beisen zusammenstellen, da sich bisher, soweit mir bekannt ist, gends in der Literatur etwas über diese Abbildung findet. Es llen jedoch die notwendigen Formeln der hyperbolischen Geometrie, bei deren gewöhnlichen Abbildungen aufzutreten pflegen, jedesmal

1) Berliner Monatsberichte, 1872, S. 846. Vgl. auch Bachmann, Niedere hlentheorie Bd. I, S. 261 (Leipzig 1902).

2) Journal für die reine u. angew. Math. Bd. 28, 1844, S. 246.

3) „Association française pour l'avancement des sciences", Session 1881 (Alger) S. 132—138.

4) „Jahresbericht der Deutschen Mathematikervereinigung" von Gutzmer. Leipzig 1905, B. G. Teubner.

kurz abgeleitet werden, damit auch ein mit der nichteuklidischen Geometrie weniger vertrauter Leser den Entwicklungen bequemer folgen kann.

§ 1. Die gewöhnlichen Abbildungen der nichteuklidischen Geometrie.

Die bequemste Einführung in die nichteuklidische Geometrie liefert die Cayleysche Maßbestimmung. Diese geht von den nichteuklidischen Bewegungen aus. Es sind dies, wenn wir uns auf die Ebene beschränken, die ∞^3 projektiven (linearen) Transformationen, die einen bestimmten Kegelschnitt, den sogenannten absoluten Kegelschnitt in sich überführen. Ist der Kegelschnitt imaginär, so erhält man die elliptische, ist er reell, so erhält man die hyperbolische Geometrie. Gerade Linien bleiben Gerade, Entfernungen und Winkel bleiben invariant und werden durch den mit einer geeigneten Konstanten multiplizierten Logarithmus des Doppelverhältnisses folgender vier Elemente gemessen. Bei der Entfernung zweier Punkte bilden die beiden Punkte selbst und die Schnittpunkte der Verbindungslinie der Punkte mit dem absoluten Kegelschnitt die vier Elemente. Bei dem Winkel zweier Geraden sind es die beiden Geraden selbst und die Tangenten von ihrem Schnittpunkt an den absoluten Kegelschnitt. Der Flächeninhalt wird durch den sphärischen Exzeß definiert. Seine Einführung gestaltet sich bei winkeltreuen Abbildungen der nichteuklidischen Geometrie jedoch wesentlich einfacher. Deshalb verweise ich auf S. 411 und S. 413 in diesem Paragraphen und auf § 9. Die elliptische Geometrie enthält keine reellen unendlichfernen Punkte; in der hyperbolischen Geometrie teilt man die reellen Punkte ein in die realen Punkte auf der konkaven Seite des absoluten Kegelschnitts (die Tangenten an den Kegelschnitt sind imaginär), die unendlichfernen Punkte auf dem absoluten Kegelschnitt und die idealen Punkte auf der konvexen Seite des absoluten Kegelschnitts (die Tangenten an den Kegelschnitt sind reell).

Wir projizieren die Ebene, in der die nichteuklidische Geometrie infolge der Cayleyschen Maßbestimmung herrschen soll, von einem Punkte außerhalb durch ein Strahlenbündel. Dann gilt auch für die Strahlen und Ebenen des Bündels dieselbe nichteuklidische Geometrie, weil die Doppelverhältnisse bei der Projektion erhalten bleiben. Der absolute Kegelschnitt geht dabei in einen absoluten Kegel über. Es geht dann durch den absoluten Kegelschnitt eine einfach unendliche Schar von Flächen zweiter Ordnung, die den absoluten Kegel berühren. In bezug auf jede dieser Flächen zweiter Ordnung steht das Projektionszentrum und die Ebene in der Beziehung von Pol und

Polare. Wir greifen eine der Flächen zweiter Ordnung heraus. Dann vermittelt die Projektion eine Abbildung der Ebene auf die Fläche zweiter Ordnung. Wir übertragen alle Bezeichnungen der nichteuklidischen Geometrie der Ebene auf die Fläche zweiter Ordnung. Dann können wir sagen, daß auch auf dieser eine nichteuklidische Geometrie herrscht. Bei den gewöhnlichen Abbildungen der nichteuklidischen Geometrie pflegt man der Ebene, dem Projektionszentrum und der Fläche zweiter Ordnung eine spezielle Lage zu erteilen.

Man nimmt z. B. als Ebene die unendlichferne Ebene und als Projektionszentrum den Nullpunkt eines rechtwinkligen Koordinatensystems an. Wählt man nun als Fläche zweiter Ordnung die Einheitskugel, so ist die unendlichferne Ebene tatsächlich die Polarebene des Nullpunktes. Die Einheitskugel schneidet die unendlichferne Ebene im absoluten Kugelkreis, einem ganz bestimmten unendlichfernen imaginären Kegelschnitt, dessen Lage in homogenen Koordinaten x_1, x_2, x_3, x_4 durch die Gleichungen

$$(1) \qquad \begin{cases} x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases}$$

bestimmt wird. Diese spezielle Wahl hat zur Folge, daß die nichteuklidischen Entfernungen zweier Punkte gleich den euklidischen Winkeln der ihnen entsprechenden Strahlen, bzw. den zugehörigen Kreisbögen, auf der Einheitskugel werden, und daß die nichteuklidischen Winkel gleich den euklidischen Winkeln der ihnen entsprechenden Ebenen bzw. den euklidischen Winkeln der zugehörigen größten Kreise auf der Einheitskugel werden. Dann hat man auf der Kugel eine Abbildung der elliptischen Geometrie, für die die bekannten Relationen der sphärischen Trigonometrie gelten. Daraus, daß die Entfernungen und Winkel im euklidischen, wie im nichteuklidischen Sinne gleich sind, folgt, daß die Flächeninhalte sich aus kleinen Elementarrechtecken zusammensetzen, die gleichfalls im euklidischen wie im nichteuklidischen Sinne gleich sind. Es ist also der nichteuklidische Fächeninhalt gleich dem euklidischen auf der Einheitskugel, also gleich dem sphärischen Exzeß. Statt die nichteuklidische Entfernung durch die Bogenlänge zu messen, kann man sie auch durch den halben Flächensektor der den Bogen ausschneidenden Ebene messen. Statt den nichteuklidischen Flächeninhalt als euklidischen Flächeninhalt der Kugelfläche zu messen, kann man ihn auch durch den dreifachen zugehörigen räumlichen Sektor messen. Die Abbildung der elliptischen Geometrie auf die Kugel ist gleichzeitig die Abbildung auf eine Fläche konstanten positiven Krümmungsmaßes.

Bei der hyperbolischen Geometrie macht man ähnliche Spezialisierungen. In einem rechtwinkligen xyz-Koordinatensystem legt man die Ebene, in der die hyperbolische Geometrie herrschen soll, in die xy-Ebene. Den absoluten Kegelschnitt legt man in dieser Ebene in den Einheitskreis, das Projektionszentrum in den unendlichfernen Punkt der z-Achse. Als Fläche zweiter Ordnung nimmt man wieder die Einheitskugel. Der absolute Kegelschnitt geht in den Äquator der Kugel über. Jede Halbkugel liefert eine Abbildung der realen Punkte der hyperbolischen Geometrie. Und zwar liefert die eine Halbkugel die Oberseite, die andere die Unterseite der Punkte. (In der elliptischen Geometrie auf der Kugel galt etwas Ähnliches. Dort liefern je zwei diametral gegenüberliegende Punkte die Bilder der Oberseite und der Unterseite eines Punktes der Ebene mit der elliptischen Geometrie.) Die nichteuklidischen Geraden gehen in die Orthogonalkreise des Äquators über. Die nichteuklidischen Winkel werden die euklidischen Winkel der Orthogonalkreise des Äquators. Der Beweis dieses hinreichend bekannten Satzes wird in § 10 nachgeholt. Der nichteuklidische Flächeninhalt kann wieder durch den sphärischen Exzeß ausgedrückt werden (wie sich im § 10 allgemein zeigen lassen wird).

Eine weitere Abbildung der hyperbolischen Geometrie erhält man, wenn man die eben behandelte Kugel von einem Punkte ihres Äquators auf eine komplexe ζ-Ebene stereographisch projiziert, so daß der Äquator in die reelle Achse übergeht. Die nichteuklidischen Geraden gehen in die auf der reellen Achse senkrechten Kreise über. Da die Abbildung konform ist, so sind die nichteuklidischen Winkel wieder gleich den euklidischen. Die Gruppe der nichteuklidischen Bewegungen muß die Orthogonalkreise der reellen Achse wieder in Orthogonalkreise der reellen Achse überführen und winkeltreu sein. Die Gruppe aller dieser Transformationen wird durch die sämtlichen linear gebrochenen Substitutionen

$$\zeta^* = \frac{\alpha\zeta + \beta}{\gamma\zeta + \delta} \qquad \text{(mit reellen } \alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta\text{)} \tag{2}$$

gebildet. Die nichteuklidische Entfernung ist nun eine Funktion, die bei diesen Substitutionen gleichfalls invariant bleibt. Diese Eigenschaft besitzt das sogenannte nichteuklidische Bogenelement $\frac{d\sigma}{\eta}$, das nach der Transformation in $\frac{d\sigma^*}{\eta^*}$ übergeht, wie sich folgendermaßen zeigen läßt.

Es ist

$$d\sigma = \sqrt{d\xi^2 + d\eta^2} = \sqrt{d\zeta d\bar{\zeta}} \tag{3}$$

(wo $\bar{\zeta}$ den konjugiert komplexen Wert von ζ bezeichnet). Nun ist

$$d\zeta^* = \frac{\alpha\delta - \beta\gamma}{(\gamma\zeta + \delta)^2} d\zeta \quad \text{und} \quad \eta^* = \frac{\alpha\delta - \beta\gamma}{(\gamma\zeta + \delta)(\gamma\bar{\zeta} + \delta)} \eta. \tag{4}$$

Es geht also $\frac{d\zeta d\bar{\zeta}}{\eta^2}$ und ebenso $\frac{d\sigma}{\eta} = \sqrt{\frac{d\zeta d\bar{\zeta}}{\eta^2}}$ bei der Substitution

$$\zeta^* = \frac{\alpha\zeta + \beta}{\gamma\zeta + \delta} \tag{2}$$

in sich über. Außerdem gilt für das nichteuklidische Bogenelement das Additionstheorem. D. h. es ist

$$\int_a^b \frac{d\sigma}{\eta} = \int_a^c \frac{d\sigma}{\eta} + \int_c^b \frac{d\sigma}{\eta}, \tag{5}$$

wenn c auf dem Integrationswege von a nach b liegt.

Die nichteuklidische Länge ist daher bei der Abbildung auf die komplexe ζ-Ebene

$$\int_a^b \frac{d\sigma}{\eta},$$

wobei das Integral über denjenigen Weg genommen wird, dessen Länge gemessen werden soll.

Der nichteuklidische Flächeninhalt endlich, der sich aus kleinen Elementarrechtecken zusammensetzt, ist

$$\int\int \frac{d\xi d\eta}{\eta^2}.$$

Ganz außerhalb dieses Zusammenhangs steht die Abbildung der hyperbolischen Geometrie auf die Pseudosphäre, die Fläche konstanten negativen Krümmungsmaßes, die durch Rotation der Traktrix erzeugt wird.

§ 2. Die hyperbolische Geometrie auf dem zweischaligen Hyperboloid.

Die von Poincaré und Minkowski a. a. O. erwähnte Abbildung entsteht nun folgendermaßen. Die Ebene, in der die hyperbolische Geometrie herrscht, ist die unendlichferne Ebene. Der Nullpunkt ist das Projektionszentrum. Die Fläche zweiten Grades muß aus der unendlichfernen Ebene jetzt einen reellen absoluten Kegelschnitt ausschneiden. Es tut dies z. B. ein zweischaliges Hyperboloid, und wir wählen dasselbe speziell so, daß es in rechtwinkligen Koordinaten die Gleichung

$$x^2 + y^2 - z^2 + 1 = 0 \tag{1}$$

hat. Der Pol der unendlichfernen Ebene ist dann der Nullpunkt. Für das Strahlenbündel des Nullpunktes gilt die hyperbolische Geometrie, deren absolutes Gebilde durch den Asymptotenkegel des zweischaligen Hyperboloids

$$x^2 + y^2 - z^2 = 0 \tag{2}$$

dargestellt wird. Das Strahlenbündel im Nullpunkt bildet die hyperbolische Geometrie der unendlichfernen Ebene auf das zweischalige Hyperboloid ab. Und zwar werden die realen Punkte der hyperbolischen Geometrie auf die beiden Schalen so abgebildet, daß die eine Schale der Oberseite, die andere Schale der Unterseite der realen Punkte entspricht.

Die unendlichfernen Punkte der hyperbolischen Geometrie liegen auf dem zweischaligen Hyperboloid selbst wirklich im Unendlichen. Auf dieser Tatsache beruht der Vorteil unserer Abbildung. Den idealen Punkten entsprechen keine reellen Punkte des zweischaligen Hyperboloids. Wir werden weiter unten im § 12 auf die Abbildung der idealen Punkte zurückkommen.

§ 3. Beziehung zwischen der positiven ξ-Halbebene und dem zweischaligen Hyperboloid.

Wir gehen von der positiven Halbebene der komplexen ξ-Ebene, in der die hyperbolische Geometrie gelten sollte, aus. Es genüge nun jeder Punkt ξ einer quadratischen Gleichung

$$a\xi^2 + 2b\xi + c = 0. \tag{1}$$

Die Wurzeln dieser Gleichung sind

$$\begin{cases} \xi = \xi + i\eta = -\dfrac{b}{a} + \dfrac{\sqrt{b^2 - ac}}{a} \\ \bar{\xi} = \xi - i\eta = -\dfrac{b}{a} - \dfrac{\sqrt{b^2 - ac}}{a}. \end{cases} \tag{2}$$

a, b, c sind Parameter. Diese können als rechtwinklige Koordinaten eines Raumes aufgefaßt werden. Wir treffen die Festsetzung, daß die Diskriminante

$$b^2 - ac = -1 \tag{3}$$

sei. Wir substituieren noch

$$\begin{cases} a = z + x \\ c = z - x \\ b = -y. \end{cases} \tag{4}$$

Dann geht die Diskriminante (3) über in

$$x^2 + y^2 - z^2 + 1 = 0, \tag{5}$$

ıng des zweischaligen Hyperboloids. Es ist

$$\begin{cases} \xi = -\frac{b}{a} \\ \eta = \quad \frac{1}{a}, \end{cases}$$

ɔm Werte von ζ ein Wertsystem a, b, c bzw. x, y, z und jedem Wertsystem von x, y, z ein Wert von ζ entspricht. en wir festsetzen, daß ζ nur die Werte der positiven Halbhlaufen darf, während z immer positiv sei. Dann wird ɔ ζ-Halbebene auf die eine Schale des zweischaligen Hyperdeutig abgebildet.

§ 4. Nichteuklidische Geraden.

hyperbolischen Geometrie des Strahlenbüschels waren die rch den Nullpunkt die nichteuklidischen Geraden. Diese aus dem Hyperboloid Hyperbeln aus, die die nichteukliɔraden abbilden. Diesen müssen die Halbkreise auf der ıse der ζ-Ebene entsprechen. Das ist in der Tat der Fall, ichung der Orthogonalkreise der ξ-Achse

$$\alpha(\xi^2 + \eta^2) + 2\beta\xi + \gamma = 0$$

olgt aus [§ 3 (2)], daß

$$\begin{cases} \xi^2 + \eta^2 = \zeta\bar{\zeta} = \frac{c}{a} \\ \qquad 2\xi = \zeta + \bar{\zeta} = -2\frac{b}{a} \end{cases}$$

wir diese Werte in (1) einsetzen und noch mit a multio erhalten wir

$$\alpha \cdot c - 2\beta \cdot b + \gamma \cdot a = 0.$$

ı wir noch die x, y, z statt der a, b, c ein, so geht (3)

$$\begin{cases} (\gamma - \alpha) \cdot x + 2\beta \cdot y + (\gamma + \alpha)z = 0 \quad \text{oder} \\ \qquad \alpha' x + \beta' y + \gamma' z = 0. \end{cases}$$

ɔ Gleichung einer Ebene durch den Nullpunkt.

§ 5. Nichteuklidische Entfernung.

ichteuklidische Entfernung war in der ζ-Ebene

$$\int \frac{d\sigma}{\eta}$$

413), wobei das Integral längs einer nichteuklidischen Gemmen werden muß. Auf dem Hyperboloid wird auf einer

nichteuklidischen Geraden (einer Hyperbel, die von einer Ebene durch den Nullpunkt ausgeschnitten wird) eine Strecke durch zwei Punkte begrenzt. Verbinden wir den Nullpunkt mit den beiden Endpunkten und ziehen außerdem die beiden Asymptoten an die Hyperbel, so sollte die nichteuklidische Entfernung durch den Logarithmus des Doppelverhältnisses dieser vier Strahlen definiert werden, der jedoch noch mit einer geeigneten Konstanten multipliziert werden mußte. Um den Zusammenhang zwischen den beiden Definitionen herzustellen und gleichzeitig die Konstante zu bestimmen, greifen wir eine bestimmte nichteuklidische Gerade heraus, nämlich die imaginäre Achse der ζ-Ebene. Es ist für diese

(1) $$\xi = 0,$$

also auch infolge von [§ 3 (6)] und [§ 3 (4)]

(2) $$\begin{cases} b = 0 & \text{und} \\ y = 0 \end{cases}$$

und wegen [§ 3 (3)]

(3) $$\begin{cases} ac = 1 \\ z^2 - x^2 = 1. \end{cases}$$

Die η-Achse geht also in die Hyperbel der xz-Ebene über. Auf der η-Achse ist die nichteuklidische Entfernung zwischen zwei Punkten $P_1(0, \eta_1)$ und $P_2(0, \eta_2)$

$$\int_{\eta_1}^{\eta_2} \frac{d\eta}{\eta}.$$

Da nun nach [§ 3 (6)]

$$\eta = \frac{1}{a}$$

ist, so wird

(4) $$\frac{d\eta}{\eta} = -\frac{da}{a},$$

also

(5) $$\int_{\eta_1}^{\eta_2} \frac{d\eta}{\eta} = \int_{a_2}^{a_1} \frac{da}{a} = \ln a_1 - \ln a_2.$$

Wegen (3) ist

$$a = \frac{1}{c},$$

also

(6) $$\ln a = \tfrac{1}{2} \ln (a^2) = \tfrac{1}{2} \ln \frac{a}{c}.$$

Es wird also

(7) $$\int_{\eta_2}^{\eta_1} \frac{da}{a} = \tfrac{1}{2}\left[\ln \frac{a_1}{c_1} - \ln \frac{a_2}{c_2}\right] = \tfrac{1}{2} \ln \left(\frac{a_1}{c_1} : \frac{a_2}{c_2}\right).$$

: $\frac{a_2}{c_2}$ ist aber das Doppelverhältnis der vier Strahlen a, c, I, II in

gur 1. Die beiden Definitionen der Entnung, die bei den nichteuklidischen Begungen invariant bleiben sollten und für die s Additionstheorem galt, stimmen also in r Tat miteinander überein. Die geeignete onstante, mit der der Logarithmus des ppelverhältnisses multipliziert wern mußte, hat, wie sich hier ergeben hat, n Wert $\frac{1}{2}$.

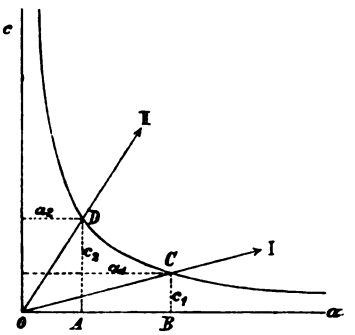


Fig. 1.

)
$$\int_{a_2}^{a_1} \frac{da}{a} = \int_{c_2}^{a_1} c\,da$$

fert den Inhalt des Flächenstücks $ABCD$. Da nun wegen

)
$$ac = 1$$

)
$$OAD = OBC = \tfrac{1}{2}$$

t, so wird

10)
$$ABCD = OCD \quad \text{(Figur 1)}.$$

Die nichteuklidische Entfernung wäre also gleich dem Hyperbelktor. Gehen wir aber von dem abc-Koordinatensystem wieder zum yz-Koordinatensystem über, so ist das Einheitsquadrat der xz-Ebene cht mit dem Einheitsadrat der ac-Ebene idench, sondern doppelt so oß (Figur 2).

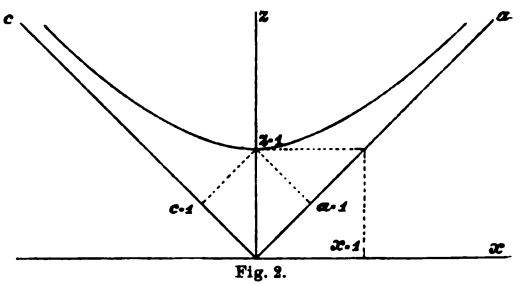


Fig. 2.

Der Flächeninhalt des ktors OCD in Figur 1 also in einem zu kleinen aßstabe gemessen. Sein halt ist in Wahrheit, h. im xz-Koordinatensystem, nur halb so groß. Die nichteuklidische atfernung zweier Punkte ist also gleich dem doppelten Flächensektor. ir jede andere nichteuklidische Gerade durch den Scheitelpunkt gilt eselbe projektive Maßbestimmung. Also ist die nichteuklidische atfernung auf ihr gleichfalls gleich dem doppelten Flächensektor.

Nehmen wir hingegen eine beliebige andere Hyperbel, die von ner Ebene durch den Nullpunkt aus dem Hyperboloid ausgeschnitten ird, so wird sich wegen der vollkommenen Symmetrie in bezug auf die Achse, wie im § 7 streng bewiesen werden soll, nichts ändern, wenn

wir die Ebene, welche die Hyperbel ausschneidet, durch die x-Achse legen. Ist ihre Gleichung

(11) $$y = z \operatorname{tg} \omega,$$

so können wir

(12) $$p = \frac{z}{\cos \omega}$$

setzen und p und x als Koordinaten dieser Ebene auffassen. Der Scheitelpunkt der Hyperbel, welche diese Ebene ausschneidet, habe die Koordinaten O, y_0, z_0. Dann ist

(13) $$p_0 = \sqrt{y_0^2 + z_0^2}$$

die halbe große Achse der Hyperbel. Um auch die halbe kleine Achse der Hyperbel zu erhalten, ziehen wir in einem Scheitelpunkt die Tangente, die der x-Achse parallel ist. Wir erhalten die halbe kleine Achse, wenn wir den Abschnitt dieser Tangente bis zum Asymptotenkegel nehmen. Da nun für das Hyperboloid die Gleichung

(14) $$z_0^2 - y_0^2 = 1$$

und für den Asymptotenkegel

(15) $$z_0^2 - y_0^2 - x^2 = 0$$

gelten muß, so ist $x = 1$ die Länge der halben kleinen Achse. Zwei Hyperbeln mit derselben kleinen Achse lassen sich aber leicht im Raume in eine affine Lage bringen. Man hat nur nötig, ihre Nebenachsen aufeinanderzulegen. (Es sind dies die x-Achsen, die hier schon aufeinanderfallen.) Dann kann man die eine Hyperbel durch ein Parallelstrahlenbündel auf die andere projizieren. Dabei gehen die Asymptoten der einen in die der anderen über und zwei Zentralstrahlen der einen in zwei Zentralstrahlen der anderen, die auf den Tangenten im Scheitelpunkt dieselben Abschnitte abschneiden. Wenn die eine die Hyperbel der xz-Ebene war, während die andere die Hyperbel der Ebene

(11) $$y = z \operatorname{tg} \omega$$

war, so ist bei der zweiten Hyperbel jedes x ein x geblieben, während jedes z ein $p_0 z$ geworden ist. Der Flächensektor der zweiten Hyperbel ist daher p_0 mal größer als der entsprechende der ersten. Die nichteuklidische Entfernung zweier Punkte der zweiten ist aber gleich dem doppelten Flächensektor der ersten. Folglich ist die nichteuklidische Entfernung zweier Punkte gleich dem doppelten Flächensektor dividiert durch die große Achse der nichteuklidischen Verbindungsgeraden der beiden Punkte.

§ 6. Nichteuklidische Bewegungen.

In der ζ-Ebene wurden die nichteuklidischen Bewegungen durch ie Gruppe der linear gebrochenen Substitutionen [§ 1 (2)]

$$\zeta^* = \frac{\alpha\zeta + \beta}{\gamma\zeta + \delta}$$

efiniert. Zunächst können wir es immer so einrichten, daß

1) $$\alpha\delta - \beta\gamma = 1$$

ird. Dann bilden wir

2) $$\begin{cases} \zeta^* = \xi^* + i\eta^* = \dfrac{\alpha\gamma\zeta\bar{\zeta} + \xi(\alpha\delta + \beta\gamma) + \beta\delta + i\eta(\alpha\delta - \beta\gamma)}{\gamma^2\zeta\bar{\zeta} + 2\gamma\delta\xi + \delta^2} \\ \quad = -\dfrac{b^*}{a^*} + \dfrac{i}{a^*} = \dfrac{\alpha\gamma \cdot c - (\alpha\delta + \beta\gamma)\cdot b + \beta\delta \cdot a}{\gamma^2 \cdot c - 2\gamma\delta \cdot b + \delta^2 \cdot a} + \dfrac{i}{\gamma^2 \cdot c - 2\gamma\delta \cdot b + \delta^2 \cdot a} \end{cases}$$

nd

3) $$\begin{cases} \zeta^*\bar{\zeta}^* = \xi^{*2} + \eta^{*2} = \dfrac{\alpha^2\zeta\bar{\zeta} - 2\alpha\beta\xi + \beta^2}{\gamma^2\zeta\bar{\zeta} - 2\gamma\delta\xi + \delta^2} \\ \quad = \dfrac{c^*}{a^*} = \dfrac{\alpha^2 \cdot c - 2\alpha\beta \cdot b + \beta^2 \cdot a}{\gamma^2 \cdot c - 2\gamma\delta \cdot b + \delta^2 \cdot a}. \end{cases}$$

Daraus folgt, daß

4) $$\begin{cases} a^* = \delta^2 \cdot a - 2\gamma\delta \cdot b + \gamma^2 \cdot c \\ b^* = -\beta\delta \cdot a + (\alpha\delta + \beta\gamma) \cdot b - \alpha\gamma \cdot c \\ c^* = \beta^2 \cdot a - 2\alpha\beta \cdot b + \alpha^2 \cdot c. \end{cases}$$

Die Funktionaldeterminante dieser Substitution ist

5) $$\frac{\partial(a^*b^*c^*)}{\partial(abc)} = (\alpha\delta - \beta\gamma)^3 = 1.$$

erner ist

6) $$a^*c^* - b^{*2} = (ac - b^2)(\alpha\delta - \beta\gamma)^2 = ac - b^2 = 1$$

ne Invariante der Substitution (4). Diese ist also eine Koordinaten-ansformation, die das zweischalige Hyperboloid [§ 3 (3)]

$$ac - b^2 = 1$$

ı sich überführt. Führen wir statt der a, b, c und a^*, b^*, c^* in (4) ie x, y, z und x^*, y^*, z^* [§ 3 (8)] ein, so erhalten wir die Substitution

7) $$\begin{cases} x^* = \alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 z \\ y^* = \beta_1 x + \beta_2 y + \beta_3 z \\ z^* = \gamma_1 x + \gamma_2 y + \gamma_3 z. \end{cases}$$

o

8) $$\begin{cases} \alpha_1 = \dfrac{\alpha^2 - \beta^2 - \gamma^2 + \delta^2}{2}, & \alpha_2 = \gamma\delta - \alpha\beta, & \alpha_3 = \dfrac{-\alpha^2 - \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2}{2} \\ \beta_1 = \beta\delta - \alpha\gamma, & \beta_2 = \alpha\delta + \beta\gamma, & \beta_3 = \beta\delta + \alpha\gamma \\ \gamma_1 = \dfrac{-\alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2 + \delta^2}{2}, & \gamma_2 = \gamma\delta + \alpha\beta, & \gamma_3 = \dfrac{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2}{2}. \end{cases}$$

Die Funktionaldeterminante ist wieder

$$(9) \qquad \frac{\partial(x^*y^*z^*)}{\partial(xyz)} = \begin{vmatrix} \alpha_1\alpha_2\alpha_3 \\ \beta_1\beta_2\beta_3 \\ \gamma_1\gamma_2\gamma_3 \end{vmatrix} = (\alpha\delta - \beta\gamma)^3 = 1.$$

Zwischen den 9 Größen $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ bestehen aber infolge von (8) noch weitere Relationen. Diese erhalten wir, wenn wir berücksichtigen, daß wegen der Invarianz von

$$(6) \qquad a^*c^* - b^{*2} = ac - b^2$$

das Hyperboloid in sich übergeführt werden muß. Führen wir in (6) für die a, b, c und a^*, b^*, c^* die x, y, z und x^*, y^*, z^* [§ 3 (4)] ein, so geht (6) über in

$$(10) \qquad -x^{*2} - y^{*2} + z^{*2} = -x^2 - y^2 + z^2.$$

Wir setzen für x^*, y^*, z^* ihre Werte aus (7) ein und erhalten

$$(11) \quad \begin{cases} -\alpha_1^2 - \beta_1^2 + \gamma_1^2 = -1 & -\alpha_2\alpha_3 - \beta_2\beta_3 + \gamma_2\gamma_3 = 0 \\ -\alpha_2^2 - \beta_2^2 + \gamma_2^2 = -1 & -\alpha_3\alpha_1 - \beta_3\beta_1 + \gamma_3\gamma_1 = 0 \\ -\alpha_3^2 - \beta_3^2 + \gamma_3^2 = +1 & -\alpha_1\alpha_2 - \beta_1\beta_2 + \gamma_1\gamma_2 = 0. \end{cases}$$

Mit Hilfe dieser Relationen lösen wir die drei Gleichungen (7) auf und erhalten

$$(7a) \quad \begin{cases} x = \alpha_1 x^* + \beta_1 y^* - \gamma_1 z^* \\ y = \alpha_2 x^* + \beta_2 y^* - \gamma_1 z^* \\ z = -\alpha_3 x^* - \beta_3 y^* - \gamma_3 z^*. \end{cases}$$

Setzen wir in (10) diese Werte für x, y, z ein, so ergeben sich die weiteren Relationen

$$(11a) \quad \begin{cases} -\alpha_1^2 - \alpha_2^2 + \alpha_3^2 = -1 & \beta_1\gamma_1 + \beta_2\gamma_2 - \beta_3\gamma_3 = 0 \\ -\beta_1^2 - \beta_2^2 + \beta_3^2 = -1 & \gamma_1\alpha_1 + \gamma_2\alpha_2 - \gamma_3\alpha_3 = 0 \\ -\gamma_1^2 - \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = +1 & \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 - \alpha_3\beta_3 = 0. \end{cases}$$

Einer euklidischen Drehung des Raumes um den Nullpunkt entspricht eine nichteuklidische Bewegung der unendlichfernen Ebene, in der elliptische Geometrie herrscht. Die Einheitskugel wird dabei in sich übergeführt, wodurch bewirkt wird, daß zwischen den Koeffizienten der Drehungstransformation die sogenannten Orthogonalitätsrelationen bestehen. Diese unterscheiden sich von den Formeln (11) und (11a) nur dadurch, daß in ihnen überall positive Vorzeichen stehen. Die Formeln (11) und (11a) können wir daher zweckmäßig Pseudo-orthogonalitätsrelationen nennen. Wir können daher die Untersuchungen dieses Paragraphen dahin zusammenfassen, daß wir sagen: Die nichteuklidischen Bewegungen werden definiert durch

alle diejenigen projektiven Transformationen, die den Nullpunkt ungeändert lassen und das zweischalige Hyperboloid in sich überführen. Denn diese werden durch die drei linearen Relationen (7) festgelegt, für deren Koeffizienten die Pseudoorthogonalitätsrelationen (11) gelten. Aus den Pseudoorthogonalitätsrelationen folgt auch, daß die Funktionaldeterminante (9) den Wert 1 hat.

§ 7. Zusammensetzung von Bewegungen.

Jede Bewegung der Ebene läßt sich aus Verschiebung und Drehung zusammensetzen. Für die nichteuklidische Geometrie auf dem zweischaligen Hyperboloid gilt das gleiche. Unsere Formeln werden bei zwei speziellen Bewegungen höchst einfach, nämlich bei Verschiebungen längs der Hyperbel in der $x\varepsilon$-Ebene, der die η-Achse in der ξ-Ebene entsprach und bei Drehungen um den Scheitelpunkt des Hyperboloids.

Wir beweisen zunächst den Satz: Die nichteuklidischen Drehungen um den Scheitelpunkt sind mit den euklidischen identisch.

Der Nullpunkt bleibt Nullpunkt, der Scheitelpunkt Scheitelpunkt. Folglich bleibt die z-Achse ε-Achse. Die unendlichferne Ebene als Polarebene des Nullpunkts in bezug auf das Hyperboloid bleibt unendlichferne Ebene. Es bleibt also auch der unendlichferne Punkt der z-Achse unendlichferner Punkt der ε-Achse. Drei Punkte legen über eine projektive Beziehung auf einer Geraden völlig fest. Es kann daher kein Punkt der z-Achse bei einer der projektiven Transformationen, die bei der Drehung um den Scheitelpunkt zugelassen sind, in einen anderen Punkt der ε-Achse fallen. Parallele Ebenen gehen wieder in parallele Ebenen über, weil ihre Schnittgerade vor und nach der Transformation in der unendlichfernen Ebene liegen muß. Jede auf der ε-Achse senkrechte Ebene bleibt sich selbst parallel, also senkrecht auf der z-Achse. Da sie vor und nach der Transformation durch den gleichen Punkt der z-Achse gehen muß, so wird sie überhaupt in sich übergeführt. Es wird also bei der nichteuklidischen Drehung um den Scheitelpunkt jede Ebene $\varepsilon = \text{konst.}$ in sich übergeführt. Bei einer euklidischen Drehung gehen zwei beliebige zueinander senkrechte Geraden der Ebene $\varepsilon = \text{konst.}$ wieder in zwei aufeinander senkrechte über. Wenn das gleiche bei unserer nichteuklidischen Drehung um die ε-Achse der Fall ist, dann ist die nichteuklidische Drehung eine euklidische, da sie ja die von den Ebenen $\varepsilon = \text{konst.}$ aus dem Hyperboloid ausgeschnittenen Kreise in

sich überführt. Wir greifen zwei aufeinander senkrechte Strahlen durch den Mittelpunkt eines dieser Kreise heraus. Im Endpunkte des einen Strahles ist dann die Tangente parallel zu dem anderen Strahl. Nach der nichteuklidischen Drehung um den Mittelpunkt (einen Punkt der z-Achse) muß dieser Strahl der Tangente parallel bleiben, da die unendlichfernen Punkte unendlichfern bleiben. Der erste Strahl geht wieder in den Radiusvektor vom Nullpunkt zum Berührungspunkte der Tangente über, er steht also auf der Tangente und daher auch auf dem anderen Strahl senkrecht. Es folgt daraus der Satz, daß alle nichteuklidischen Bewegungen, die den Scheitelpunkt invariant lassen, euklidische Drehungen um die z-Achse sind.

Die analytische Form der nichteuklidischen Drehung um den Scheitelpunkt ist demnach

$$(1)\qquad \begin{cases} x' = x\cos\varphi + y\sin\varphi \\ y' = -x\sin\varphi + y\cos\varphi \\ z' = z. \end{cases}$$

Die analytische Form der nichteuklidischen Verschiebung längs der Hyperbel der xz-Ebene ist

$$(2)\qquad \begin{cases} x' = \mu x + \nu z \\ z' = \nu x + \mu z \\ y' = y. \end{cases}$$

wobei

$$(3)\qquad \mu^2 - \nu^2 = 1$$

sein muß. Es sind also

$$(4)\qquad \mu = \cos\text{hyp}\,\psi \quad \text{und} \quad \nu = \sin\text{hyp}\,\psi.$$

Eine beliebige Bewegung kann man dann so zusammensetzen, daß man, um eine Strecke PQ in eine ihr gleiche $P'Q'$ überzuführen,

1. eine Drehung um den Scheitel, bis P nach P_0 in die xz-Ebene fällt,

2. eine Verschiebung längs dieser Hyperbel der xz-Ebene, bis P_0 in den Scheitelpunkt A fällt, ausführt.

Q falle dabei nach B.

3. Vollführt man eine Drehung um A, so daß AB nach AB' fällt.

4. Verschiebt man A längs der Hyperbel der xz-Ebene, so daß es nach P_2 fällt.

B' falle dabei nach Q_2.

5. Dreht man um den Scheitelpunkt, so daß P_2 nach P' und Q_2 nach Q' fällt.

Die Bewegungen 3 und 4 lassen sich immer so wählen, daß 5 Genüge geleistet werden kann.

§ 8. Kreise und Parallelen.

Parallele Ebenen gehen bei den nichteuklidischen Bewegungen wieder in parallele Ebenen über, weil ihre unendlichferne Schnittgerade unendlichfern bleiben muß. Tangentialebenen gehen wieder in Tangentialebenen über. Auf allen nichteuklidischen Geraden durch den Scheitelpunkt A schneidet eine Ebene z=konst. Stücke gleicher nichteuklidischer Länge ab, da jedes der Hyperbelstücke durch Drehung um A in das gleiche Stück der Hyperbel der xz-Ebene übergeführt werden kann. Jede der Ebenen z = konst, schneidet also einen nichteuklidischen Kreis aus dem Hyperboloid aus. Führen wir nun eine nichteuklidische Bewegung aus, bei der A in P übergeht, so geht die Tangentialebene in A über in die Tangentialebene in P, und die zur Tangentialebene in A parallelen Ebenen z = konst. gehen über in Parallelebenen zur Tangentialebene in P. Da die nichteuklidischen Entfernungen bei der nichteuklidischen Bewegung erhalten bleiben, so schneiden die Parallelebenen zur Tangentialebene in P konzentrische nichteuklidische Kreise aus dem Hyperboloid aus, deren Mittelpunkt P ist. Jede Ebene schneidet das Hyperboloid in einem nichteuklidischen Kreis, dessen Mittelpunkt wir finden, wenn wir den Berührungspunkt der parallelen Tangentialebene aufsuchen.

Dabei ist aber zu bemerken, daß der Mittelpunkt des Kreises auch ein idealer Punkt sein kann, während ein Teil des Kreisbogens real ist und reelle unendlichferne Punkte besitzt.

Um die gegenseitige Lage dieser Kreise auch in der ζ-Ebene richtig aufzufassen, ist es am praktischsten, von der Abbildung der hyperbolischen Geometrie auf der Kugel auszugehen, bei der der Äquator die unendlichfernen Punkte lieferte. Da die unendlichferne Ebene bei der Abbildung auf das Hyperboloid der xy-Ebene bei der Abbildung auf die Kugel entspricht, so entspricht einem parallelen Ebenenbüschel in der Hyperboloidabbildung ein Ebenenbüschel der Kugelabbildung, dessen Achse in die xy-Ebene fällt. Ein solches Büschel schneidet die Kugel in konzentrischen nichteuklidischen Kreisen. Die beiden Tangentialebenen berühren die Kugel in dem gemeinsamen Mittelpunkt der Kreise und in seinem Spiegelbild (dem Bild der Unterseite des Mittelpunktes). Ein Ebenenbüschel durch diese beiden

Punkte schneidet aus der Kugel Kreise aus, die auf den Kreisen des ersten Büschels orthogonal stehen. Da der Äquator unter den Kreisen des ersten Büschels enthalten ist, so sind die Kreise des zweiten Büschels die nichteuklidischen Geraden durch den Mittelpunkt der konzentrischen Kreise. Die stereographische Projektion auf die ζ-Ebene ist kreisverwandt und winkeltreu. Infolgedessen sind die nichteuklidischen Kreise der ζ-Ebene Kreise, die auf den nichteuklidischen Geraden durch ihren Mittelpunkt senkrecht stehen. Je nachdem, ob die Mittelpunkte der Kreise real oder ideal sind, erhalten wir in der ζ-Ebene Kreise, die die reelle Achse nicht treffen oder treffen. (Fig. 3 und Fig. 4.)

Wir greifen eine nichteuklidische Gerade a heraus, die durch die Ebene A (durch den Nullpunkt) ausgeschnitten wurde. Durch einen

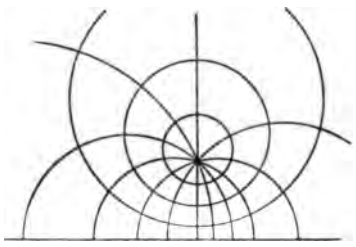


Fig. 3.

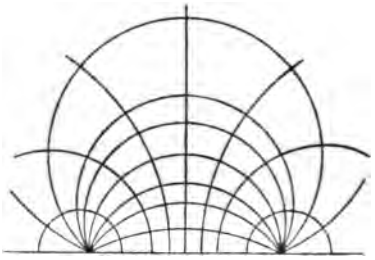


Fig. 4.

Punkt P legen wir dann eine zweite (bewegliche) nichteuklidische Gerade p, welche die Gerade a im Punkte G schneidet, wenn die zu p gehörige Ebene Π die Ebene A in einer (euklidischen) Geraden g trifft, die innerhalb des Asymptotenkegels liegt. Fällt g auf den Asymptotenkegel (in eine der beiden Asymptoten von a), so ist p zu a parallel, liegt g außerhalb des Asymptotenkegels, so haben p und a keinen realen Schnittpunkt gemein. Über ihren idealen Schnittpunkt vgl. § 12. Der wesentliche Vorteil der hyperbolischen Geometrie auf dem zweischaligen Hyperboloid beruht darauf, daß das Parallelenaxiom: Es gibt durch einen Punkt zwei Parallelen zu einer Geraden. Zwischen ihnen liegt ein Büschel von Strahlen, das die Gerade nicht schneidet, sich in der anschaulichsten Form darstellen läßt.

§ 9. Flächeninhalt.

In der ζ-Ebene ist der Flächeninhalt eines rechteckigen Flächenelements

$$dF = \frac{d\xi\, d\eta}{\eta^2}. \tag{1}$$

Statt dessen nehmen wir ein Rechteck, das von zwei benachbarten Radien und von zwei benachbarten konzentrischen Kreisbogen gebildet wird. Dieses Rechteck können wir immer durch eine nichteuklidische Bewegung in eine solche Lage bringen, daß der Mittelpunkt der beiden Kreise in den Punkt A mit den Koordinaten $\xi = 0$, $\eta = 1$ und der eine Radius in die η-Achse fällt (Figur 5). Der η-Achse $\xi = 0$ entspricht auf dem Hyperboloid wegen

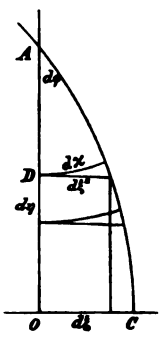


Fig. 5

$$(2) \qquad \begin{cases} \xi = -\frac{b}{a} = 0 \\ -b = y = 0, \end{cases}$$

die Hyperbel der xz-Ebene. Dem Punkte $\xi = 0$, $\eta = 1$ entspricht wegen

$$(3) \qquad \begin{cases} \eta = \frac{1}{a} = 1 \quad \text{und} \\ ac = 1 \end{cases}$$

der Punkt

$$(4) \qquad \begin{cases} a = 1,\ c = 1,\ b = 0 \quad \text{oder} \\ z = 1,\ x = 0,\ y = 0, \end{cases}$$

d. h. der Scheitelpunkt.

Die η-Achse und der benachbarte Kreis, dessen Mittelpunkt M heiße, bilden den Winkel $d\varphi$ miteinander (Figur 6). Der Kreis um M schneide die reelle Achse in B und C. Dann ist

$$(5) \qquad \sphericalangle ABC = \frac{d\varphi}{2}.$$

Der Radius MC heiße τ. Es sei die Strecke

$$(6) \qquad OC = d\xi.$$

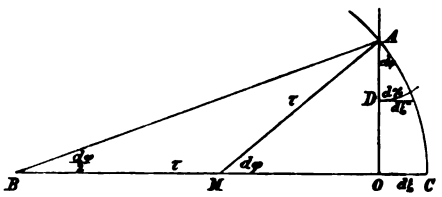


Fig. 6.

Das Bogenelement des inneren Kreises heiße dx, die Tangente in seinem Schnittpunkt mit der η-Achse habe zwischen der η-Achse und dem Kreise um M die Länge $d\xi^*$. Der äußere Kreis sei auf der η-Achse um $-d\eta$ vom inneren entfernt (Figur 5). Dann ist der nichteuklidische Flächeninhalt des Rechtecks

$$(7) \qquad dF = \frac{dx\,d\eta}{\eta^2}.$$

Dieses Rechteck lassen wir unendlich klein werden, so daß wir für die Größe dx nur unendlich kleine Größen bei der Berechnung zu berücksichtigen brauchen. Die Strecke AO ist gleich 1. Es ist daher nach Figur 6

(8) $$d\xi : 1 = 1 : (2\tau - d\xi),$$

(9) $$\frac{1}{2\tau - d\xi} = \text{tang}\,\frac{d\varphi}{2}.$$

Folglich ist

(10) $$2\tau d\xi - d\xi^2 = 1 \quad \text{und}$$

(11) $$\frac{1}{2\tau} + \frac{d\xi}{4\tau^2} + \cdots = \frac{d\varphi}{2} + \frac{1}{3}\left(\frac{d\varphi}{2}\right)^3 + \cdots.$$

Nun ist τ unendlich groß von der ersten Ordnung, also $\frac{1}{2\tau}$ unendlich klein von der ersten Ordnung. Berücksichtigen wir nur die Glieder erster Ordnung, so wird

(12) $$\begin{cases} 2\tau d\xi = 1 \\ \frac{1}{2\tau} = \frac{d\varphi}{2}. \end{cases}$$

Ferner ist

(13) $$d\xi^* = d\varkappa + \text{Glieder höherer Ordnung.}$$

Ferner folgt aus Figur 7

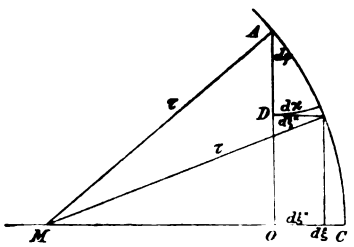


Fig. 7.

(14) $$\tau^2 = (\tau - d\xi + d\xi^*)^2 + \eta^2,$$

(15) $$0 = -2\tau d\xi + 2\tau d\xi^* + d\xi^2 + 2 d\xi d\xi^* + \eta^2.$$

Unter Vernachlässigung der Glieder höherer Ordnung und wegen (12) wird

(16) $$2\tau d\xi^* = 1 - \eta^2$$

(17) $$d\xi^* = (1 - \eta^2)\frac{1}{2\tau}$$

(18) $$d\xi^* = (1 - \eta^2)\frac{d\varphi}{2}.$$

Der Flächeninhalt des Rechtecks wird also

(19) $$dF = \frac{d\xi^* d\eta}{\eta^2} = \frac{d\eta}{\eta}\left(\frac{1}{\eta} - \eta\right)\frac{d\varphi}{2}.$$

Auf dem Hyperboloid der xz-Ebene ist

(20) $$\frac{d\eta}{\eta} = \frac{dc}{c}$$

gleich dem ebenen Elementarsektor im Maße der a, c gemessen. Im Maße der xz gemessen gibt die Zahl $\frac{d\eta}{\eta}$ den doppelten Flächeninhalt des Elementarsektors an. Der Elementarsektor selbst ist $\frac{1}{2}\frac{d\eta}{\eta}$. Dem Flächenelement dF der ζ-Ebene entspricht auf dem Hyperboloid ein Flächenstück df, das von der Hyperbel der xz-Ebene, einer ihr benachbarten nichteuklidischen Geraden durch den Scheitelpunkt, deren Ebene mit der xz-Ebene den Winkel $d\varphi$ einschließt, und zwei benachbarten konzentrischen Kreisen um A ausgeschnitten wird. Der

liche Sektor, der zu dem Flächenstück df gehört, ist gleich dem ıensektor der Hyperbel der xz-Ebene mal dem Drehungswinkel ıal der Schwerpunktskoordinate ϱ, also

$$dV = \frac{1}{2}\frac{d\eta}{\eta} \cdot d\varphi \cdot \varrho \quad \text{(Figur 8)}.$$

Schwerpunktskoordinate ist

$$\varrho = \frac{2}{3}x = \frac{2}{3} \cdot \frac{a-c}{2} = \frac{2}{3} \cdot \frac{\frac{1}{c} - c}{2} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{\eta} - \eta\right).$$

Es wird daher

$$dV = \frac{1}{3}\frac{d\eta}{\eta}\left(\frac{1}{\eta} - \eta\right)\frac{d\varphi}{2} = \frac{1}{3}dF.$$

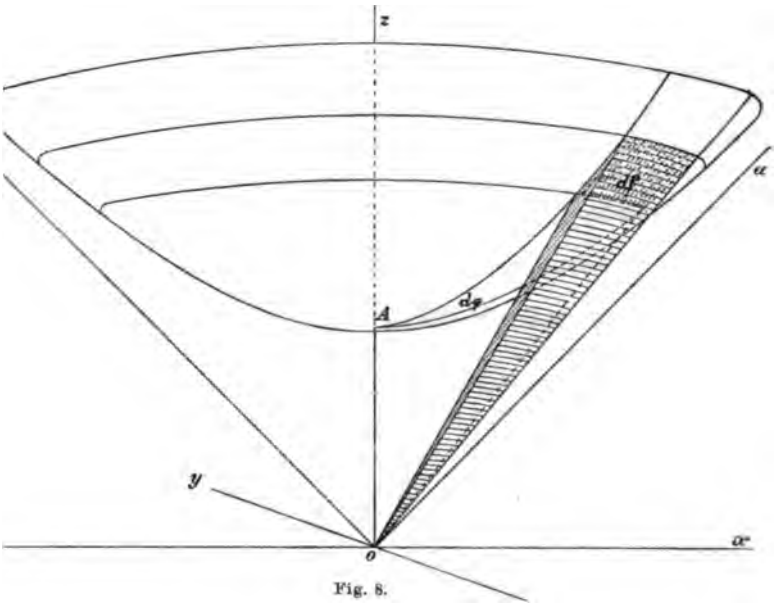


Fig. 8.

ı Flächenelement können wir in diese besondere Lage bringen beweisen, daß dann

$$dV = \frac{1}{3}dF$$

Bei einer nichteuklidischen Bewegung ändert sich dF in der ɜne nicht.

$$V = \underset{\substack{\text{über den}\\ \text{alten Sektor}}}{\iiint} dx\,dy\,dz$$

über in

$$V' = \underset{\substack{\text{über den}\\ \text{neuen Sektor}}}{\iiint} dx^*\,dy^*\,dz^*.$$

Nun ist aber

$$(27) \qquad \iiint_{\text{über den neuen Sektor}} dx^* dy^* dz^* - \iiint_{\text{über den alten Sektor}} dx\,dy\,dz \frac{\partial(x^* y^* z^*)}{\partial(xyz)}.$$

Nach [§ 6 (9)] war

$$\frac{\partial(x^* y^* z^*)}{\partial(xyz)} = 1.$$

Folglich ist

$$(28) \qquad V = V',$$

d. h. bei einer nichteuklidischen Bewegung ändert der räumliche Sektor seinen Inhalt nicht. Daraus folgt, daß auch für beliebige Flächenstücke der Satz gilt:

Der nichteuklidische Flächeninhalt bei der Abbildung auf das zweischalige Hyperboloid ist gleich dem dreifachen Volumen eines Sektors, der von dem Kegel umhüllt wird, den die Strahlen vom Nullpunkt zum Rand des Flächenstückes bilden.

§ 10. Winkel.

Der Winkel zweier nichteuklidischer Geraden läßt sich zunächst durch den mit einer geeigneten Konstanten multiplizierten Logarithmus des Doppelverhältnisses der beiden zugehörigen Ebenen und der Tangentialebenen durch ihre Verbindungsgerade ausdrücken. Die Tangentialebenen sind imaginär, wenn sich die nichteuklidischen Geraden in einem realen Punkte schneiden. Um die geeignete Konstante zu bestimmen, betrachten wir die Abbildung der hyperbolischen Geometrie auf die Kugel. Die beiden nichteuklidischen Geraden mögen sich in P schneiden. Die beiden Ebenen, die die nichteuklidischen Geraden ausschneiden, mögen E_1 und E_2 heißen, die imaginären Tangentialebenen T_1 und T_2, die reelle Tangentialebene sei F_1, die Tangentialebene im Spiegelpunkt Q (in bezug auf die xy-Ebene) F_2. Dann schneiden E_1 und E_2 aus F_1 die Tangenten e_1 und e_2 aus (Figur 9). F_1 enthält die imaginären Erzeugenden t_1 und t_2 der Kugel im Punkte P. T_1 und T_2 müssen gleichfalls je eine der Erzeugenden der Kugel durch den Punkt P enthalten. Beim einschaligen

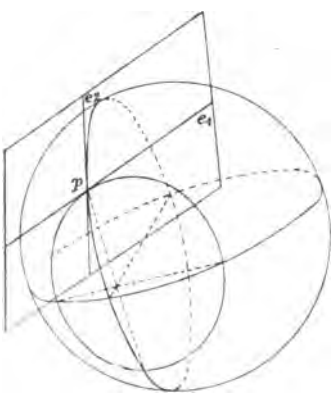


Fig. 9.

Hyperboloid ist diese Tatsache unmittelbar ersichtlich, weil alles reell ist (Figur 10). Für die Kugel muß dasselbe gelten, obgleich einige der Linien und Ebenen imaginär werden. Die Erzeugenden der Kugel im Punkte P sind aber die Minimalgeraden der Tangentialebene. Wir betrachten die Tangentialebene F_1 für sich und legen in ihr homogene Koordinaten x_1, x_2, x_3 fest, so daß die Gerade e_1 die x_1-Achse ($x_2 = 0$) werde. Dann ist der euklidische Winkel

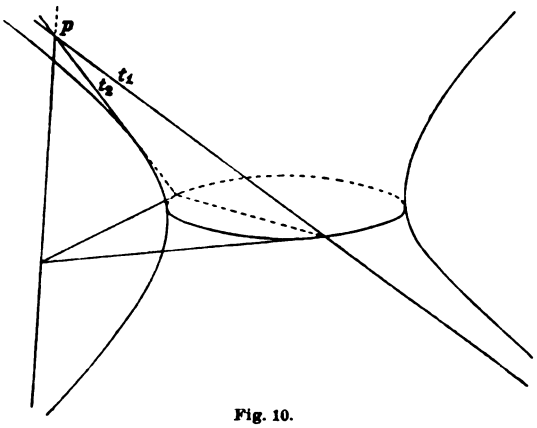


Fig. 10.

$$(1) \qquad \sphericalangle(e_1 e_2) = \text{arc tang}\left(\frac{x_2}{x_1}\right)_{e_2},$$

wo $\left(\frac{x_2}{x_1}\right)_{e_2}$ den Wert von $\frac{x_2}{x_1}$ für die Punkte der Geraden e_2 bezeichnet. Ferner wird, weil t_1 und t_2 Minimalgerade sind,

$$(2) \qquad \begin{cases} \sphericalangle(e_1 t_1) = \text{arc tang}\left(\frac{x_2}{x_1}\right)_{t_1} = \text{arc tang}\, i \\ \sphericalangle(e_1 t_2) = \text{arc tang}\left(\frac{x_2}{x_1}\right)_{t_2} = \text{arc tang}\,(-i). \end{cases}$$

Die Gerade $e_3 = 0$ wird von den Geraden e_1, e_2, t_1, t_2 in den Punkten 0, $\left(\frac{x_2}{x_1}\right)_{e_2} = \varkappa$, $+i$, $-i$ geschnitten. Das Doppelverhältnis dieser vier Punkte bleibt ungeändert, wenn wir die zu $x_3 = 0$ gehörige komplexe $\varkappa$-Ebene (Figur 11) linear transformieren, so daß $+i$ nach 0, 0 nach 1 und $-i$ nach ∞ fällt (Figur 12). Dann geht die reelle Achse in den Einheitskreis über.

$$(3) \qquad \left(\frac{x_2}{x_1}\right)_{e_2} = \varkappa$$

geht dann über in

$$(4) \qquad \varkappa' = e^{2\varphi i}.$$

Dem Punkte ∞ der $\varkappa$-Ebene entspricht nach der Abbildung der Punkt

$$(5) \qquad -1 = e^{\pi i}.$$

In der Ebene F_1 entspricht diesem Punkte die x_2-Achse ($x_1 = 0$), da dann

$$(6) \qquad \begin{cases} \dfrac{x_2}{x_1} = \infty & \text{und} \\ \sphericalangle(e_1 x_2) = \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

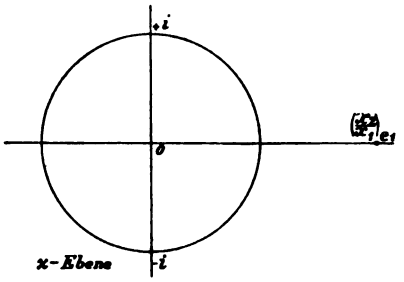


Fig. 11.

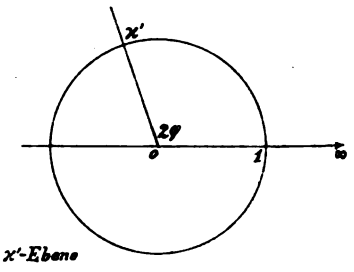


Fig. 12.

wird. Infolgedessen sind die Winkel der x'-Ebene doppelt so groß wie die Winkel der Ebene F_1. Es muß daher der Logarithmus des Doppelverhältnisses der vier Ebenen E_1, E_2, T_1, T_2, das jetzt gleich

$$(7) \qquad (01 \infty x') = x'$$

ist, mit $-\frac{i}{2}$ multipliziert werden, damit er gleich dem euklidischen Winkel φ der beiden nichteuklidischen Geraden wird.

Dieser Winkel ist auch gleich dem euklidischen Winkel in der der Kugel konformen ζ-Ebene. In der ζ-Ebene lassen sich bekanntlich die Winkel, wie wir hier jedoch nochmals kurz zeigen werden, durch den sphärischen Exzeß von Dreiecken, also durch nichteuklidische Flächeninhalte ausdrücken. Dadurch sind wir dann in der Lage, die Winkel bei der Abbildung auf das Hyperboloid durch das Volumen von räumlichen Sektoren auszudrücken.

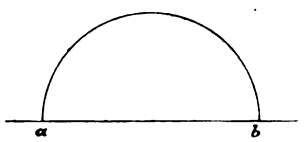


Fig. 13.

In der ζ-Ebene bilden wir den nichteuklidischen Flächeninhalt eines Halbkreises auf der reellen Achse (Figur 13). a und b seien die Punkte, in denen er die reelle Achse schneidet. Dann lautet seine Gleichung

$$(8) \qquad \left(\xi - \frac{a+b}{2}\right)^2 + \eta^2 = \left(\frac{b-a}{2}\right)^2.$$

Es ist also

$$(9) \qquad \eta = \sqrt{\left(\frac{b-a}{2}\right)^2 - \left(\xi - \frac{a+b}{2}\right)^2}.$$

Sein Inhalt ist

)) $$F = \int_a^b \int_0^\eta \frac{d\xi\, d\eta}{\eta^2}.$$

l) $$\int_0^\eta \frac{d\eta}{\eta^2} = \left[-\frac{1}{\eta}\right]_0^\eta.$$

Also ist

?) $$F = -\int_a^b \frac{d\xi}{\eta} + \lim_{\varepsilon=0} \frac{1}{\varepsilon} \int_a^b d\xi$$

$$= -\int_{\xi=a}^{\xi=b} \frac{d\left(\xi - \frac{a+b}{2}\right)}{\sqrt{\left(\frac{b-a}{2}\right)^2 - \left(\xi - \frac{a+b}{2}\right)^2}} + K(b-a)$$

$$= \left[\arcsin \frac{\xi - \frac{a+b}{2}}{\frac{b-a}{2}}\right]_b^a + K(b-a)$$

$$= -\pi + K(b-a),$$

)) $$K = \lim_{\varepsilon=0} \frac{1}{\varepsilon}$$

e über alle Grenzen wachsende Zahl ist.

In einem nichteuklidischen Dreieck mit den Winkeln 0, 0, 0 und
1 unendlich fernen Ecken a, b, c (Figur 14) wird der Inhalt

l) $$F = -\pi + K(b-a) - (-\pi + K(c-a)) - (-\pi + K(b-c)) = \pi.$$

Zwei nichteuklidische Geraden mögen
h im Punkte p'
ter dem Winkel ψ
ıneiden. Dann füh-
ı wir eine nicht-

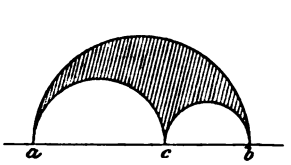


Fig. 14.

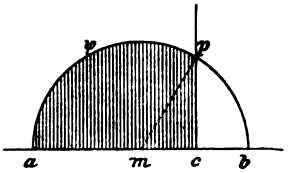


Fig. 15.

klidische Bewegung aus, die weder den Winkel noch den Flächeninhalt dert, so daß der eine Orthogonalkreis eine auf der reellen Achse senkhte Gerade wird. p' falle dabei nach p (Figur 15). Wir berechnen den hteuklidischen Flächeninhalt des in Figur 15 schraffierten Bereiches, r zwischen den beiden nichteuklidischen Geraden liegt. Dieser ist, nn a und b die Endpunkte des einen Orthogonalkreises, c und ∞ des andern sind, wenn $m = \frac{a+b}{2}$ der Mittelpunkt des ersten [illegible] und wenn $\sigma = \overline{mc}$ ist,

$$(15)\qquad F=\int_a^c\int_0^{\eta'}\frac{d\xi\,d\eta}{\eta^2}=-\int_a^c\frac{d\xi}{\eta}+\lim_{\varepsilon=0}\varepsilon\int_a^c d\xi$$

$$=\left[\arcsin\frac{\xi-\frac{a+b}{2}}{\frac{b-a}{2}}\right]_c^a+K(c-a)$$

$$=-\frac{\pi}{2}-\arcsin\frac{\sigma}{\frac{b-a}{2}}+K(c-a).$$

Nun ist, da

$$\sphericalangle\, amp=\psi,$$

$$(16)\qquad \frac{\sigma}{\frac{b-a}{2}}=\cos(\pi-\psi)=\sin\left(-\frac{\pi}{2}+\psi\right)$$

also

$$(17)\qquad \arcsin\frac{\sigma}{\frac{b-a}{2}}=-\frac{\pi}{2}+\psi$$

und

$$(18)\qquad F=-\psi+K(c-a).$$

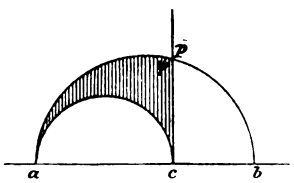


Fig. 16.

Ziehen wir den Halbkreis über ac hiervon ab, so erhält das nichteuklidische Dreieck apc mit den Winkeln 0, ψ, 0 (Figur 16) den Inhalt

$$(19)\qquad F=\pi-\psi.$$

Ein Dreieck mit den Winkeln α, β, γ (Figur 17) hat einen Inhalt, der sich folgendermaßen zusammensetzt:

$$(20)\qquad \begin{cases} \text{I}+\text{IV}=\pi-\alpha \\ \text{II}=\pi-\beta \\ \text{III}=\pi-\gamma \\ \text{II}+\text{III}+\text{IV}=2\pi \end{cases}$$

$$(21)\qquad \text{I}=\pi-\alpha-\beta-\gamma.$$

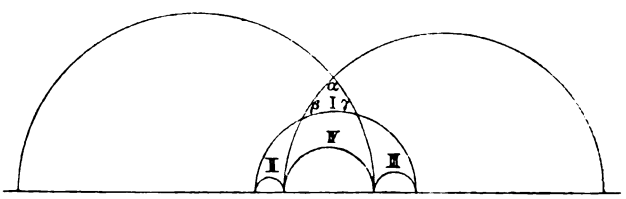


Fig. 17.

Der Inhalt eines nichteuklidischen Dreiecks ist demnach gleich dem sphärischen Exzeß.

Aus der Formel (19) ergibt sich nun durch Abbildung auf das zweischalige Hyperboloid, daß der nichteuklidische Winkel, der ursprünglich durch $-\frac{i}{2}$ mal dem Logarithmus des Doppelverhältnisses definiert war, gleich π weniger dem räumlichen Sektor ist, der von den beiden Ebenen, die die nichteuklidischen Schenkel ausschneiden, und von der Ebene durch die Asymptoten der beiden Schenkel ausgeschnitten wird (Figur 18).

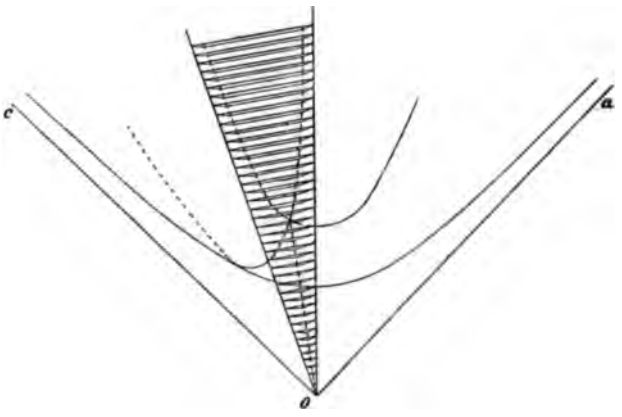


Fig. 18.

§ 11. Geometrische Deutung imaginärer Elemente.

Statt der reellen Koordinaten x, y, z schreiben wir X, Y, Z und gestatten diesen Werten auch komplexe Werte anzunehmen, so daß

$$\begin{aligned} X &= x + i\xi \\ Y &= y + i\eta \\ Z &= z + i\zeta \end{aligned} \tag{1}$$

wird. Wir haben dann eine ∞^6-fache Punktmannigfaltigkeit, die wir uns in einem R_6 mit den Koordinaten $x, y, z, \xi, \eta, \zeta$ deuten können. Dieser R_6 unterscheidet sich von einem gewöhnlichen linearen R_6 der mehrdimensionalen Geometrie insofern wesentlich, als er einen anderen Zusammenhang im Unendlichen besitzt. Während nämlich der gewöhnliche lineare R_6 im Unendlichen von einem R_5 begrenzt wird, wird unser R_6 nur von einem R_4 begrenzt. Es wird dies durch folgende Tatsache bedingt. Eine Fläche im Raume der xyz wird durch eine Gleichung

$$F(XYZ) = 0 \tag{2}$$

definiert. Durchlaufen X, Y, Z komplexe Werte, so können wir F in reellen und imaginären Teil spalten. Es wird

$$F = f + if = 0, \tag{3}$$

folglich

$$\begin{cases} f(x, y, z, \xi, \eta, \zeta) = 0 \\ f(x, y, z, \xi, \eta, \zeta) = 0. \end{cases}$$

Die Gleichungen (4) legen eine vierdimensionale Mannigfaltigkeit im R_6 fest.

Eine Ebene im Raume der XYZ,

$$AX + BY + CZ + D = 0 \tag{5}$$

zerfällt bei reellen A, B, C, D in

$$\begin{cases} Ax + By + Cz + D = 0 \\ A\mathfrak{x} + B\mathfrak{y} + C\mathfrak{z} \quad = 0. \end{cases} \tag{6}$$

Das ist ein R_4 in unserem R_6. Da für die unendlichferne Ebene des XYZ-Raumes dasselbe gelten muß wie für eine endliche, so muß auch der unendlichfernen Ebene des XYZ-Raumes ein vierdimensionaler unendlichferner Raum des R_6 entsprechen. Da sich zwei Ebenen des XYZ-Raumes in einer Geraden schneiden und zwei R_4 in einem R_6 sich in einem R_2 (einer Ebene) schneiden, so entspricht einer Geraden des XYZ-Raumes ein R_2 (eine Ebene) des R_6. Das gleiche gilt für eine unendlichferne Gerade des XYZ-Raumes. Daher besitzt ein R_4, der einer Ebene des XYZ-Raumes entspricht, im Unendlichen nur einen R_2 (eine Ebene). Als Beispiel einer Geraden diene die Z-Achse, bei der für

$$\begin{cases} x = 0, \quad y = 0, \quad \mathfrak{x} = 0, \quad \mathfrak{y} = 0 \\ Z = z + i\mathfrak{z} \quad \text{ist}, \end{cases} \tag{7}$$

also z und $\mathfrak{z}$ alle möglichen Werte durchlaufen. Eine derartige Ebene besitzt, wie aus der Funktionentheorie bekannt, nur einen unendlich fernen Punkt. Wir nennen daher eine derartige Ebene eine funktionentheoretische Ebene. Im Gegensatz dazu steht z. B. die reelle xy-Ebene

$$z = 0, \quad \mathfrak{z} = 0, \quad \mathfrak{y} = 0, \quad \mathfrak{x} = 0, \tag{8}$$

die eine unendlich ferne Gerade besitzt, und die wir eine projektive Ebene nennen wollen.

Um nun die Gebilde des R_6 zu studieren, wird es sich als vorteilhaft erweisen, die 6 Koordinaten $x, y, z, \mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}$ zu je dreien zusammenzufassen und die Schnitte der Gebilde mit diesen dreidimensionalen Räumen ins Auge zu fassen.

Die Gleichung der Kugel

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = 1 \tag{9}$$

zerspaltet sich in

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - \mathfrak{x}^2 - \mathfrak{y}^2 - \mathfrak{z}^2 = 1 \\ x\mathfrak{x} + y\mathfrak{y} + z\mathfrak{z} = 0. \end{cases} \tag{10}$$

Die zweite Gleichung verschwindet für folgende Koordinatenkombinationen zu je dreien

$$\begin{array}{ccc} \text{I} & \text{II} & \text{III} \end{array}$$

$$(11)\quad \left\{\begin{array}{|cc|ccc|ccc|} \xi=0 & x=0 & x=0 & \xi=0 & \xi=0 & x=0 & x=0 & \xi=0 \\ \eta=0 & y=0 & \eta=0 & y=0 & \eta=0 & y=0 & \eta=0 & y=0 \\ \zeta=0 & z=0 & \zeta=0 & \zeta=0 & z=0 & \zeta=0 & z=0 & z=0 \end{array}\right.$$

Es sind dies

I der xyz-Raum und der $\xi\eta\zeta$-Raum,

II der ξyz-Raum, der $x\eta z$-Raum, der $xy\zeta$-Raum,

und III der $\xi\eta z$-Raum, der $\xi y\zeta$-Raum, der $x\eta\zeta$-Raum.

Dann liegt im xyz-Raum die reelle Kugel

$$(12)\qquad x^2 + y^2 + z^2 = 1.$$

Im $\xi\eta\zeta$-Raum liegen keine Punkte. In den Räumen der Gruppe II liegen einschalige Hyperboloide, z. B. im $xy\zeta$-Raum das einschalige Hyperboloid

$$(13)\qquad x^2 + y^2 - \zeta^2 = 1.$$

In den Räumen der Gruppe III liegen zweischalige Hyperboloide, z. B. im Raume $\xi\eta z$ das zweischalige Hyperboloid

$$(14)\qquad -\xi^2 - \eta^2 + z^2 = 1.$$

Die Gleichung des zweischaligen Hyperboloids

$$(15)\qquad -X^2 - Y^2 + Z^2 = 1$$

zerfällt in

$$(16)\qquad \left\{\begin{array}{c} -x^2 + \xi^2 - y^2 + \eta^2 + z^2 - \zeta^2 = 1 \\ -x\xi - y\eta + z\zeta = 0. \end{array}\right.$$

Die zweite Gleichung verschwindet gleichfalls für die acht Koordinatenkombinationen (11). Aus der zweiten Gleichung erkennt man, daß das zweischalige Hyperboloid (15) aus dem xyz-Raum, dem $x\eta\zeta$-Raum und dem $\xi y\zeta$-Raum ein zweischaliges Hyperboloid ausschneidet, während es aus dem $\xi\eta\zeta$-Raum, dem ξyz-Raum und dem $x\eta z$-Raum ein einschaliges Hyperboloid, aus dem $\xi\eta z$-Raum eine Kugel ausschneidet und mit dem $xy\zeta$-Raum keine Punkte gemein hat.

§ 12. Abbildung der idealen Punkte.

Bei der Abbildung der hyperbolischen Geometrie auf die Kugel

$$(1)\qquad X^2 + Y^2 + Z^2 = 1$$

entspricht einem Punkte $x_0 y_0$ der XY-Ebene ein Punkt der Kugel, der von der Geraden

$$(2) \qquad \begin{cases} X = x_0 \\ Y = y_0 \end{cases}$$

ausgeschnitten wird. Liegt $x_0 y_0$ innerhalb des Einheitskreises der xy-Ebene (ist er also ein realer Punkt), so schneidet die Gerade (2) die Kugel (1) im reellen Punkt P, dessen

$$(3) \qquad Z = \sqrt{1 - x_0^2 - y_0^2} = z$$

ist. Liegt der Punkt $x_0 y_0$ jedoch außerhalb des Einheitskreises, ist also ein idealer Punkt der xy-Ebene, so wird Z in (3) rein imaginär, also

$$(3a) \qquad Z = \sqrt{1 - x_0^2 - y_0^2} = i\mathfrak{z}.$$

Nach der Zerspaltung in reellen und imaginären Teil erkennt man, daß der Schnittpunkt P von (1) und (2) im $xy\mathfrak{z}$-Raum liegt, also auf dem einschaligen Hyperboloid

$$(4) \qquad x^2 + y^2 - \mathfrak{z}^2 = 1$$

(Fig. 19). Die nichteuklidischen Geraden werden aus der Kugel durch die Ebenen

$$(5) \qquad aX + bY + c = 0$$

ausgeschnitten, wobei Z beliebig blieb.

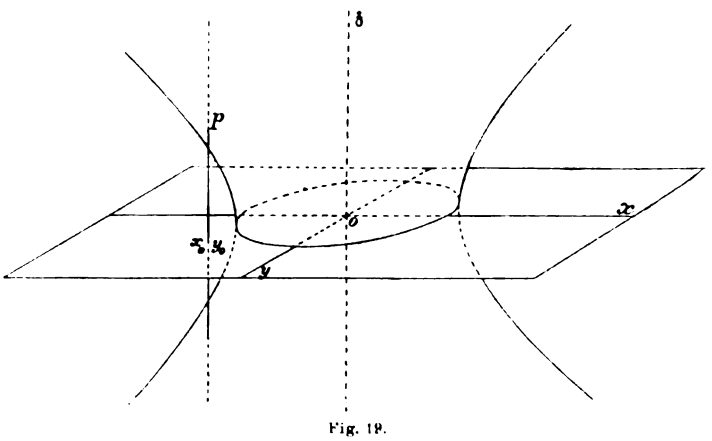


Fig. 19.

Diese Gleichung zerfällt in

$$(6) \qquad \begin{aligned} ax + by + c &= 0 \\ a\mathfrak{x} + b\mathfrak{y} &= 0. \end{aligned}$$

Für den xyz-Raum und den $xy\mathfrak{z}$-Raum schneidet die der ersten Gleichung von (6) entsprechende Gerade die Kugel des xyz-Raumes in einem Orthogonalkreis auf dem Äquator und das einschalige

Hyperboloid des $xy\delta$-Raumes in einer Hyperbel, die auf dem Äquator senkrecht steht (Fig. 20)[1]).

Wird die Kugel des xyz-Raumes von der Geraden (6) garnicht getroffen, so liegt die Hyperbel auf dem Hyperboloid so, daß der Äquator garnicht von ihr geschnitten wird (Figur 21). Die Bilder der idealen Punkte liegen also auf dem einschaligen Hyperboloid des $xy\delta$-Raumes.

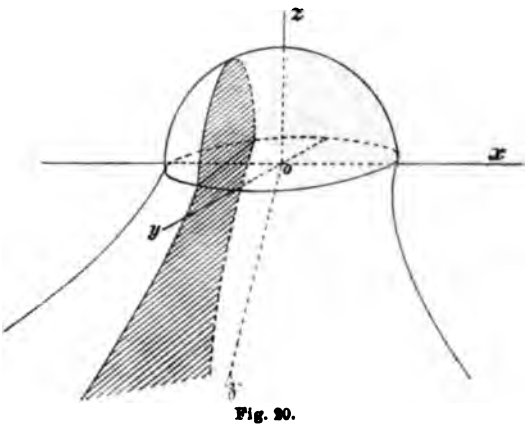


Fig. 20.

Ebenso anschaulich wird der Satz, daß zwei nichteuklidische Gerade entweder einen realen (Figur 22) oder einen unendlichfernen (Figur 23) oder einen idealen Schnittpunkt P (Figur 24) gemein haben. Die Bilder der Tangenten von einem idealen Punkte an den absoluten Kegelschnitt

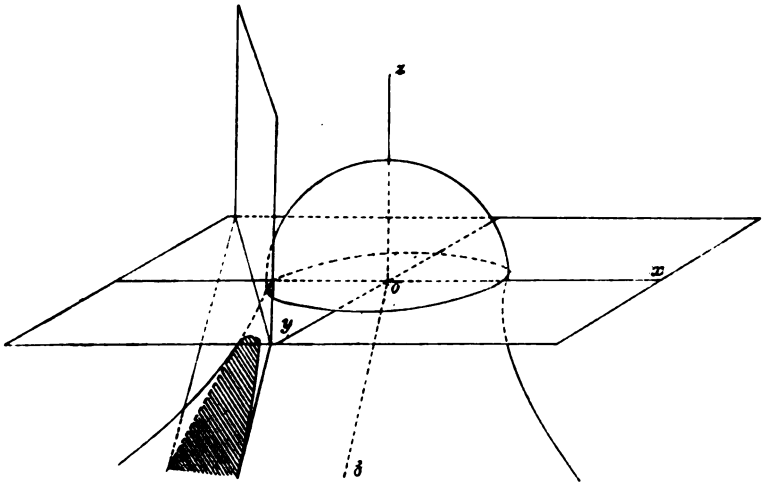


Fig. 21.

sind die beiden Erzeugenden des Hyperboloids durch das Bild des idealen Punktes. Figur 25 veranschaulicht den idealen Schnittpunkt P zweier idealer Geraden.

1) Die Figuren 20 bis 25 sind vierdimensionale Figuren. x, y, z, δ sind die vier aufeinander senkrechten Koordinatenachsen. Alles, was oberhalb der xy-Ebene gezeichnet ist, liegt in Wirklichkeit im xyz-Raum. Alles, was unterhalb der xy-Ebene gezeichnet ist, liegt in Wirklichkeit im $xy\delta$-Raum.

Für die Abbildung der nichteuklidischen Geometrie auf das zweischalige Hyperboloid

(7) $$-X^2 - Y^2 + Z^2 = 1$$

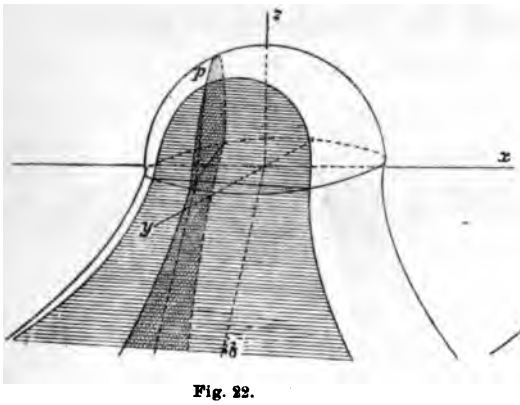


Fig. 22.

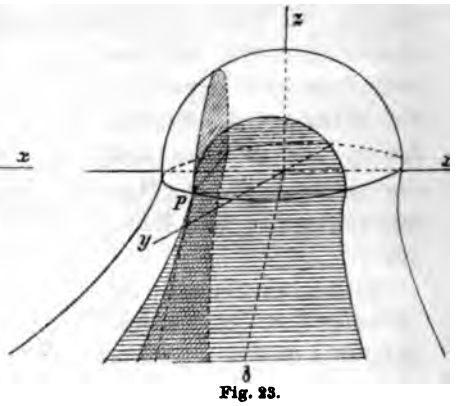


Fig. 23.

gilt genau das Entsprechende, was aus der Abbildung auf die Kugel (1) folgt, wenn man die XY-Ebene ins Unendliche wirft und den unendlichfernen Punkt der Z-Achse in den Nullpunkt rücken läßt.

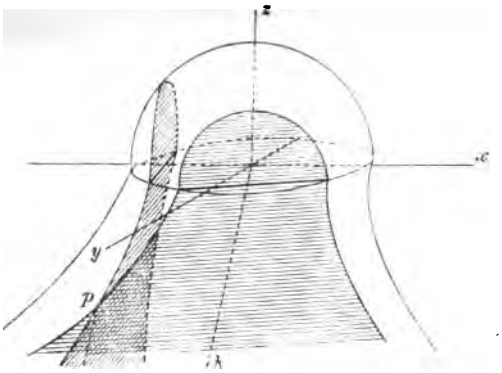


Fig. 24.

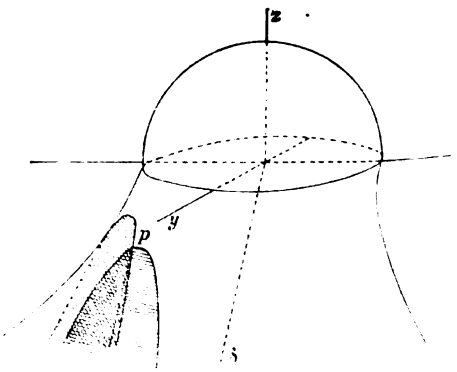


Fig. 25.

Eine Ebene durch den Nullpunkt

(8) $$aX + bY + cZ = 0$$

schneidet eine nichteuklidische Gerade aus (7) aus. Die Gleichung (8) läßt sich zerspalten in

(9) $$\begin{cases} ax + by + cz = 0 \\ a\xi + b\eta + c\zeta = 0. \end{cases}$$

Die erste Gleichung schneidet aus dem zweischaligen Hyperboloid des $\xi\eta\zeta$-Raumes eine Hyperbel aus (Figur 26)[1]).

1) Die Figuren 26 bis 30 sind sechsdimensionale Figuren. x, y, z, ξ, η, ζ sind die sechs aufeinander senkrechten Koordinatenachsen. Alles, was oberhalb der xy Ebene gezeichnet ist, liegt in Wirklichkeit im xyz-Raume. Alles, was

Eine zweite Ebene durch den Nullpunkt kann zu der ersten eine solche Lage haben, daß ihre gemeinsame Schnittgerade im Innern des Asymptotenkegels, auf ihm oder außerhalb liegt, je nachdem sie einem realen, einem unendlichfernen oder einem idealen Punkte entspricht. Liegt sie innerhalb, so schneiden sich die beiden Hyperbeln, die die Ebenen ausschneiden, auf dem zweischaligen Hyperboloid, die auf dem einschaligen schneiden sich nicht (Figur 27). Liegt sie auf dem Asymptotenkegel, so treffen sich sowohl die Hyperbeln des zweischaligen wie die des einschaligen Hyperboloids im Unendlichen (Figur 28). Liegt sie außerhalb des Asymptotenkegels, so schneiden sich die Hyperbeln des einschaligen Hyperboloids, aber nicht die des zweischaligen (Figur 29). Daraus folgt, daß die Bilder der idealen Punkte auf dem einschaligen Hyperboloid des $\xi\eta\zeta$-Raumes liegen. Schneiden beide Ebenen den Asymptotenkegel überhaupt nicht, so schneiden sie auch das zweischalige Hyperboloid des xyz-Raumes nicht.

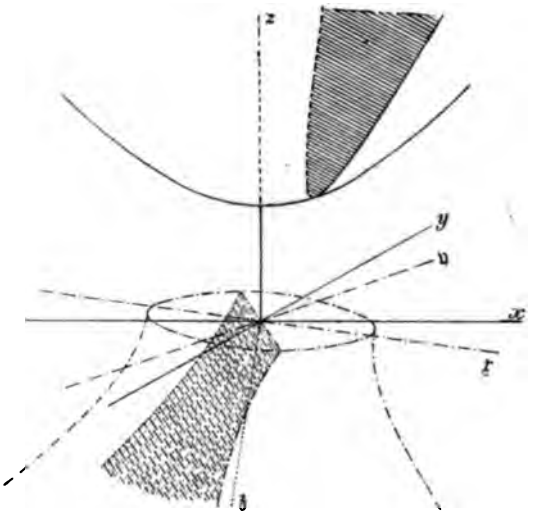


Fig. 26.

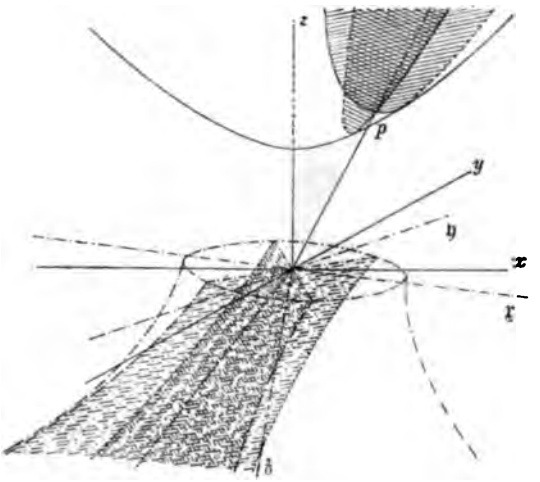


Fig. 27.

unterhalb der $\xi\eta$-Ebene gezeichnet ist, liegt in Wirklichkeit im $\xi\eta\zeta$-Raume. Um diese beiden Räume auseinander zu halten, sind im xyz-Raume alle sichtbaren Linien ausgezogen ——, im $\xi\eta\zeta$-Raume durchbrochen — · — · —. Alle unsichtbaren Linien sind im xyz-Raume gestrichelt — — — —, im $\xi\eta\zeta$-Raume punktiert ..... Die Ebenen des xyz-Raumes sind schraffiert ≡≡≡, die Ebenen des $\xi\eta\zeta$-Raumes sind durchbrochen schraffiert ≡≡≡.

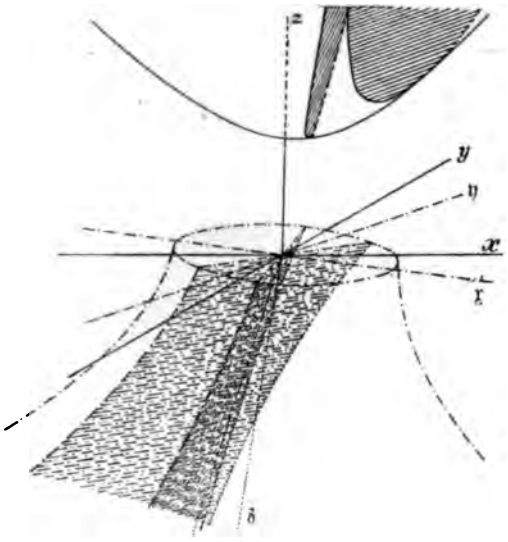


Fig. 28.

Aus dem einschaligen Hyperboloid des $\xi\eta\zeta$-Raumes schneiden sie zwei Ellipsen aus, die sich auf dem einschaligen Hyperboloid schneiden (Fig. 30). Die unendlichferne Ebene des xyz-Raumes fällt mit der unendlichfernen Ebene des $\xi\eta\zeta$-Raumes zusammen, da jeder Geraden im Komplexen ∞^1 Punkte entsprechen, aber nur ein einziger unendlichferner Punkt (sogenannte funktionentheoretische Ebene). Auch die Geraden des Asymptotenkegels haben nur einen einzigen unendlichfernen Punkt. Infolgedessen fallen die unendlichfernen Punkte des zweischaligen und des einschaligen Hyperboloids zusammen. Beide Flächen hängen dort

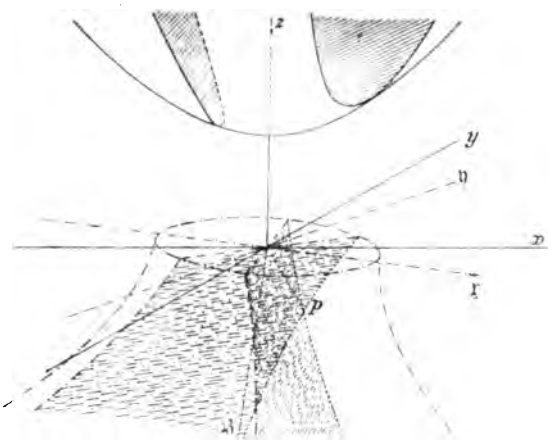


Fig. 29.

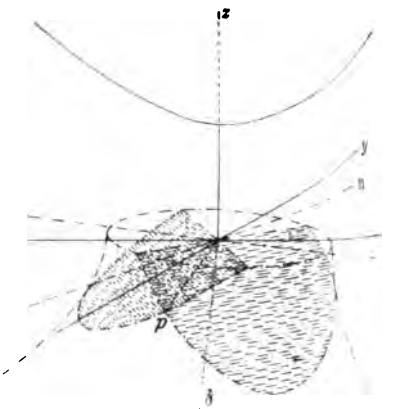


Fig. 30.

ebenso zusammen wie die Kugel und das einschalige Hyperboloid bei der Abbildung der hyperbolischen Geometrie auf die Kugel längs des Äquators der Kugel.

Bemerkung zur Bestimmung der nächsten ganzen Zahl im Gebiete der komplexen Zahlen $a + b\varrho$.

Von Gertrud Meißner.

Mit 2 Figuren.

Für die komplexen Zahlen, die durch Adjunktion einer primitiven dritten Einheitswurzel ϱ zum Bereiche der reellen Zahlen entstehen, sind von Gauß nach hinterlassenen zerstreuten Notizen (zur Theorie der komplexen Zahlen, ges. Werke, Bd. II) verschiedene Wege angegeben, um zu einer gegebenen Zahl $m = a + b\varrho$ die nächste unter den sogenannten ganzen Zahlen $G = G_1 + G_2\varrho$ mit ganzzahligen Koeffizienten G_1 und G_2 zu bestimmen. Bei dieser Untersuchung gibt Gauß der Zahl m die Form $u + v\varrho + w\varrho^2$, in welcher wegen der Beziehung $1 + \varrho + \varrho^2 = 0$ bei gegebenem Werte von m nicht die Koeffizienten selbst, sondern nur ihre Differenzen bestimmt sind und daher die Koeffizienten auf unendlich viele Arten gewählt werden können.

Das Gaußische Verfahren läßt sich aber auch auf Zahlen von der einfacheren Form $a + b\varrho$ anwenden und gestattet dann zugleich folgende einheitliche Fassung der Regel zur Bestimmung der nächsten ganzen Zahl:

Ist $a + b\varrho = ([a] + a_0) + ([b] + b_0)\varrho$ die gegebene Zahl, so bestimme man die 3 Intervalle, in welche die Einheitsstrecke durch die den positiven echten Brüchen a_0 und b_0 entsprechenden Punkte geteilt wird, und ersetze a_0, und ebenso b_0, durch 0 oder durch 1, je nachdem der zugehörige Punkt dem größten der 3 Intervalle vorangeht oder nachfolgt. So tritt an die Stelle von $a + b\varrho$ die nächste ganze Zahl.

Der Beweis hierfür läßt sich geometrisch sowohl als auch algebraisch in elementarer Weise führen.

1. Geometrischer Beweis: Bei der Darstellung der Zahlen $a + b\varrho$ durch die Punkte einer Ebene liegt die ϱ-Achse gegen die Achse des Reellen um den Winkel $\frac{2\pi}{3}$ geneigt und die durch die ganzen Zahlen bestimmten Parallelen zu den Achsen bilden ein Gitter von Rhomben, welche durch ihre kürzere Diagonale in gleichseitige Dreiecke zerlegt werden. Für einen gegebenen Punkt der Zahlenebene kommen daher als nächstgelegene ganze Zahl von vornherein nur drei unter den Ecken des den Punkt umschließenden Rhombus in Betracht.

In Figur 1 sei — den üblichen Drehungssinn in der Zahlenebene vorausgesetzt — $E_1E_2E_3E_4$ der Rhombus, in welchem die ge-

gebene Zahl $a + b\varrho = g + a_0 + b_0\varrho$ liegt, so daß den Rhombusecken die komplexen ganzen Zahlen g, $g+1$, $g+1+\varrho$, $g+\varrho$ entsprechen und a_0 und b_0 kleiner sind als die Rhombusseite. Durch die Mittellote F_1U, F_2U, F_3V, F_4V und die Verbindungslinie UV ihrer Schnittpunkte wird der Rhombus derart in vier Gebiete I, II, III, IV geteilt, daß die sämtlichen Punkte eines Gebietes der gleichen Ecke am nächsten liegen. Die Gebiete I und III können noch, entsprechend den beiden Fällen $a_0 > b_0$ und $a_0 < b_0$ (welche sich durch Spiegelung an der Diagonale E_1E_3, also durch Vertauschung von a_0 und b_0 aufeinander zurückführen lassen), in die Teile I_1 bzw. III_1 ($a_0 > b_0$) und I_2 bzw. III_2 ($a_0 < b_0$) zerspalten werden.

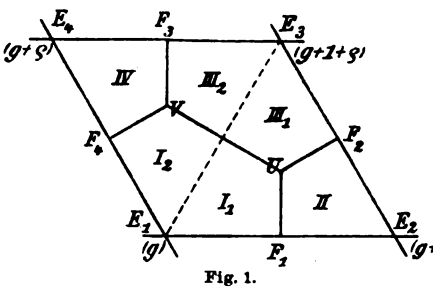


Fig. 1.

Denkt man nun durch einen irgendwo in dem Rhombus liegenden Punkt $g + a_0 + b_0\varrho$ die Parallelen zu den Rhombusseiten hindurchgelegt und beachtet die Größe der durch die Diagonale E_1E_3 hervorgerufenen Parallelenabschnitte, so erkennt man, daß, falls der Punkt auf einem der vier Mittellote F_1U, F_2U, F_3V, F_4V oder auf dem Diagonalenstück UV liegt, der Reihe nach die Beziehungen bestehen: $a_0 - b_0 = 1 - a_0$; $b_0 = a_0 - b_0$; $b_0 - a_0 = a_0$; $1 - b_0 = b_0 - a_0$; $a_0 = 1 - b_0$. Die Bedingungen dafür, daß der gegebene Punkt innerhalb des einen oder anderen der durch diese Linien begrenzten Gebiete liegt, sind demnach, wenn man die Fälle $a_0 > b_0$ und $a_0 < b_0$ trennt, die folgenden:

Gebiet I_1	$1 - a_0 > b_0$	Gebiet I_2	$1 - b_0 > a_0$
$(g + 0 + 0\varrho)$	$1 - a_0 > a_0 - b_0$	$(g + 0 + 0\varrho)$	$1 - b_0 > b_0 - a_0$
Gebiet II	$a_0 - b_0 > 1 - a_0$	Gebiet IV	$b_0 - a_0 > 1 - b_0$
$(g + 1 + 0\varrho)$	$a_0 - b_0 > b_0$	$(g + 0 + 1\varrho)$	$b_0 - a_0 > a_0$
Gebiet III_1	$b_0 > a_0 - b_0$	Gebiet III_2	$a_0 > b_0 - a_0$
$(g + 1 + 1\varrho)$	$b_0 > 1 - a_0$	$(g + 1 + 1\varrho)$	$a_0 > 1 - b_0$.

Dabei ist zum Namen jedes Gebietes die ihm angehörige ganze Zahl hinzugefügt.

Hiernach ist das Gebiet, in dem die Zahl $a + b\varrho$ liegt, also auch der Wert der ihr nächstgelegenen ganzen Zahl, davon abhängig, welches der Intervalle zwischen den Zahlen 0, b_0, a_0, 1 ($a_0 > b_0$) bzw. 0, a_0, b_0, 1 ($a_0 < b_0$) am größten ist, und zwar ist a_0, und ebenso b_0, durch 0

oder durch 1 zu ersetzen, je nachdem auf der Einheitsstrecke der ihm entsprechende Punkt dem größten der drei Intervalle vorangeht oder nachfolgt, — in Übereinstimmung mit der oben angegebenen Regel.

Die Fälle, in denen die gegebene Zahl auf der Grenze zweier Gebiete liegt, stellen sich dabei als Spezialfälle zweierlei Art dar: Ist $a + b\varrho$ Randpunkt eines der gleichseitigen Diagonaldreiecke, so kommen, wie im Gebiete des Reellen, nur zwei Punkte als nächste ganze Zahl in Betracht; dies drückt sich bei Anwendung der angegebenen Regel dadurch aus, daß eins der drei Intervalle verschwindet. Liegt aber der gegebene Punkt auf einem der Mittellote oder im Schnittpunkt dreier Mittellote, so sind ihm zwei bzw. drei Ecken gleich nahe gelegen, und diese Unbestimmtheit zeigt sich bei Benutzung der Regel darin, daß statt eines größten Intervalls zwei bzw. drei gleich große auftreten. In der ganzen Zahlenebene setzen sich, wie Figur 2 veranschaulicht, die sämtlichen Unbestimmtheitspunkte zu einem Netz von regelmäßigen Sechsecken zusammen. Der Mittelpunkt eines jeden Sechsecks ist für alle in dessen Innerem gelegenen Punkte die nächste ganze Zahl.

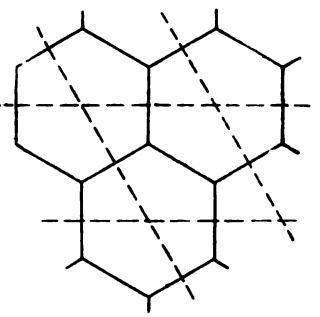


Fig. 2.

2. Algebraischer Beweis: Die der Zahl m nächste ganze Zahl ist dadurch gekennzeichnet, daß der absolute Betrag ihrer Differenz gegen m unter den absoluten Beträgen der Differenz von m gegen irgendwelche ganzen Zahlen der kleinste ist. Nun stellt sich der absolute Betrag bekanntlich, wie bei den Zahlen $a + bi$, so auch im Gebiete der Zahlen $a + b\varrho$ dar als die Quadratwurzel aus dem Produkt der Zahl mit der zu ihr konjugiert komplexen, so daß das Quadrat des absoluten Betrages, die Norm, den Wert erhält:

$$N(a + b\varrho) = (a + b\varrho)(a + b\varrho^2) = a^2 - ab + b^2.$$

Ist $m = a + b\varrho = g + a_0 + b_0\varrho$ die gegebene Zahl, $G = G_1 + G_2\varrho$ irgendeine ganze Zahl und P der kleinere, Q der größere unter den absoluten Beträgen von $G_1 - a$ und $G_2 - b$, so ist

$$N(G - m) = P^2 \mp PQ + Q^2 = P^2 + Q(Q \mp P).$$

Da dieser Ausdruck für $Q > 1$ verkleinert wird, wenn man Q durch $Q - 1$ ersetzt, so kommen als nächste ganze Zahlen allein die vier Größen g, $g + 1$, $g + 1 + \varrho$, $g + \varrho$ in Betracht, bei welchen P und Q kleiner als 1 sind. Ihre Differenzen gegen m haben der Reihe nach die Norm:

$$N(d_1) = a_0^2 - a_0 b_0 + b_0^2$$
$$N(d_2) = (1 - a_0)^2 + (1 - a_0) b_0 + b_0^2$$
$$N(d_3) = (1 - a_0)^2 - (1 - a_0)(1 - b_0) + (1 - b_0)^2$$
$$N(d_4) = a_0^2 + a_0(1 - b_0) + (1 - b_0)^2.$$

Bezeichnet man nun die kleinere der Zahlen a_0 und b_0 mit p, die größere mit q und setzt die Intervalle p, $q - p$ und $1 - q$ bzw. gleich s_1, s_2, s_3, wobei $s_1 + s_2 + s_3 = 1$ wird, so ergeben sich für die Normen die vier verschiedenen Werte:

$$W' = p^2 - pq + q^2 = s_1^2 + s_1 s_2 + s_2^2$$
$$W'' = p^2 + p(1 - q) + (1 - q)^2 = s_1^2 + s_1 s_3 + s_3^2$$
$$W''' = (1 - p)^2 - (1 - p)(1 - q) + (1 - q)^2 = s_2^2 + s_2 s_3 + s_3^2$$
$$W^{(IV)} = q^2 + q(1 - p) + (1 - p)^2 > W''.$$

Von den aus nur positiven Größen in konformer Weise zusammengesetzten Ausdrücken W', W'', W''' ist der am kleinsten, in dem die einzelnen Summanden möglichst klein sind, der also das größte der Intervalle s_1, s_2, s_3 nicht enthält. Dieser kleinste Wert führt auf die nächste ganze Zahl. Man sieht somit, daß p, und ebenso q, durch 0 oder durch 1 zu ersetzen ist, je nachdem der ihm auf der Einheitsstrecke entsprechende Punkt dem größten der drei Intervalle p, $q - p$ und $1 - q$ vorangeht oder nachfolgt, was wieder mit der angegebenen Regel identisch ist.

Die Spezialfälle erledigen sich analog wie bei der geometrischen Untersuchung.

Die Norm der Differenz von m gegen die nächste ganze Zahl läßt sich nach Obigem stets darstellen in der Form:

$$N(d) = t_1^2 + t_1 t_2 + t_2^2, \; t_1 < t_2 < t_3, \; t_1 + t_2 + t_3 = 1.$$

Ist $t_2 < \frac{1}{3}$, so ergibt sich ohne weiteres $N(d) < \frac{1}{3}$. Ist aber $t_2 > \frac{1}{3}$, so kann man $t_2 = \frac{1}{3} + \varepsilon$, $0 < \varepsilon < \frac{1}{3}$, $t_1 < \frac{1}{3} - 2\varepsilon$ setzen und findet:

$$N(d) < \tfrac{1}{3} - \varepsilon + 3\varepsilon \cdot \varepsilon < \tfrac{1}{3} - \varepsilon + \varepsilon, \quad \text{mithin}$$
$$N(d) < \tfrac{1}{3},$$

womit die bekannte und bei geometrischer Darstellung selbstverständliche Tatsache dargetan ist, daß der absolute Betrag des kleinsten Restes im Gebiete der Zahlen $a + b\varrho$ nicht größer sein kann als $\frac{1}{3}\sqrt{3}$.

Zur Fassung des Induktionsgesetzes.

Von H. Teege in Wilhelmshaven.

Mit 2 Figuren.

ie folgenden Bemerkungen, deren wichtigster Teil sich auf die ıg des Induktionsgesetzes bezieht, machen nicht den Anspruch, e einen wesentlichen Beitrag zu der Kenntnis der elektrischen ionserscheinungen liefern wollen, sondern sie sollen nur eine ausfüllen, die meines Wissens bisher übersehen worden ist. ndelt sich daher nicht um tiefe, grundlegende Fragen, zu Entscheidung schwierige Experimente nötig sind, die wieder rige Diskussionen erfordern, sondern es genügen, soweit noch Experimente Fragen an die Natur gestellt werden müssen, aller- ıste Versuche, die jeden Tag mit den gewöhnlichen Mitteln ange- werden können.

ie experimentelle Entscheidung kann auch mit voller Sicherheit en werden. Andere das elektrische Induktionsgesetz betreffende, iel tiefer liegende Fragen haben zu großen Meinungsverschieden- geführt; so hat sich z. B. über die Frage, ob das magnetische ines rotierenden Magneten stillsteht oder sich mit dem Mag- bewegt, ein großer Streit erhoben, und auch diese Mitteilungen im Jahrgang 1903 eine ausführliche Untersuchung von Edm. e gebracht, die sich mit dem experimentellen Beweise des Mit- ns der Kraftlinien mit dem sich drehenden Magneten befaßt. rartigen Schwierigkeiten werden wir es im folgenden nicht zu ıben, sondern die von uns zu erörternde Frage kann in voller heit dahin gelöst werden, daß es Fälle gibt, in denen alle Be- ıgen nach der gebräuchlichen Fassung des Induktionsgesetzes sind und doch keine elektromotorische Kraft induziert wird.

s ist also die gewöhnliche Fassung des Induktionsgesetzes zu ein und muß dahin geändert werden, daß die betreffenden Fälle rnherein ausgeschlossen sind.

Vegen der großen Autorität ihres Urhebers legen wir die Fassung ıde, die Maxwell dem Gesetze gegeben hat. Sie findet sich im n Bande seines berühmten Treatise on Electricity and Magnetism tikel 541 und lautet nach der Übersetzung von B. Weinstein:

e in der ganzen Ausdehnung eines Leiters zu einer bestimmten t wirkende elektromotorische Kraft wird durch das Verhältnis, lem die von ihm umfaßten magnetischen Kraftlinien in der Zeit- ıeit an Zahl gerade abnehmen, gemessen."

Es ist danach für das Zustandekommen eines Induktionsstromes nötig, daß sich die Zahl der vom Leiter umschlossenen magnetischen Kraftlinien ändert. Eine solche Änderung kann nun dadurch eintreten,

1. **daß man entweder den ganzen Leiter oder Teile desselben durch die Kraftlinien nach andern Stellen des Feldes hindurchführt oder das Feld relativ zum Leiter oder zu Teilen desselben bewegt,**
2. **wenn der Leiter ruht, daß man die Zahl der umschlossenen Kraftlinien durch Schwächen oder Verstärken des magnetischen Feldes ändert,**
3. **daß man Windungen ausschaltet.**

Die Einordnung in diese drei Fälle wird immer möglich sein, wenn auch zugegeben werden muß, daß es Fälle geben kann, in denen noch eine doppelte Deutung statthaft ist. So kann es, wie schon vorher erwähnt, zweifelhaft sein, ob das magnetische Feld mit dem Magneten mitrotiert oder stillsteht, oder ob die mit dem Magneten mitbewegten Leiterteile der Sitz der elektromotorischen Kräfte sind oder nicht vielmehr die stillstehenden Leiterteile.

Während sich aber derartige Zweifel nur innerhalb des Bereiches der einzelnen Fälle selber erheben können, ist der dritte unter den oben aufgeführten Fällen meines Wissens überhaupt noch niemals, wenigstens nicht in der mir bekannten Literatur, bei der Anwendung des Induktionsgesetzes herangezogen worden. Ohne Zweifel aus einem sehr triftigen Grunde! Denn Ausschalten von Windungen scheint bei oberflächlicher Betrachtung nur durch Kurzschluß möglich zu sein, und Kurzschluß ist kein zeitlicher Vorgang mehr, sondern ein momentaner, so daß der Quotient: Zahl der ausgeschalteten Windungen durch Zeit, die zum Ausschalten erforderlich ist, gar keinen Sinn mehr hat. Es kann daher auch nicht auf Grund des Induktionsgesetzes erwartet werden, daß bei einer derartigen Änderung in der Zahl der Kraftlinien eine elektromotorische Kraft induziert wird.

Trotzdem gibt es einen Fall, wo das Ausschalten von Windungen kontinuierlich in der Zeit vor sich geht, so daß sich auch die Zahl der umschlossenen Kraftlinien kontinuierlich mit der Zeit ändert. Es existiert also ein Quotient gleich Änderung der umfaßten Kraftlinienzahl pro Zeiteinheit, so daß nach der obigen Formulierung des Induktionsgesetzes ein elektrischer Induktionsstrom entstehen müßte.

Die Anordnung ist folgende. Um einen pollosen Eisenring, der also von lauter parallelen Kraftlinien durchsetzt ist und nach außen keinerlei magnetische Wirkungen ausübt, ist bei *A* lose ein Messingring gelegt und an ihm ein Draht angelötet, der isoliert in mehreren Windungen um den Magnetring geführt ist. Das bei *B* den Magnet-

ring verlassende Drahtende geht über ein Galvanometer G nach einer Schleiffeder C, die auf dem Messingring A aufliegt.

Nun ist ohne weiteres klar, wie man durch Ziehen in der bei B durch einen Pfeil angedeuteten Richtung die Windungen ganz kontinuierlich von dem Magnetring herunterziehen kann, während die Schleiffeder C unausgesetzt über dem Ring A schleift, so daß die metallische Leitung keinen Augenblick unterbrochen ist. Die Zahl der umschlossenen Kraftlinien ändert sich daher stetig in der Zeit, und nach dem Ausspruche des Induktionsgesetzes müßte man, wie gesagt, in dem geschlossenen Leiterkreise einen Induktionsstrom erwarten.

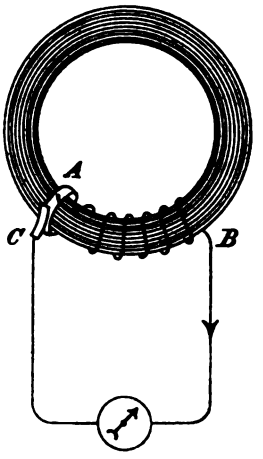


Fig. 1.

Führt man den Versuch aber wirklich aus, so zeigt das Galvanometer G nicht den geringsten Ausschlag und daher auch nicht die geringste Spur einer elektrischen Induktion.

Ohne Frage wird man dies Resultat von vornherein erwartet haben, denn der Fall 3. steht in einem zu eigenartigen Gegensatze zu den andern. Das hindert aber nicht, daß das Resultat vollständig der obigen Formulierung des Induktionsgesetzes widerspricht! Auch ist nicht zu leugnen, daß trotz des erwarteten Resultates in letzter Instanz nur das Experiment die Entscheidung gegen den Fall 3. geben konnte.

Wir stehen also vor der Notwendigkeit, die Fassung des Gesetzes derartig zu ändern, daß der obige Fall ausgeschlossen bleibt. Im Grunde ist das schon längst geschehen; namentlich bedient sich die Technik fast stets einer Ausdrucksweise, die neben großer Anschaulichkeit auch den Vorzug vollkommener Richtigkeit hat. Ich meine die aus der Faraday-Maxwellschen Anschauungsweise übernommene Vorstellung von dem „Schneiden der Kraftlinien"; mit einer kleinen Ergänzung oder Erläuterung wird diese wirklich allen tatsächlichen Verhältnissen gerecht!

Aber auch diese Ergänzung stellt im Grunde nichts Neues vor, denn schon Faraday hat in seinen bekannten Experimental Researches in Electricity gezeigt, „wie sich alle Induktionserscheinungen, die die Stärkeänderungen eines Stromes oder Magneten begleiten, erklären lassen, wenn man voraussetzt, daß ein Strom oder ein Magnet, wenn er sich verstärkt, seine Kraftlinien zurückstößt, und wenn er geschwächt wird, sie zu sich heranzieht."[1])

1) J. Cl. Maxwell, Treatise on Electricity and Magnetism, vol. II, art. 541.

Bei speziellen Anwendungen dieser Anschauungsweise wird man natürlich noch auf Schwierigkeiten stoßen können, namentlich wenn sich herausstellt, daß ein Experiment zur Klärung der Anschauungen nur schwer anzustellen ist. Wie soll man sich z. B. in unserem Falle des pollosen Magnetringes das Einwandern und Auswandern der Kraftlinien vorstellen, wenn das innere Magnetfeld verstärkt oder geschwächt wird? In sich verschwinden sollen die Kraftlinien nicht, wie etwa die Farben des Regenbogens verblassen, ohne sich von der Stelle zu bewegen, aber in welcher Raumausfüllung schießen die Kraftlinien beim Variieren des Feldes von innen nach außen und umgekehrt? Tritt (Figur 2) während einer solchen Änderung des inneren Magnetfeldes in einem begrenzten Leiterteile AB eine andere elektromotorische Kraft auf als etwa in dem gleichlangen und gleichweit vom Ringe entfernten Leiterteile BC? Ja, das Auftreten einer elektromotorischen Kraft in einem solchen Falle ist überhaupt ganz bezweifelt worden, was allerdings schwer mit der absolut feststehenden Tatsache vereinbar erscheint, daß in einem geschlossenen, den Magnetring umfassenden Leiterkreise eine elektromotorische Kraft induziert wird, denn bis jetzt sind Ausnahmen von der Regel, daß die elektrische Induktion des ganzen gleich der Summe der elektrischen Induktionen der Teile ist, nicht bekannt.

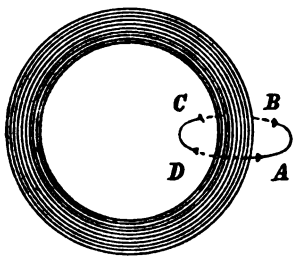


Fig. 2.

Will man aber das Experiment zur Entscheidung heranziehen, so stößt man auf ganz gewaltige Schwierigkeiten. Denn weder die galvanometrische noch die elektrometrische Messung scheint fein genug zu sein, um überhaupt eine Wirkung zu zeigen. Schaltet man z. B. in AB ein Galvanometer ein, so sind zwar während einer gleichförmigen Änderung des magnetischen Feldes im Ringe die Enden von AB dauernd mit entgegengesetzten Elektrizitätsmengen statisch geladen, aber um diese Ladungen zustande zu bringen, ist bei den geringen in Frage kommenden elektromotorischen Kräften nur die Trennung von fast verschwindenden Elektrizitätsmengen erforderlich. Die Erscheinungen werden also folgende sein: zu Beginn der Änderung des magnetischen Feldes im Ringe passiert ein Stromstoß das Galvanometer, der aber viel zu schwach ist, um das Galvanometer überhaupt nur merkbar zu beeinflussen, während der gleichförmigen Änderung der Kraftlinienzahl im Ringe ist das Galvanometer stromlos, zum Schluß der Änderung passiert wieder ein Stromstoß das Galvanometer, der entgegengesetzt gerichtet ist wie der Strom zu Anfang und, da er die vorher getrennten

Elektrizitätsmengen wieder zur Vereinigung bringt, ebenso groß und ebenso wenig meßbar ist wie dieser. Aber auch die elektrometrische Messung der während der Änderung des magnetischen Feldes anhaltenden Ladungen an den Enden von AB erscheint praktisch unmöglich! Es ist schwer abzusehen, wie man dieser Änderung längere Dauer verleihen will; variiert aber die Kraftlinienzahl impulsartig, so ist auch die statische Einwirkung der nur für eine kurze Zeit getrennten Elektrizitätsmengen wie ein momentaner Stoß, der schwer im Elektrometer nachweisbar sein wird.

So scheint also, wenn nicht noch eine ungemeine Verfeinerung unserer Meßinstrumente erfolgt, die praktische experimentelle Erforschung der vorliegenden Tatsachen ausgeschlossen! Aber der Wert der Faraday-Maxwellschen Anschauungsweise wird davon in keiner Weise berührt. Im Grunde will diese nur anschauliche Bilder für die Erscheinungen schaffen, und wie der Maler imstande ist, die ewig neu sich gestaltende Umgebungswelt in seinen Gemälden darzustellen, so wird auch sie es verstehen, in ihren Bildern immer genauer die Tatsachenwelt wiederzugeben.

Fassen wir zum Schluß kurz zusammen! Die Faraday-Maxwellsche Anschauung, daß Kraftlinien kontinuierliche Existenz haben und nicht plötzlich in Gebieten entstehen können, wo vorher keine waren, erscheint durchaus geeignet, alle Fälle der elektrischen Induktion zu erklären; es muß aber auch ein wirkliches Schneiden von Kraftlinien stattfinden. Der oben von uns angeführte Fall 3. ist dann von vornherein ausgeschlossen, da hier keine Kraftlinien aus dem Ringe aus- oder eintreten, also von der Strombahn trotz deren Flächenänderung auch keine Kraftlinien geschnitten werden können. Man drückt sich aber ungenau aus, wenn man nur von der Zahl der umschlossenen Kraftlinien spricht und ein Variieren derselben in der Zeit nur in den folgenden Fällen für möglich hält, daß entweder der Leiter durch die Kraftlinien nach andern Stellen des Feldes hindurchgeführt wird oder das umschlossene magnetische Feld in seiner Intensität geändert wird: in beiden Fällen wird in dem Leiter ein Strom induziert. Es wird dann aber ein möglicher dritter Fall ausgelassen, in dem trotz der in der Zeit vor sich gehenden Änderung in der Zahl der umschlossenen Kraftlinien keine elektromotorische Kraft auftritt, nämlich der durch Figur 1 erläuterte Fall, der nun durch die gewählte Fassung nicht mehr ausgeschlossen wird.

Bericht über das 219. Gesellschaftsjahr 1908/1909.

(Zusammengestellt vom Adjunkten Dr. A. Schwaßmann.)

Hauptversammlung am 2. März 1908.

Der Jahrverwalter Herr Professor Dr. Edm. Hoppe erstattet den Jahresbericht über das 218. Gesellschaftsjahr. Die Gesellschaft besteht hiernach z. Z. aus 12 Ehrenmitgliedern, 19 auswärtigen und 79 einheimischen Mitgliedern. Die statutenmäßig notwendigen Neuwahlen ergeben folgendes Resultat: Herr Oberlehrer Dr. W. Büchel wird zum Mitjahrverwalter, Herr Seminaroberlehrer Professor Dr. K. Umlauf zum Mitglied der Redaktionskommission und Herr Professor H. Ahlborn zum Kassenrevisor erwählt. Der Vorstand für 1908/1909 besteht hiernach aus den Herren Professor Dr. Edm. Hoppe, Jahrverwalter, Dr. W. Büchel, Mitjahrverwalter, und Dr. A. Schwaßmann, Adjunkt.

Das Vermögen der Gesellschaft beträgt nach dem Kassenbericht des aus seinem Amte scheidenden Mitjahrverwalters Herrn Dr. J. Schröder 807 M.

Im Anschluß an die Hauptversammlung findet das übliche Festessen unter Teilnahme einiger Gäste und vieler Mitglieder im Hotel zum Kronprinzen statt.

Versammlung am 14. März 1908.

Herr Oberlehrer Dr. O. Jessel und die Herren Kandidaten des höheren Lehramts E. Behn und Dr. J. Paulsen werden satzungsgemäß als ordentliche Mitglieder in die Gesellschaft aufgenommen.

Auf Grund des von Herrn Professor Ahlborn erstatteten Kassenberichtes wird dem bisherigen Kassenführer Entlastung erteilt.

Es wird beschlossen, den Buchhändlerpreis des zweiten Nachtrags zum „Katalog der auf Hamburger Bibliotheken vorhandenen Literatur aus der reinen und angewandten Mathematik“ auf 2,50 M festzusetzen.

Herr Dr. P. Haß hält einen Vortrag, betitelt: „Bemerkungen zur Definition des Begriffes der eindeutigen analytischen Funktion.“

Herr Professor Dr. Edm. Hoppe trägt eine Mitteilung über die Frage der Mechanik der Ruderbewegung in fließendem Wasser vor.

Versammlung am 4. April 1908.

Der Vorsitzende gedenkt in warmen Worten des schweren Verlustes, den die Gesellschaft durch den jähen Tod ihres eifrigen Mitgliedes Dr. Arthur Wetzler erlitten hat. Die Versammlung ehrt das Andenken des Verstorbenen durch Erheben von den Sitzen.

Herr Diplomingenieur Wettstädt und Herr W. Culmann, Oberrer an der Navigationsschule, werden satzungsgemäß als ordentliche tglieder in die Gesellschaft aufgenommen.

Herr Wasserbaudirektor Geheimrat Professor Dr. Bubendey hält ien Vortrag über die Veränderungen der mittleren Jahreswasserstände r Elbe.

Versammlung am 9. Mai 1908.

Der Vorsitzende teilt der Versammlung mit, daß der Gesellschaft auswärtiges Mitglied Herr Oberlehrer Dr. O. Pund in Charlottenrg durch einen raschen Tod entrissen wurde. Die Gesellschaft verrt in ihm eines seiner treusten und eifrigsten Mitglieder, dem sie eine große Reihe von Vorträgen und wertvollen Veröffentlichungen den Mitteilungen der Gesellschaft zu besonderem Danke verpflichtet . Die Versammlung ehrt das Andenken des Verstorbenen durch heben von den Sitzen.

Herr Professor Dr. Edm. Hoppe hält einen Vortrag über die undlagen und Probleme der Hydrodynamik.

Fräulein G. Meißner trägt einige Bemerkungen zum Gaußschen weise des Fermatschen Satzes für $n = 3$ vor.

Versammlung am 30. Mai 1908.

Der Vorsitzende gedenkt in warmen Worten des vom Tode abrufenen, langjährigen Mitgliedes der Gesellschaft Admiralitätsrat Prosor C. Koldewey und entwirft ein Bild seiner vielseitigen Tätigkeit. e Versammlung ehrt das Andenken des Verstorbenen durch Erheben n den Sitzen.

Herr Dr. J. Repsold hält einen durch Lichtbilder unterstützten ortrag über „Neue Meridiankreise".

Herr Professor Dr. Köpcke zeigt eine Vorrichtung zur Demonation projektivischer Strahlenbündel vor.

Versammlung am 12. September 1908.

Herr Dr. E. Tams, wissenschaftlicher Hilfsarbeiter an der Hamrger Hauptstation für Erdbebenforschung, wird satzungsgemäß als ientliches Mitglied in die Gesellschaft aufgenommen.

Herr Dr. H. Jansen hält einen Vortrag über den Zusammenhang rschiedener Abbildungen der nichteuklidischen Geometrie.

Versammlung am 17. Oktober 1908.

Herr Zivilingenieur R. Hennig wird satzungsgemäß als ordenthes Mitglied in die Gesellschaft aufgenommen.

Herr Dr. E. Tams hält einen Vortrag über die Theorie der Seisographen.

Herr Professor Dr. Edm. Hoppe spricht über die kosmische Bedeutung des Zeemann-Effektes.

Versammlung am 14. November 1908.

Der Vorsitzende gibt der Versammlung von dem am 29. Oktober erfolgten Tode des Ehrenmitgliedes Deich- und Grenzinspektor D. A. Schuback, welcher der Gesellschaft mehr als 60 Jahre hindurch angehört hat, Kenntnis und entwirft ein Bild seiner langjährigen Wirksamkeit. Die Versammlung ehrt das Andenken des Verstorbenen durch Erheben von den Sitzen.

Die Herren Dr. H. Jung und Oberlehrer J. Schwabe werden satzungsgemäß als ordentliche Mitglieder in die Gesellschaft aufgenommen.

Herr Professor Dr. E. Busche hält einen Vortrag über das Möbiussche Netz.

Herr Observator Dr. A. Schwaßmann referiert über neuere Geschwindigkeitsmessungen in den verschiedenen Schichten der Photosphäre und der Korona der Sonne.

Herr Oberlehrer Dr. W. Büchel legt einige graphische Eisenbahnfahrpläne vor und weist auf ihre praktische Anwendbarkeit im Unterricht zur Demonstration graphischer Methoden hin.

Versammlung am 12. Dezember 1908.

Herr Lehramtskandidat P. Ossenbrügge wird satzungsgemäß als ordentliches Mitglied in die Gesellschaft aufgenommen.

Es wird beschlossen, den auswärtigen Mitgliedern auf ihren Wunsch hin regelmäßig Einladungskarten zu den Sitzungen der Gesellschaft zugehen zu lassen.

Herr Direktor der Navigationsschule Professor Dr. F. Bolte hält einen Vortrag über die astronomische Ortsbestimmung auf See ohne logarithmische Rechnung an der Hand von Tafeln und Diagrammen.

Herr Prof. Dr. Köpcke macht eine Mitteilung über das Metazentrum eines rechteckigen Balkens unter Vorführung von zwei beweglichen Modellen.

Versammlung am 9. Januar 1909.

Herr Oberlehrer Professor Dr. A. Otte in Itzehoe wird satzungsgemäß als auswärtiges Mitglied in die Gesellschaft aufgenommen.

Herr Dr. H. Jung hält einen Vortrag über eine neue Methode zur Behandlung der Zahlentheorie.

Über die Sitzung am 13. Februar wird im nächsten Jahre berichtet werden.

Die Bibliothek der Gesellschaft verdankt folgenden Herren wertvolle Zusendungen, wofür sie auch an dieser Stelle den verehrten Herren Verfassern den besten Dank ausspricht:

Angström, Arens, Brand, Durhold, Dörsing, Falk, Alfred Fischer, Otto Fischer, Günther, Hansen, Haß, Herrmann, Heussel, v. d. Heyden, Hoppe, Hurwitz, Juel, Jung, Kummer, Lerch, Lummer, Mattenklodt, Möller, Müllermeister, Nielsen, Ohmann, Oppenheimer, Prochnow, Schnee, Schilling, Specht, Stroh, Tams, Timm, Uetzmann.

Außerdem steht die Gesellschaft in Schriftenaustausch mit zahlreichen deutschen und ausländischen gelehrten Gesellschaften.

Die Adresse der Gesellschaft ist:

Mathematische Gesellschaft, Hamburg,
Patriotisches Gebäude.

Mitgliederverzeichnis.

Bestand der Mathematischen Gesellschaft in Hamburg am 1. Januar 1909.

I. Ehrenmitglieder.

Se. Magnifizenz Bürgermeister Dr. jur. O. Stammann in Hamburg.
Bruns, H., Dr. phil., Geh. Hofrat, Professor, Direktor der Sternwarte in Leipzig.
Bubendey, J. F., Geh. Baurat und Wasserbaudirektor in Hamburg.
Cantor, M., Dr. phil., Geh. Hofrat, Professor der Mathematik in Heidelberg.
Günther, S., Dr. phil., Professor der Geographie in München.
Hurwitz, A., Dr. phil., Professor der Mathematik in Zürich.
von Neumayer, G., Dr. phil., Professor, Wirkl. Geh. Admiralitätsrat, Exzellenz, Neustadt a. d. Haardt.
Netto, E., Dr. phil., Geh. Hofrat, Professor der Mathematik in Gießen.
Niebour, Th., Dr. phil., Direktor a. D., Hamburg, Eimsbüttelerstr. 48.
Reye, Th., Dr. phil., Professor der Mathematik in Straßburg.
Sturm, R., Dr. phil., Geh. Reg.-Rat, Professor der Mathematik in Breslau.

II. Auswärtige Mitglieder.

Ambronn, L., Dr. phil., Professor, Obervator der Sternwarte in Göttingen.
Bibliothek, Königliche, in Berlin.
Blater, J., in Baden-Baden.
[illegible], Professor, Direktor der Sternwarte in Kiel.

Mahlke, A., Dr. phil., Assistent an der Phys. Reichsanstalt, Charlottenburg.

Mainka, C., Dr. phil., Assistent an der Kais. Hauptstation für Erdbebenforschung, Straßburg.

Meyn, H. W., Direktor der Karlshütte in Rendsburg.

Mügge, O., Dr. phil., Professor der Mineralogie in Göttingen.

Oppenheimer, H., Dr. phil., Kgl. Oberlehrer in Neustadt a. H. (Pfalz).

Otte, A., Dr. phil., Professor am Realgymnasium in Itzehoe.

Scheller, A., Dr. phil., Adjunkt der K. K. Universitätssternwarte in Prag.

Schönwiese, R., Versicherungsmathematiker an der Alten Leipziger Lebensversicherungs-Gesellschaft zu Leipzig.

Schrader, C., Dr. phil., Geh. Reg.-Rat, Reichsprüfungsinspektor in Berlin NW. 52, Calvinstr. 6.

Servus, H., Dr. phil., Oberlehrer am Friedrichs-Realgymnasium in Berlin NW 6., Albrechtstr. 27.

Sieveking, J. H., in Bielefeld, Gr. Kurfürstenstr. 14.

Sprung, A., Dr. phil., Professor, Sektionschef am meteorolog. Institut in Potsdam, Telegraphenberg.

Teege, H., Dr. phil., Marineoberlehrer in Wilhelmshaven, Roonstr. 15.

Wilkens, A., Dr. phil., Observator der Kgl. Sternwarte in Kiel.

Wirtz, C. W., Dr. phil., Observator der Sternwarte und Privatdozent in Straßburg, Universitätsstraße 36.

III. Einheimische Mitglieder.

Ahlborn, F. H. H., Professor, Hamburg 23, Papenstr. 64 II.

Banning, F., Dr. phil., Oberlehrer, Hamburg 24, Papenhuderstr. 12.

Bauch, F., Lehrer der Mathematik, Hamburg 21, Höltystr. 10.

Behn, E., Kand. d. h. Schulamts, Hamburg 20, Eppendorferweg 99 I.

Bensberg, E., Wasserbauinspektor, Baurat, Bergedorf, Wentorferstr. 95.

Berkhan, G. W., Dr. phil., Hamburg 21, Arndtstr. 21 I.

Böger, R., Dr. phil., Professor, Hamburg 24, Armgartstr. 20.

Boehm, E., Dr. phil., Oberlehrer, Hamburg 23, Papenstr. 85.

Bohnert, E. F. Ph., Dr. phil., Professor, Direktor der Oberrealschule St. Georg, Hamburg 25, Wallstraße 17.

Bolte, F. G., Dr. phil., Professor, Direktor der Navigationsschule, B. d. Erholung 12.

Brügmann, W., Dr. phil., Oberlehrer, Hamburg 19, Lappenbergsallee 28.

Büchel, W., Dr. phil., Oberlehrer, Hamburg 30, Moltkestr. 49 III.

Busche, E., Dr. phil., Professor, Hamburg 19, Alardusstr. 1 I.

Culmann, W., Oberlehrer, Hamburg 13, Grindelallee 100 III.

Dencker, F., Chronometerfabrikant, Hamburg, Gr. Bäckerstr. 13.
Detels, F., Dr. phil., Oberlehrer, Hamburg 21, Immenhof 2.
Dörge, O., Dr. phil., Oberlehrer, Bergedorf, Am Baum 41.
Dressler, M, Oberlehrer, Hamburg 22, Uferstr. 21 II.
Ehlers, W., Seminaroberlehrer, Hamburg 22, Finkenau 20 pt.
Fischer, F., Assecuradeur, Hamburg 23, Eilenau 41.
Franck, P., Dr. phil., Oberlehrer, Hamburg 13, Hartungstr. 22.
Genzken, E., Oberlehrer, Hamburg 23, Papenstr. 14.
Glage, F. E. A., Dr. phil., Oberlehrer, Hamburg, Sierichstr. 96.
Graff, K., Dr. phil., Assistent an der Sternwarte, Altona, Stiftstr. 16[1])
Grimpen, A., Dr. phil., Lehrer, Faberstr. 23.
Groskurth, F., Dr. phil., Oberlehrer, Hamburg 23, Wandsbecker Chaussee 59.
Großmann, A., Kand. d. h. Schulamts, Hamburg 19, Tornquiststr. 70 pt.
Haecker, G., Dr. phil., Oberlehrer, Hamburg 23, Hasselbrookstr. 78 II.
Hadenfeldt, E., Direktor der Hafen-Dampfschiffahrts-Gesellschaft, Hansastr. 70.
Haß, P., Dr. phil., Kand. d h. Schulamts, Hamburg 5, St. Georgstr. 19 IV.
Hennig, R., Ingenieur, Hamburg 25, Bethesdastr. 20 III.
Herz, E., Oberlehrer, Altona, kl. Gärtnerstr. 81 I.
Hillers, W., Dr. phil., Oberlehrer, Hamburg 32, Wagnerstr. 58 III.
Hoppe, E., Dr. phil., Professor, Hamburg 13, Fröbelstr. 5.[2])
Jaerisch, P. G. M., Dr. phil., Professor, Sande b. Bergedorf, Waldstr.
Jansen, H., Dr. phil., Kand. d. h. Schulamts, Hamburg 23, Hagenau 71.
Jessel, O., Dr. phil., Oberlehrer, Hamburg 37, Jungfrauental 14.
Jung, H., Dr. phil., Hilfslehrer, Hamburg 13, Bundesstr. 18 II.
Keferstein, H. J., Dr. phil., Professor, Direktor an der Realschule St. Pauli, Hamburg 26, Meridianstr. 15.
Köpcke, H. A., Dr. phil., Professor, Altona-Ottensen, Treskowallee 14.
Körner, Th., Dr. phil., Oberlehrer, Hamburg 19, Ottersbeck-Allee 23 I.
Krüss, H., Dr. phil., Hamburg 13, Hochallee 77.
Lange, W., Oberlehrer, Altona-Ottensen, Treskowallee 22.
Lindemann, A., Dr. phil., Oberlehrer, Hamburg 21, Pethumstr. 5.
Löwer, G. F., Baurat, Wasserbauinspektor, Hamburg 23, Ritterstr. 100.
Lony, G. F. C., Dr. phil., Oberlehrer, Hamburg 21, Heinrich Hertzstr. 3.
Meißner, G., Fräulein Oberlehrer, Hamburg 23, Hirschgraben 7/9 I.
Messow, B., Assistent an der Sternwarte, Hamburg 3, Sternwarte.

---

1) Die Herren, welche an der Sternwarte angestellt sind, werden mit Ende des Winters zum größten Teile bei der neuen Sternwarte in Bergedorf Dienstwohnung erhalten.

2) 1. April ab: Niendorf b. Hamburg.

Meyer, C., Kand. d. h. Schulamts, Hamburg 4, Annenstr. 4 III.
Michaelsen, A., Dr. phil., Professor, Altona, Lessingstr. 10.
Nagel, A. C., Zivilingenieur, Hamburg 26, Schwarze Str. 28.
Norden, M., Oberlehrer, Hamburg, Eppendorferlandstr. 4.
Oeltjen, H., Dr. phil., Professor, Hamburg 19, Schulweg 48.
Oldenburg, Fr., Oberlehrer, Hamburg, Weidenstieg 4 II.
Oppermann, A., Oberlehrer, Hamburg, Ericastr. 105 I.
Ossenbrügge, P., Kand. d. h. Schulamts, Hamburg 31, Collaustr. 1 pt.
Partz, A., Oberlehrer, Hamburg 22, Flachsland 49.
Paulsen, J., Dr. phil., Kand. d. h. Schulamts, Altona, kl. Gärtnerstr. 109 I.
Pflaumbaum, G., Dr. phil., Oberlehrer, Hamburg 30, Wrangelstr. 49.
Repsold, J. A., Dr. phil., Hamburg 25, Claus Grothstr. 96.
Riebesell, P., Dr. phil., Kand. d. h. Lehramts, Hamburg 37, Klosterallee 100.
Roloff, H. P., Oberlehrer, Bergedorf, Steinkamp 12.
Schader, F., Dr. phil., Professor, Groß. Flottbeck, Claudiusstr. 21.
Schirlitz, W., Baumeister, Hamburg 21, Heinrich Hertzstr. 79.
Schorr, R., Dr. phil., Professor, Direktor der Sternwarte, Hamburg. Sternwarte.
Schröder, J., Dr. phil., Oberlehrer, Hamburg 22, Wagnerstr. 72 II.
Schubert, H. C. H., Dr. phil., Professor, Hamburg 25, Borgfelderstr.
Schumpelick, A., Oberlehrer, Hamburg 20, Woldsenweg 2 III.
Schwabe, J., Oberlehrer, Hamburg 24, Sechslingspforte 6.
Schwabe, O., Oberlehrer, Hamburg 21, Richterstr. 8.
Schwassmann, A., Dr. phil., Observator an der Sternwarte, Hamburg 30, Hoheluftchaussee 70.
Siegmeyer, K., Dr. phil., Oberlehrer, Bergedorf, Ernst Mantiusstr. 12.
Sieveking, F., Dr. jur., Rechtsanwalt, Lokstedt b. Hamburg, Osterfeldstr. 6.
Tams, E., Dr. phil., Hamburg 24, Wandsbeckerstieg 59 F.
Thaer, A., Dr. phil., Professor, Direktor der Oberrealschule vor dem Holstentor, Hamburg.
Thorade, H., Oberlehrer, Hamburg 24, Güntherstr. 42 pt.
Tuch, Th., Dr. phil., Hamburg 25, Claus Grothstr. 49.
Uetzmann, R., Dr. phil., Oberlehrer, Hamburg 25, Malzweg 10.
Umlauf, K., Dr. phil., Professor, Hamburg 20, Löhrsweg 11.
Wagner, H. A., Dr. phil., Professor, Direktor der Realschule vor dem Lübeckertor.
Walter, B., Dr. phil., Professor, Hamburg 22, Wagnerstr. 72.
Wettstädt, E., Dipl. Ingenieur, Hamburg 23, Eilbeckerweg 29 III.
Winter, A., Dr. phil., z. Z. Einj.-Freiwilliger, Flensburg, Ritterstr. 12.
Zwingenberger, H., Oberlehrer, Hamburg 3, Michaelisstr. 62.

MITTEILUNGEN
DER MATHEMATISCHEN GESELLSCHAFT
IN HAMBURG.

BAND IV. № 10. AUSGEGEBEN IM FEBRUAR 1910.

Über Punktsysteme in der Ebene.

Von Heinrich W. E. Jung in Hamburg.

Es seien n Punkte $P_1, P_2, \ldots, P_n$ in einer Ebene gegeben. Wir nehmen ein rechtwinkliges Koordinatensystem in der Ebene an, auf das wir die Punkte beziehen. Die Koordinaten von P_α seien x_α, y_α. Wir setzen

$$x_\alpha + iy_\alpha = z_\alpha,$$

wo $i = \sqrt{-1}$ ist. Ferner sei

$$f(z) = (z - z_1)(z - z_2)\ldots(z - z_n).$$

Es sei also $f(z) = 0$ die Gleichung n-ten Grades, deren Wurzelpunkte die gegebenen Punkte P sind. Die Ableitung von $f(z)$, also $f'(z)$, hat $n - 1$ Wurzelpunkte. Diese nennen wir das erste abgeleitete Punktsystem des gegebenen; ebenso nennen wir die Wurzelpunkte von $f''(z)$ das zweite abgeleitete Punktsystem usf. Zu jedem Punktsystem gehört ein eindeutig bestimmtes konvexes Polygon, dessen Ecken Punkte des Systems sind, und das alle Punkte im Innern oder auf der Begrenzung enthält. Dies Polygon wollen wir das zu dem Punktsystem gehörige Polygon nennen. Es gilt dann der

Satz 1: Das Polygon eines abgeleiteten Punktsystems liegt im Innern des Polygons des ursprünglichen Systems. Die beiden Polygone können nur dann Ecken oder Seiten gemeinsam haben, wenn das ursprüngliche Punktsystem mehrfach zu zählende Punkte enthält.

Dieser Satz stammt von Mansion.[1]) Zum Beweise genügt es zu zeigen, daß, wenn alle Wurzelpunkte von $f(z)$ auf einer Seite einer geraden Linie liegen, keine Wurzelpunkte von $f'(z)$ auf der anderen Seite dieser geraden Linie liegen können. Man braucht nämlich diesen Hilfssatz nur auf alle Seiten des Polygons des ursprünglichen Systems

1) Siehe Mansion, Mélanges mathématiques.

anzuwenden, um den Satz 1 zu beweisen. Um aber diesen Hilfssatz zu beweisen, können wir durch eine Koordinatentransformation bewirken, daß die gerade Linie die Achse der reellen Zahlen wird und den Satz so aussprechen: Ist der imaginäre Teil aller Wurzeln von $f(z) = 0$ nicht negativ, so gilt dasselbe von den imaginären Teilen der Wurzeln von $f'(z) = 0$. Wir machen demnach die Voraussetzung:

$$y_1 \geqq 0,\ y_2 \geqq 0, \ldots y_n \geqq 0, \tag{1}$$

und zeigen, daß $f'(z)$ nicht Null sein kann, wenn in $z = x + iy$ die Größe y kleiner als 0 ist. Es ist nämlich

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{1}{z - z_1} + \frac{1}{z - z_2} + \cdots + \frac{1}{z - z_n}. \tag{2}$$

Der Faktor von i in (2) ist

$$\frac{y_1 - y}{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2} + \cdots + \frac{y_n - y}{(x - x_n)^2 + (y - y_n)^2}. \tag{3}$$

Die Nenner der einzelnen Summanden in (3) sind sicher positiv und die Zähler bei unseren Voraussetzungen (1) auch. Es kann also der Faktor von i in $\frac{f'(z)}{f(z)}$ bei unseren Voraussetzungen nicht Null sein und daher auch nicht $f'(z)$.

Die Polygone des ursprünglichen Systems und aller abgeleiteten liegen also so, daß immer jedes folgende ganz in dem vorhergehenden liegt, und nur, wenn eins der Punktsysteme mehrfach zu zählende Punkte hat, haben zwei aufeinander folgende Polygone Punkte oder Seiten gemeinsam.

Das $(n-1)$-te abgeleitete Punktsystem besteht nur aus einem Punkt. Dieser Punkt ist der Wurzelpunkt von $f^{(n-1)}(z)$. Bezeichnen wir den zugehörigen Wert von z mit $\zeta = \xi + i\eta$, so haben wir

$$f^{(n-1)}(z) = n!\,\zeta - (n-1)! \sum_{\alpha=1}^{n} z_\alpha = 0,$$

$$\zeta = \frac{1}{n} \sum z_\alpha,$$

woraus sich durch Trennung des Reellen und Imaginären ergibt

$$\xi = \frac{1}{n} \sum x_\alpha,\ \eta = \frac{1}{n} \sum y_\alpha.$$

Daraus folgt, daß dieser Punkt nichts anderes ist, als der Schwerpunkt des ursprünglichen Systems. Da er aber zu den abgeleiteten Systemen in derselben Beziehung steht, wie zu dem ursprünglichen System, so haben wir

Satz 2: Ist $f(z)$ eine ganze rationale Funktion $(n-1)$-ten Grades von z, so ist der Wurzelpunkt der $(n-1)$-ten Ableitung

$f^{(n-1)}(z)$ der Schwerpunkt der Wurzelpunkte von $f(z)$ und ebenso der Wurzelpunkte einer jeden Ableitung von $f(z)$.

Dieser Satz stammt von Isenkrahe.[1])

Das $(n-2)$-te abgeleitete Punktsystem besteht aus zwei Punkten, nämlich den beiden Wurzelpunkten der quadratischen Funktion $f^{(n-2)}(z)$. Über diese gilt der

Satz 3[2]): Die Verbindungslinie der beiden Wurzelpunkte von $f^{(n-2)}(z)$ und die Mittelsenkrechte ihrer Verbindungsstrecke sind die Hauptträgheitsachsen sowohl des gegebenen Punktsystems, als auch jedes abgeleiteten. Die beiden Punkte liegen immer auf derselben Trägheitsachse, auf der die Brennpunkte der Trägheitsellipse liegen.

Es ist nämlich

$$(4) \qquad f^{(n-2)}(z) = \tfrac{1}{2} n! z^2 - (n-1)! z \sum z_\alpha + (n-2)! \sum_{\alpha<\beta} z_\alpha z_\beta .$$

Sollen die Wurzelpunkte dieser Gleichung so liegen, daß die Koordinatenachsen mit der Verbindungslinie der beiden Wurzelpunkte und der Mittelsenkrechten ihrer Verbindungsstrecke identisch sind, so müssen die beiden Wurzeln den absoluten Beträgen nach gleich sein und entweder rein imaginär oder reell sein. Daraus ergeben sich die beiden Bedingungen

$$(5) \qquad \sum z_\alpha = 0, \quad \sum_{\alpha<\beta} z_\alpha z_\beta \text{ reell.}$$

Aus der Gleichung $\Sigma z_\alpha = 0$ ergeben sich durch Trennung des Reellen und Imaginären die beiden Gleichungen $\Sigma x_\alpha = 0$, $\Sigma y_\alpha = 0$. Da $\Sigma z_\alpha = 0$, so ist auch

$$(\sum z_\alpha)^2 = \sum z_\alpha^2 + 2 \sum z_\alpha z_\beta = 0 .$$

Hieraus folgt, daß Σz_α^2 gleichzeitig mit $\sum_{\alpha<\beta} z_\alpha z_\beta$ reell ist. Es ist aber

$$\sum z_\alpha^2 = \sum (x_\alpha + i y_\alpha)^2 = \sum (x_\alpha^2 - y_\alpha^2) + 2i \sum x_\alpha y_\alpha ;$$

also ist Σz_α^2 und damit $\sum_{\alpha<\beta} z_\alpha z_\beta$ reell, wenn $\Sigma x_\alpha y_\alpha = 0$. Die Bedingungen (5) sind also identisch mit den Gleichungen

$$\sum x_\alpha = 0, \quad \sum y_\alpha = 0, \quad \sum x_\alpha y_\alpha = 0,$$

also den Bedingungen dafür, daß die Koordinatenachsen die Hauptträgheitsachsen sind. Wir nehmen an, daß diese Bedingungen erfüllt sind. Denken wir uns jeden Punkt mit der Masse 1 belegt, so sind

[1]) Isenkrahe, Archiv der Mathematik und Physik. (3) 8 257.
[2]) H. Jung, Archiv der Mathematik und Physik. (3) 18 231.

die beiden Hauptträgheitsmomente die Momente in bezug auf die x- und y-Achse, also

$$A = \sum y_\alpha^2, \quad B = \sum x_\alpha^2.$$

Die Gleichung (4) nimmt jetzt die Gestalt an

$$\tfrac{1}{2}n!\varepsilon^2 + (n-2)!\sum_{\alpha<\beta} \varepsilon_\alpha \varepsilon_\beta = 0$$

oder

$$n(n-1)\varepsilon^2 + A - B = 0,$$

woraus sich als Werte für die Wurzeln ergibt

$$\xi_{1,2} = \pm \frac{\sqrt{A-B}}{\sqrt{n(n-1)}}.$$

Da die Gleichung der Trägheitsellipse

$$\frac{x^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{A}}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{B}}\right)^2} = 1$$

ist, so sieht man, daß für $A > B$ die Wurzeln $\xi_{1,2}$ rein imaginär werden, und die große Achse der Ellipse und also auch ihre Brennpunkte in die y-Achse fallen, und daß dagegen für $A < B$ die Wurzeln $\xi_{1,2}$ reell sind, und die große Achse der Ellipse und damit ihre Brennpunkte in die x-Achse fallen. Es liegen daher die Wurzelpunkte $\xi_{1,2}$ und die Brennpunkte der Trägheitsellipse immer auf derselben Achse. Die Entfernung der Brennpunkte vom Anfangspunkt ist

$$e = \left| \sqrt{\frac{A-B}{AB}} \right|,$$

die Entfernung der Wurzelpunkte $\xi_{1,2}$ vom Nullpunkt ist dagegen

$$|\xi_{1,2}| = \left| \sqrt{\frac{A-B}{n(n-1)}} \right|.$$

Dadurch, daß man die Punkte anstatt mit der Masse 1 mit einer passend gewählten von n abhängigen anderen Masse belegt, kann man für $n > 2$ erreichen, daß die Wurzelpunkte $\xi_{1,2}$ mit den Brennpunkten der Trägheitsellipse zusammenfallen, natürlich vorausgesetzt, daß die gegebenen Punkte nicht in einer geraden Linie liegen.

Die beiden Wurzelpunkte ξ_1 und ξ_2 stehen auch noch in einfacher Beziehung zu den Brennpunkten eines Systems konfokaler Ellipsen und Hyperbeln, das dadurch definiert ist, daß für alle Tangenten eines der konfokalen Kegelschnitte als Achsen das Trägheitsmoment des gegebenen Punktsystems denselben Wert hat. Die Achsen dieses Kegelschnittsystems fallen zusammen mit den Achsen der Trägheitsellipse. Die Gleichung des Systems ist

$$\frac{x^2}{\lambda + \frac{A-B}{n}} + \frac{y^2}{\lambda} = 1,$$

wo λ der Parameter des Systems ist. Ist $A > B$, so liegt die große Achse auf der x-Achse, die Entfernung der Brennpunkte vom Nullpunkt ist

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{A-B}{n}}.$$

Die Brennpunkte liegen also nicht auf der Achse, auf der die Wurzelpunkte ζ_1 und ζ_2 liegen, und es besteht die Beziehung

$$\left|\zeta_{1,2}\right| = \frac{\varepsilon}{\sqrt{n-1}}.$$

Über den sogenannten „casus ambiguus" bei der Berechnung des schiefwinkligen sphärischen Dreiecks.

Von P. Riebesell in Hamburg.

Sind in einem sphärischen Dreieck zwei Seiten uud der Gegenwinkel der einen Seite, bzw. zwei Winkel und die Gegenseite des einen gegeben, so erhält man bei Anwendung des Sinussatzes eine doppeldeutige Lösung.

Während bei L. Euler[1]) eine Diskussion über die Gültigkeit der beiden Lösungen des casus ambiguus vollständig fehlt, finden sich zum ersten Male Kriterien für die Existenz der Lösungen bei A. H. Legendre.[2]) Hier wird geometrisch die Möglichkeit der Konstruktion des Dreiecks aus den drei betreffenden Stücken untersucht, und als Kriterien für die Gültigkeit der beiden Lösungen dienen die Sätze oder deren Umkehrungen:

1. dem größeren Winkel liegt die größere Seite gegenüber.

2. die Summe zweier Seiten ist gleichzeitig mit der Summe ihrer Gegenwinkel größer, gleich oder kleiner als $2R$.

Die Diskussion der einzelnen Fälle, die Legendre anschließt, ist jedoch unvollständig. Ebenso fehlt eine Untersuchung darüber, ob die Erfüllung der beiden Bedingungen nur notwendig für die Gültigkeit einer Lösung ist, oder ob sie auch hinreichend ist, d. h. ob bei Erfüllung der beiden Kriterien schon die Existenz eines Dreiecks garantiert wird, oder ob das gefundene Wertsystem noch anderen Bedingungen genügen muß, um wirklich ein Dreieck zu liefern. Außerdem findet sich bei Legendre keine Untersuchung darüber, ob die

1) Zwei Abhandlungen über sphärische Trigonometrie. 1779. In Ostwalds Klassikern von E. Hammer.

2) Éléments de géométrie 1813.

beiden Kriterien bei dem speziellen Eulerschen Dreiecksbegriff nicht etwa identisch oder voneinander abhängig sind.

Da alle diese Fragen auch in den neuesten Lehrbüchern meines Wissens nicht vollständig beantwortet sind, soll im folgenden eine eingehende Diskussion der einzelnen Fälle auf analytischem Wege gegeben werden.

Auf die lückenhaften und falschen Tabellen, die sich fast in allen Lehrbüchern über die Zahl der Lösungen beim zweideutigen Fall finden[1]), hat besonders E. Grohmann[2]) hingewiesen, der wohl als erster eine richtige und fast vollständige Klassifizierung der einzelnen Fälle vornimmt.

Aber auch bei ihm erfährt man nichts über die Abhängigkeit der beiden Kriterien und über den Anteil, den sie an der Ausscheidung der ungültigen Werte haben. Dasselbe gilt von O. Schlömilch[3]) und von der Enzyklopädie der Elementarmathematik[4]), wo zwar eine, bis auf einen Fall ausführliche, richtige Diskussion gegeben wird, wo aber nur das 1. Kriterium erwähnt wird und daher über die Gültigkeit der beiden in den einzelnen Fällen nichts erhellt. Im Gegensatz hierzu wird bei W. Laska[5]) nur das zweite Kriterium erwähnt, und die Übersicht über die Zahl der Lösungen ist falsch und nicht genügend spezifiziert. In den übrigen kürzeren Lehrbüchern werden zwar meistens beide Relationen erwähnt, aber dem Zweck als Schulbücher entsprechend wird keine längere Diskussion gegeben.[6]) Auch E. Hammer[7]) gibt eine Diskussion und erwähnt, daß beide Kriterien für die Auswahl der Werte maßgebend seien, ohne darauf weiter einzugehen. Außerdem fehlt die Untersuchung über den gerade für unsere Frage wichtigen Fall, daß beide Seiten sich gleich viel von 90° unterscheiden, ebenso wie die Grenzfälle, wo beide Seiten gleich oder eine Seite bzw. ein Winkel gleich 90° sind.

---

1) Vgl. A. Burg, Handbuch der geradlinigen und sphärischen Trigonometrie. H. B. Lübsen, Lehrbuch der ebenen und sphärischen Trigonometrie. H. Servus, Stereometrie und sphärische Trigonometrie.

2) E. Grohmann, Über das sphärische Dreieck. Jahresbericht der öffentlichen Unter-Realschule. Wien 1897.

3) Handbuch der Mathematik.

4) H. Weber und J. Wellstein. Bd. II. W. Jacobsthal.

5) Lehrbuch der sphärischen Trigonometrie. 1890.

6) Vgl. F. Bohnert, Ebene und sphärische Trigonometrie (Sammlung Schubert Bd. III). — H. Thieme, Leitfaden der Mathematik für Realanstalten. Teil II. — Kambly-Thaer, Stereometrie.

7) E. Hammer, Lehr- und Handbuch der ebenen und sphärischen Trigonometrie. 3. Aufl. 1907.

Zur Diskussion wählen wir die Aufgabe: Gegeben c, a, γ.
Nach dem Sinus-Satz ist dann:

$$\sin \alpha = \frac{\sin a \cdot \sin \gamma}{\sin c}.$$

Dieser Wert sei als < 1 vorausgesetzt, damit wir überhaupt Lösungen erhalten. Auf die bei der Diskussion auftretenden Fälle, in denen $\sin \alpha > 1$ ist, wird daher nicht näher eingegangen. Den sich ergebenden spitzen Winkel nennen wir α', den stumpfen Winkel $2R - \alpha' = \alpha''$. Außerdem setzen wir: $c = 90^0 \mp \varphi$, $a = 90^0 \mp \psi$. Die Fälle, in denen eine Seite oder ein Winkel $= 0$ ist, wo wir also in Wirklichkeit Zweiecke erhalten, sind fortgelassen, ebenso diejenigen, wo eine Seite oder ein Winkel $= 180^0$ ist. Dann sind folgende Fälle zu unterscheiden:

(Wenn das Kriterium erfüllt ist, so ist der betreffende Wert in der Tabelle unterstrichen.)

I. $c > a$		A.	B.	C.
1. $c \leqq 90^0$, $a < 90^0$,	$\gamma \leqq 90^0$.	Nach dem Sinus-Satz ergibt sich:	1. Kriterium	2. Kriterium
d. h. $a + c < 2R$.		$\gamma > \alpha'$	$\underline{\alpha' < \gamma}$	$\underline{\alpha' + \gamma < 2R}$
			$\alpha'' > \gamma$	$\alpha'' + \gamma > 2R$
	$\gamma > 90^0$.	$2R - \gamma > \alpha'$	$\underline{\alpha' < \gamma}$	$\underline{\alpha' + \gamma < 2R}$
			$\alpha'' > \gamma$	$\alpha'' + \gamma > 2R$
2. $c > 90^0$, $a < 90^0$.				
$\varphi > \psi$				
d. h. $a + c > 2R$,	$\gamma \leqq 90^0$.	$\alpha' > \gamma$	$\alpha' > \gamma$	$\alpha' + \gamma < 2R$
			$\alpha'' > \gamma$	$\alpha'' + \gamma < 2R$
	$\gamma > 90^0$.	$\alpha' > 2R - \gamma$	$\underline{\alpha' < \gamma}$	$\underline{\alpha' + \gamma > 2R}$
			$\underline{\alpha'' < \gamma}$	$\underline{\alpha'' + \gamma > 2R}$
$\varphi = \psi$				
d. h. $a + c = 2R$,	$\gamma < 90^0$.	$\alpha' = \gamma$	$\alpha' = \gamma$	$\alpha' + \gamma < 2R$
			$\alpha'' > \gamma$	$\underline{\alpha'' + \gamma = 2R}$
	$\gamma = 90^0$.		$\alpha' = \alpha'' = \gamma$	$\underline{\alpha' + \gamma = 2R}$
	$\gamma > 90^0$.	$\alpha' = 2R - \gamma$	$\underline{\alpha' < \gamma}$	$\underline{\alpha' + \gamma = 2R}$
			$\alpha'' = \gamma$	$\alpha'' + \gamma > 2R$
$\varphi < \psi$				
d. h. $a + c < 2R$,	$\gamma \leqq 90^0$.	$\alpha' < \gamma$	$\underline{\alpha' < \gamma}$	$\underline{\alpha' + \gamma < 2R}$
			$\alpha'' > \gamma$	$\alpha'' + \gamma > 2R$
	$\gamma > 90^0$.	$\alpha' < 2R - \gamma$	$\underline{\alpha' < \gamma}$	$\underline{\alpha' + \gamma < 2R}$
			$\alpha'' > \gamma$	$\alpha'' + \gamma > 2R$

		A. Nach dem Sinus-Satz ergibt sich:	B. 1. Kriterium	C. 2. Kriterium
3. $c>90^0$, $a\geqq 90^0$, d. h. $a+c>2R$	$\gamma\leqq 90^0$.	$\alpha'>\gamma$	$\alpha'>\gamma$	$\alpha'+\gamma<2R$
			$\alpha''>\gamma$	$\alpha''+\gamma<2R$
	$\gamma>90^0$.	$\alpha'>2R-\gamma$	$\alpha'<\gamma$	$\alpha'+\gamma>2R$
			$\alpha''<\gamma$	$\alpha''+\gamma>2R$
II. $c=a$				
1. $c<90^0$, $a<90^0$, d. h. $a+c<2R$	$\gamma<90^0$.	$\alpha'=\gamma$	$\alpha'=\gamma$	$\alpha'+\gamma<2R$
			$\alpha''>\gamma$	$\alpha''+\gamma=2R$
	$\gamma=90^0$.		$\alpha'=\alpha''=\gamma$	$\alpha'+\gamma=2R$
	$\gamma>90^0$.	$\alpha'=2R-\gamma$	$\alpha'<\gamma$	$\alpha'+\gamma=2R$
			$\alpha''=\gamma$	$\alpha''+\gamma>2R$
2. $c>90^0$, $a>90^0$, d. h. $a+c>2R$	$\gamma<90^0$.	$\alpha'=\gamma$	$\alpha'=\gamma$	$\alpha'+\gamma<2R$
			$\alpha''>\gamma$	$\alpha''+\gamma=2R$
	$\gamma=90^0$.		$\alpha'=\alpha''=\gamma$	$\alpha'+\gamma=2R$
	$\gamma>90^0$.	$\alpha'=2R-\gamma$	$\alpha'<\gamma$	$\alpha'+\gamma=2R$
			$\alpha''=\gamma$	$\alpha''+\gamma>2R$
3. $c=90^0$, $a=90^0$, d. h. $a+c=2R$	$\gamma<90^0$.		$\alpha'=\gamma$	$\alpha'+\gamma<2R$
			$\alpha''>\gamma$	$\alpha''+\gamma>2R$
	$\gamma=90^0$.		$\alpha'=\alpha''=\gamma$	$\alpha'+\gamma=2R$
	$\gamma>90^0$.		$\alpha'<\gamma$	$\alpha+\gamma=2R$
			$\alpha''=\gamma$	$\alpha''+\gamma>2R$
III. $c<a$				
1. $c<90^0$, $a\leqq 90^0$, d. h. $a+c<2R$	$\gamma<90^0$.	$\gamma<\alpha'$	$\alpha'>\gamma$	$\alpha'+\gamma<2R$
			$\alpha''>\gamma$	$\alpha''+\gamma<2R$
	$\gamma\geqq 90^0$.	$2R-\gamma<\alpha'$	$\alpha'<\gamma$	$\alpha'+\gamma>2R$
			$\alpha''<\gamma$	$\alpha''+\gamma>2R$
2. $c<90^0$, $a>90^0$. $\varphi>\psi$ d. h. $a+c<2R$,	$\gamma<90^0$.	$\alpha'>\gamma$	$\alpha'>\gamma$	$\alpha'+\gamma<2R$
			$\alpha''>\gamma$	$\alpha''+\gamma<2R$
	$\gamma\gtreqless 90^0$.	$\alpha'>2R-\gamma$	$\alpha'<\gamma$	$\alpha'+\gamma>2R$
			$\alpha''<\gamma$	$\alpha''+\gamma>2R$

		A. Nach dem Sinus-Satz ergibt sich:	B. 1. Kriterium	C. 2. Kriterium
$\varphi=\psi$				
d. h. $a+c=2R$,	$\gamma<90^0$.	$\alpha'=\gamma$	$\alpha'=\gamma$	$\alpha'+\gamma<2R$
			$\alpha''>\gamma$	$\alpha''+\gamma=2R$
	$\gamma=90^0$.		$\alpha'=\alpha''=\gamma$	$\alpha'+\gamma=2R$
	$\gamma>90^0$.	$\alpha'=2R-\gamma$	$\alpha'<\gamma$	$\alpha'+\gamma=2R$
			$\alpha''=\gamma$	$\alpha''+\gamma>2R$
$\varphi<\psi$				
d. h. $a+c>2R$,	$\gamma<90^0$.	$\gamma>\alpha'$	$\alpha'<\gamma$	$\alpha'+\gamma<2R$
			$\alpha''>\gamma$	$\alpha''+\gamma>2R$
	$\gamma\gtrless 90^0$.	$2R-\gamma>\alpha'$	$\alpha'<\gamma$	$\alpha'+\gamma<2R$
			$\alpha''>\gamma$	$\alpha''+\gamma>2R$
3. $c\geqq 90^0$, $a>90^0$.				
d. h. $a+c>2R$,	$\gamma<90^0$.	$\alpha'<\gamma$	$\alpha'<\gamma$	$\alpha'+\gamma<2R$
			$\alpha''>\gamma$	$\alpha''+\gamma>2R$
	$\gamma\gtrless 90^0$.	$\alpha'<2R-\gamma$	$\alpha'<\gamma$	$\alpha'+\gamma<2R$
			$\alpha''>\gamma$	$\alpha''+\gamma>2R$

Aus der in ihren Resultaten vollständig symmetrisch angeordneten Tabelle folgt, daß für schiefwinklig ungleichseitige Dreiecke das erste Kriterium vollauf genügt. Nur bei gleichschenkligen Dreiecken, die ja aber praktisch für die Berechnung des zweiten Winkels nach dem Sinus-Satz fortfallen, versagt es. Das zweite Kriterium allein genügt nicht, es versagt in einem Fall. ($\varphi=\psi$ oder $a+c=2R$.)

Aus der Tatsache, daß in allen denjenigen Fällen, wo es sich nicht um spezielle Dreiecke handelt, das zweite Kriterium von selbst erfüllt ist, sobald der ersten Bedingung genügt ist, läßt sich schließen, daß die beiden Kriterien nicht unabhängig voneinander sind. In der Tat läßt sich allgemein zeigen, daß sie, so lange es sich um Eulersche Dreiecke handelt (alle Winkel und Seiten $<2R$) beide aus dem Sinus-Satz ableitbar sind, und das zweite Kriterium nur eine Folge des ersten unter Voraussetzung der Gültigkeit des Sinus-Satzes für das betreffende Wertsystem ist.[1]) So folgt aus:

$$\frac{\sin a}{\sin c}=\frac{\sin\alpha}{\sin\gamma}$$

die Bedingung

$$\sin a\gtrless\sin c,\ \sin\alpha\gtrless\sin\gamma.$$

1) Über die geometrische Abhängigkeit des zweiten Kriteriums vom ersten vgl. R. Baltzer, Die Elemente der Mathematik.

d. h.

$$a \gtreqless c, \quad \alpha \gtreqless \gamma,$$

oder, da der sin auch für die Supplemente richtig bleibt, so ist auch:

$$2R - a \gtreqless c, \; 2R - \alpha \gtreqless \gamma$$

oder etwa

$$a \gtreqless 2R - c, \; \alpha \gtreqless 2R - \gamma \text{ etc.}$$

Hierbei muß wieder für die einzelnen Fälle unterschieden werden, doch zeigt sich die Abhängigkeit des zweiten Kriteriums sofort in der Tabelle dadurch, daß man die Werte der Kolonne C direkt aus denen der Kolonne A ableitet.

Die Frage, ob nun in allen Fällen, wo das erste Kriterium erfüllt ist, das Wertsystem auch wirklich ein Dreieck liefert, oder ob die Erfüllung keine hinreichende Bedingung bildet, ist analytisch schwer zu entscheiden, da es natürlich noch andere Beziehungen zwischen den möglichen a, c, α und γ gibt, die etwa aus den Delambreschen Gleichungen abgeleitet werden könnten und deren Identität mit dem ersten Kriterium für jeden Fall nachzuweisen wäre. Der Beweis ist jedoch geometrisch einfach zu führen, wenn man die Gültigkeit des betreffenden Kongruenzsatzes bzw. die Eindeutigkeit und Möglichkeit der Lösung für a, c, γ konstruktiv beweist.[1]) Am einfachsten gelingt der Beweis im Anschluß an die obige Tabelle mit Hilfe des sogenannten Sphärometers.

Rein geometrisch ist neuerdings die Diskussion der einzelnen Fälle von E. Eckhardt[2]) ausgeführt worden, der auf diese Weise zu einer Bestimmungstabelle der Zahl der Lösungen geführt wird, die mit der unsrigen im Wesentlichen übereinstimmt. Durch die dort ausgeführte Zurückführung der Konstruktion eines sphärischen Dreiecks auf die eines ebenen Kreisvierecks läßt sich übrigens ebenfalls die Abhängigkeit unserer beiden Kriterien zeigen. An dieser Stelle, wo es sich nur darum handelte, praktische Methoden zur Bestimmung der Gültigkeit einer Lösung zu gewinnen, kann hierauf jedoch nicht näher eingegangen werden.

Es sei noch hervorgehoben, daß es sich bei dem ganzen Problem darum handelt, aus den Lösungen, die sich aus den für die viel allgemeineren Moebius-Studyschen Dreiecke geltenden Sätzen ergeben, diejenigen auszusuchen, die für die Eulerschen Dreiecke Gültigkeit

1) Vgl. Legendre a. a. O.

2) E. Eckhardt, Zur[illegible] der sphärischen Trigonometrie auf die Geometrie des ebenen Kr[illegible]eipzig 1909.

haben.[1]) Daß hierzu weder das erste noch das zweite Kriterium ein Universalmittel ist, geht aus der obigen Tabelle hervor.

Hamburg, 6. Dezember 1909.

Einige Betrachtungen im Teilerpunktsystem.

Von J. Schröder in Hamburg.

In Bd. III S. 182 dieser Mitteilungen habe ich den Satz hergeleitet

$$\text{(I)} \qquad \sum_{0,1,2\ldots}^{\varrho} \psi_{r\nu+1}(n - r\varrho;\, \varrho) = \left[\frac{n+r-1}{r}\right],$$

wo erstens $\psi_\gamma(\alpha;\, \beta)$ die Anzahl aller Teiler von α bedeutet, die größer als β sind und zugleich einen Komplementarteiler von der Form γ besitzen, und wo zweitens $[a]$ das in a enthaltene größte Ganze darstellt.

Ist nun $n = \varepsilon r + \delta$, wo $0 \leqq \delta < r$ vorausgesetzt wird, so ergeben sich zunächst die δ Gleichungen:

$$\left[\frac{n-\lambda+r-1}{r}\right] = \left[\frac{r(\varepsilon+1)+\delta-1-\lambda}{r}\right] = \varepsilon + 1 \qquad (\lambda = 0, 1, 2, \ldots, \delta-1)$$

und ferner die $(r - \delta)$ Gleichungen:

$$\left[\frac{n-\lambda+r-1}{r}\right] = \left[\frac{\varepsilon r+r-1+\delta-\lambda}{r}\right] = \varepsilon \qquad (\lambda = \delta, \delta+1, \ldots, r-1).$$

Durch Addition aller r Gleichungen erhält man:

$$\sum_{0}^{r-1} \left[\frac{n-\lambda+r-1}{r}\right] = r\varepsilon + \delta = n.$$

Folglich besteht mit Rücksicht auf die Beziehung (I) die Gleichung:

$$\sum_{0}^{r-1} \sum_{0,1,2\ldots}^{\varrho} \psi_{r\nu+1}(n - \lambda - r\varrho;\, \varrho) = n.$$

Die linke Seite dieser Gleichung stellt aber gerade die Summe der Anzahlen aller zu Komplementarteilern von der Form $r\nu + 1$ gehörigen Teiler von $(n - \varrho)$ dar, die größer als $\left[\frac{\varrho}{r}\right]$ ausfallen, wenn ϱ alle möglichen positiven ganzzahligen Werte einschließlich Null annimmt. Demnach besteht der Satz:

$$\text{(II)} \qquad \sum_{0,1,2\ldots}^{\varrho} \psi_{r\nu+1}\left(n - \varrho;\ \left[\frac{\varrho}{r}\right]\right) = n.$$

---

1) E. Study, Sphärische Trigonometrie, orthogonale Substitutionen und elliptische Funktionen. 1893.

Dieses Ergebnis kann auch ohne Mühe auf geometrischem Wege aus der Figur des von Herrn Busche beschriebenen „Teilerpunktsystems" verifiziert werden.[1])

Die in Frage kommenden Teilerpunkte liegen in einem Dreieck, das von den Geraden: $(g_1) \ldots x = n$, $(g_2) \ldots y = x$ und $(g_3) \ldots x + yr = n$ gebildet wird. Hierbei kommen nicht in Betracht die auf g_3 gelegenen Teilerpunkte, und im übrigen sind nur zu berücksichtigen die auf den Strahlen $y = \frac{1}{r\nu + 1} \cdot x$ $(\nu = 0, 1, 2, \ldots)$ gelegenen Punkte. Da nun, wie ohne weiteres ersichtlich ist, auf jede der in das Dreieck fallenden Strecken der Geraden $y = k$ $(k = 1, 2, \ldots n)$ gerade immer je ein mitzuzählender Teilerpunkt fällt, so ist die Richtigkeit der Formel (II) bewiesen.

Auf analoge Weise kann gezeigt werden, daß, sofern $s \leqq r$ ist,

$$\text{(III)} \qquad \sum_{0,1,2,\ldots}^{\varrho} \psi_{r\nu+s}\left(n - \varrho;\ \left[\frac{\varrho}{r}\right]\right) = \left[\frac{n}{s}\right]$$

ist.

Hier kommen bei der Abzählung nur die auf den Strahlen $y = \frac{1}{r\nu + s} \cdot x$ $(\nu = 0, 1, 2, \ldots)$ gelegenen Punkte in Betracht, die ihrerseits indessen nur auf die Geraden $y = k$ $\left(k = 1, 2, \ldots \left[\frac{n}{s}\right]\right)$ fallen, und zwar trägt jede dieser Geraden, soweit sie in das betrachtete Dreieck fällt, nur je einen mitzuzählenden Teilerpunkt.

Aus der letzten Beziehung folgt durch Summierung:

$$\sum_{1}^{r} \sum_{0,1,2\ldots}^{\varrho} \psi_{r\nu+s}\left(n - \varrho;\ \left[\frac{\varrho}{r}\right]\right) = \sum_{1}^{r} \left[\frac{n}{s}\right].$$

Die linke Seite dieser Gleichung kann aber, da es jetzt auf die Natur der Komplementarteiler überhaupt nicht mehr ankommt, in der einfacheren Weise: $\sum_{0,1,2\ldots}^{\varrho} \psi\left(n - \varrho;\ \left[\frac{\varrho}{r}\right]\right)$ geschrieben werden, so daß die weitere Beziehung gewonnen wird:

$$\text{(IV)} \qquad \sum_{0,1,2\ldots}^{\varrho} \psi\left(n - \varrho;\ \left[\frac{\varrho}{r}\right]\right) = \sum_{1}^{r\varrho} \left[\frac{n}{\varrho}\right].$$

Auch diese Formel ergibt sich durch geometrische Überlegung sofort, wenn man untersucht, auf wie vielen der horizontalen Geraden $y = k$ $(k = 1, 2, 3, \ldots n)$ je r, $r - 1, \ldots 2, 1$ Teilerpunkte innerhalb

1) Journal für reine und angewandte Mathematik Bd. 103. Vgl. auch die Note d. Verf. in diesen Mitteilungen Bd. III S. 182 ff.; auf die dort benutzten Benennungen wird hier Bezug genommen.

des oben betrachteten Dreiecks liegen. Es zeigt sich, daß je r Teilerpunkte erstens auf den untersten $\left[\frac{n}{r+1}\right]$ Geraden, zweitens aber auch auf den folgenden $\left(\left[\frac{n}{r}\right]-\left[\frac{n}{r+1}\right]\right)$ Geraden liegen; dann folgen $\left(\left[\frac{n}{r-1}\right]-\left[\frac{n}{r}\right]\right)$ Geraden mit je $(r-1)$ Teilerpunkten, $\left(\left[\frac{n}{r-2}\right]-\left[\frac{n}{r-1}\right]\right)$ Geraden mit je $(r-2)$ Teilerpunkten usf., bis schließlich $\left(\left[\frac{n}{2}\right]-\left[\frac{n}{3}\right]\right)$ Geraden mit je 2 Teilerpunkten und $\left(\left[\frac{n}{1}\right]-\left[\frac{n}{2}\right]\right)$ Geraden mit je 1 Teilerpunkt auftreten. Durch Addition dieser Werte ergibt sich die rechte Seite der Relation (IV).

Die Summe $\sum_1^r \varrho\left[\frac{n}{\varrho}\right]$ kann jedoch noch anders gedeutet werden. Betrachtet man nämlich das von den Geraden $(g_1)\ldots y=x$, $(g_2)\ldots x=n$ und $(g_3)\ldots y=\frac{1}{r}x$ gebildete Dreieck, so erkennt man, daß mit Einschluß der Grenzstrahlen gewisse Strecken des Einstrahls, Zweistrahls usw. dieser Dreiecksfläche angehören. Auf jeder dieser Strecken liegt eine gewisse Anzahl von Teilerpunkten, deren Gesamtanzahl sich ohne weiteres in der Form $\left[\frac{n}{1}\right]+\left[\frac{n}{2}\right]+\cdots+\left[\frac{n}{r}\right]=\sum_1^r \varrho\left[\frac{n}{\varrho}\right]$ darstellt.

Die Gesamtheit der soeben ins Auge gefaßten Teilerpunkte wird andererseits umfaßt durch den Ausdruck $\sum_1^n \varrho\,\psi\left(\varrho;\left[\frac{\varrho}{r+1}\right]\right)$; folglich besteht der weitere Satz:

$$\text{(V)}\qquad \sum_{0,1,2\ldots}^{\varrho}\psi\left(n-\varrho;\left[\frac{\varrho}{r}\right]\right)=\sum_1^n \varrho\,\psi\left(\varrho;\left[\frac{\varrho}{r+1}\right]\right).$$

Die zuletzt angestellte Überlegung, die zu der Formel (V) führt, besagt, daß auf das von den Geraden $(g_1)\ldots y=x$, $(g_2)\ldots x=n$, $(g_3)\ldots y=\frac{1}{r}x$ begrenzte Dreieck $\triangle_1$ genau ebenso viele Teilerpunkte entfallen wie auf die Fläche des von den Geraden $(g_1)\ldots y=x$, $(g_2)\ldots x=n$ und $(g_3')\ldots y=-\frac{1}{r}(x-n)$ begrenzten Dreiecks $\triangle_2$, mit der Maßgabe, daß die auf g_3 liegenden Teilerpunkte mitgezählt werden, die auf g_3' liegenden dagegen nicht. Durch Fortlassung des von allen 4 Geraden umschlossenen Vierecks entsteht aus $\triangle_1$ das von g_1, g_2, g_3' begrenzte Dreieck δ_1, und aus $\triangle_2$ das von g_2, g_3, g_3' begrenzte Dreieck δ_2. Die Tatsache, daß diese beiden Dreiecke die gleiche Anzahl von Teilerpunkten aufweisen, falls man bei δ_1 die auf

g_3 und g_3' liegenden Punkte mitzählt, bei δ_2 dagegen nicht, wird ausgedrückt durch die Formel:

$$\text{(VI)}\quad \sum_{1,2,\ldots}^{\varrho} \psi\left(\varrho;\ >\left[\frac{\varrho-1}{r}\right],\ \leqq\left[\frac{n-\varrho}{r}\right]\right) = \sum_{0,1,2\ldots}^{\varrho} \psi\left(n-\varrho;\ >\left[\frac{\varrho}{r}\right],\ \leqq\left[\frac{n-\varrho-1}{r}\right]\right).$$

Darin verstehe ich unter $\psi(\alpha;\ >\beta,\ \leqq\gamma)$ die Anzahl aller Teiler τ von α, die der Bedingung genügen $\beta < \tau \leqq \gamma$.

Diese Relation möge an einem Zahlenbeispiel für $n = 12$ und $r = 3$ erläutert werden.

ϱ	$<\left[\frac{\varrho-1}{3}\right]$	$\leqq\left[\frac{12-\varrho}{3}\right]$	τ	$12-\varrho$	$>\left[\frac{\varrho}{3}\right]$	$\leqq\left[\frac{11-\varrho}{3}\right]$	τ
1	0	3	1	12	0	3	1; 2; 3
2	0	3	1; 2	11	0	3	1
3	0	3	1; 3	10	0	3	1; 2
4	1	2	2	9	1	2	—
5	1	2	—	8	1	2	2
6	1	2	2	7	1	2	—

Diese Tabelle zeigt, daß in den mit τ überschriebenen Kolumnen beide Male je 7 Teiler auftreten.

Bericht über das 220. Gesellschaftsjahr 1909/10.

(Zusammengestellt vom Adjunkten Dr. A. Schwaßmann.)

Versammlung am 13. Februar 1909.

Der Jahrverwalter gibt der Versammlung von dem am 16. Januar erfolgten Tode des langjährigen auswärtigen Mitgliedes der Gesellschaft Professor Dr. A. Sprung, des Vorstehers des Königl. Meteorologischen Instituts in Potsdam, Kenntnis und entwirft ein Bild des Lebensganges des Verstorbenen unter Würdigung seiner erfolgreichen wissenschaftlichen Tätigkeit und unter Hervorhebung der nahen Beziehungen, in denen der Verstorbene zurzeit seiner Hamburger Tätigkeit an der Deutschen Seewarte zur Mathematischen Gesellschaft gestanden hat. — Sodann teilt der Jahrverwalter der Versammlung mit, daß die Gesellschaft seit ihrer letzten Sitzung noch einen zweiten schmerzlichen Verlust durch das am 8. Februar erfolgte Ableben ihres Ehrenmitgliedes Sr. Magnifizenz des Bürgermeisters Dr. J. O. Stammann erlitten hat. Bei Schilder[redacted] Beziehungen, welche derselbe zu

der Gesellschaft unterhalten hat, weist der Jahrverwalter insbesondere auf die tatkräftige Unterstützung hin, die der Verstorbene im Jahre 1890 der Gesellschaft anläßlich ihres 200jährigen Bestehens hat angedeihen lassen. Die Versammlung ehrt das Andenken der beiden Dahingegangenen durch Erheben von den Sitzen.

Im geschäftlichen Teile wird Herr Dr. J. Hölling satzungsgemäß als ordentliches Mitglied in die Gesellschaft aufgenommen.

Im wissenschaftlichen Teile hält Herr Oberlehrer Dr. Thorade den angekündigten Vortrag über „die Einwirkung der Erdrotation auf die Meeresströmungen".

Hauptversammlung am 22. Februar 1909.

Der Jahrverwalter Herr Professor Dr. Edmund Hoppe erstattet den Jahresbericht über das 219. Gesellschaftsjahr. Die Gesellschaft besteht hiernach z. Z. aus 9 Ehrenmitgliedern, 17 auswärtigen und 86 einheimischen Mitgliedern. Im Anschluß an den Jahresbericht beglückwünscht der Jahrverwalter Herrn Oberlehrer Dr. P. Franck zu seiner Berufung nach Buenos-Aires als Instruktor der Lehramtskandidaten und spricht demselben den Dank der Gesellschaft aus für seine eifrige wissenschaftliche Mitarbeit und die vielfache Anregung, welche er der Gesellschaft insbesondere durch seine Vorträge hat zuteil werden lassen. Die statutenmäßig notwendigen Neuwahlen ergeben folgendes Resultat: Herr Professor Dr. F. Bolte, Direktor der Navigationsschule, wird zum Jahrverwalter, Herr Oberlehrer Dr. Berkhan zum Bibliothekar, Herr Professor H. Ahlborn zum Kassenrevisor gewählt. Der Vorstand für das 220. Gesellschaftsjahr 1909/1910 besteht hiernach aus den Herren Professor Dr. F. Bolte, Jahrverwalter, Dr. W. Büchel, Mitjahrverwalter, und Dr. A. Schwaßmann, Adjunkt.

Das Vermögen der Gesellschaft beträgt nach dem Kassenbericht des Mitjahrverwalter Herrn Dr. W. Büchel 974,13 M.

Im Anschluß an die Hauptversammlung findet das übliche Festessen im Hotel zum Kronprinzen statt.

Versammlung am 13. März 1909.

Auf Grund des von Herrn Professor H. Ahlborn erstatteten Kassenberichtes wird dem bisherigen Kassenführer Herrn Oberlehrer Dr. W. Büchel Entlastung erteilt.

Im wissenschaftlichen Teile hält Herr Ingenieur R. Hennig den angekündigten Vortrag, betitelt: Grundzüge und Erweiterungen der Graßmannschen Punkt- und Vektorenrechnung.

Versammlung am 17. April 1909.

Herr Professor Dr. L. Großmann, Abteilungsvorstand der Deutschen Seewarte, wird satzungsgemäß als ordentliches Mitglied in die Gesellschaft aufgenommen.

Im wissenschaftlichen Teile setzt Herr Ingenieur R. Hennig seinen in der letzten Sitzung begonnenen Vortrag über die Graßmannsche Punkt- und Vektorenrechnung fort.

Versammlung am 8. Mai 1909.

Der Mitjahrverwalter gibt der Versammlung von einem bei dem Vorstande eingegangenen Rundschreiben des Schweizer Komitees zur Herausgabe der gesamten Eulerschen Werke Kenntnis, in dem die Gesellschaft zur Unterstützung des Unternehmens, sei es durch Subskription auf die Gesamtausgabe der Eulerschen Werke, die 40 Bände im Preise von je 20 Mark umfassen soll, oder durch Zeichnung einer einmaligen Subvention aufgefordert wird. Nach Diskussion der Finanzlage der Gesellschaft wird der erste Weg für gangbar befunden, da sich in diesem Falle die Aufwendungen der Gesellschaft auf eine größere Anzahl von Jahren verteilen werden. Der Gegenstand wird auf die Tagesordnung der nächsten Sitzung gesetzt.

Im wissenschaftlichen Teile trägt Herr Professor Dr. Edmund Hoppe „über den Ursprung des Sexagesimalsystems“ vor.

Versammlung am 12. Juni 1909.

Der Jahrverwalter teilt der Versammlung mit, daß die Gesellschaft seit ihrer letzten Sitzung einen neuen schweren Verlust erlitten hat, indem ihr langjähriges Mitglied und Ehrenmitglied S. Exz. der Wirkl. Geheime Rat Professor Dr. Georg von Neumayer am 25. Mai im Alter von 83 Jahren in Neustadt in der Pfalz gestorben sei. Der Jahrverwalter entwickelt der Versammlung ein Bild des abwechslungsreichen Lebensganges des Dahingegangenen und seiner für die maritimen Interessen überaus segensreichen Tätigkeit und gedenkt insbesondere in warmen Worten der vielfachen Anregungen, die die Gesellschaft von dem Verstorbenen während seiner langjährigen Tätigkeit als Direktor der Deutschen Seewarte empfangen habe. Die Versammlung ehrt das Andenken des Dahingegangenen durch Erheben von den Sitzen.

Die Gesellschaft beschließt im Anschluß an die Erörterungen der letzten Sitzung, die von dem Schweizer Komitee geplante Herausgabe der gesamten Eulerschen Werke unter Würdigung der hohen wissenschaftlichen Bedeutung dieses Unternehmens durch Subskription auf

ein Exemplar der Gesamtausgabe zu unterstützen und das auf diese Weise erworbene Exemplar dem Archiv der Gesellschaft einzuverleiben.

Herr Professor Dr. Edmund Hoppe fordert die Gesellschaft auf, das Unternehmen des Deutschen Museums von Meisterwerken der Naturwissenschaften und Technik in München durch Erwerbung der Mitgliedschaft seitens der Gesellschaft zu fördern, und entwirft der Versammlung zur Erläuterung seines Vorschlages ein Bild der Ziele des neuen Museums, wobei er namentlich auf die besondere Beachtung hinweist, die gerade die mathematische Seite der einzelnen Gebiete der Naturwissenschaften in dem werdenden Museum bereits gefunden hat und auch in Zukunft finden soll. Da die Anregung die prinzipielle Zustimmung der Versammlung findet, wird beschlossen, die Angelegenheit auf die Tagesordnung der nächsten Sitzung zu setzen.

Im wissenschaftlichen Teile hält Herr Oberlehrer Dr. Jung den angekündigten Vortrag „über den kleinsten Kreis, der eine ebene Figur einschließt".

Versammlung am 11. September 1909.

Die Gesellschaft beschließt die Mitgliedschaft zum Deutschen Museum von Meisterwerken der Naturwissenschaften und Technik in München auf unbestimmte Zeit zu erwerben durch Zahlung eines jährlichen Beitrags von 30 Mark, zuerst für das laufende Jahr 1909 zahlbar. Die Mitgliedskarte soll auf den Namen des jeweiligen Jahrverwalters ausgestellt werden.

Die Herren Oberlehrer Dr. R. Zeltz und Dr. A. Caspar, beide an der Navigationsschule tätig, werden satzungsgemäß als ordentliche Mitglieder in die Gesellschaft aufgenommen.

Im wissenschaftlichen Teil hält Herr Oberlehrer Dr. H. Jansen den angekündigten Vortrag über „die Theorie der Flugmaschinen".

Versammlung am 16. Oktober 1909.

Herr Professor Dr. Stück, Abteilungsvorstand der Deutschen Seewarte, wird satzungsgemäß als ordentliches Mitglied in die Gesellschaft aufgenommen.

Im wissenschaftlichen Teile hält Herr Baumeister W. Schirlitz den angekündigten Vortrag: „Einführung in die Theorie und Berechnung der schiefen gewölbten Brücken".

Versammlung am 13. November 1909.

Der Jahrverwalter gibt der Versammlung von dem Tode des seit dem Jahre 1876 der Gesellschaft angehörenden Mitgliedes Professor

Dr. F. Schader, Oberlehrer am Wilhelm-Gymnasium, Kenntnis und gedenkt des Verstorbenen in warmen Worten. Die Versammlung ehrt das Andenken des Dahingegangenen durch Erheben von den Sitzen.

Herr Baumeister J. Brüggmann wird satzungsgemäß als ordentliches Mitglied in die Gesellschaft aufgenommen.

Im wissenschaftlichen Teile hält Herr Oberlehrer Dr. P. Hass den angekündigten Vortrag „über die Verwendung des Schwerpunktes zur elementaren Berechnung der Ludolfschen Zahl".

Versammlung am 11. Dezember 1909.

Die Herren Dr. F. Dolberg, Observator der Sternwarte, Dr. A. Kohlschütter und Dr. F. Goos, wissenschaftliche Hilfsarbeiter der Sternwarte, und Oberlehrer Dr. H. Bresslau werden satzungsgemäß als ordentliche Mitglieder in die Gesellschaft aufgenommen.

Im wissenschaftlichen Teile trägt Herr Oberlehrer Dr. W. Büchel über „F. Kleins Elementarmathematik vom höheren Standpunkt" vor.

Herr Observator Dr. A. Schwaßmann referiert über eine neue Art von Nivellierinstrumenten der optischen Werkstätte von Carl Zeiß.

Versammlung am 8. Januar 1910.

Herr Oberlehrer Dr. Berkhan hält den angekündigten Vortrag: „Verschiedene Kleinigkeiten aus dem mathematischen Unterrichte".

Die Bibliothek der Gesellschaft verdankt folgenden Herren wertvolle Zusendungen, wofür sie auch an dieser Stelle den verehrten Herren Verfassern den besten Dank ausspricht:

Ahrens, Bartenstein, Bepler, Beyer, Bigelow, Birck, Breßlau, Bubendey, Güntzel, Haton de la Goupillière, Hoppe, Jansen, Krech, Lecomte, Meyer (Carl), Oppenheimer, Pacher, Pistor, Repsold, Rudio, Sampachi Fukuzawa, Schilling, Schröder, Schröter, Schwering, Tams, Teixera, Thaer, Thorade, Winkelmann.

Außerdem steht die Gesellschaft in Schriftenaustausch mit zahlreichen deutschen und ausländischen Gesellschaften.

Die Adresse der Gesellschaft ist:

Mathematische Gesellschaft, Hamburg,
Patriotisches Gebäude.

MITTEILUNGEN
DER MATHEMATISCHEN GESELLSCHAF
IN HAMBURG.

BAND IV, HEFT 10.

AUSGEGEBEN IM FEBRUAR 1910.

Redigiert von **Bolte, Büchel** und **Umlauf.**

DRUCK VON B. G. TEUBNER IN LEIPZIG.

1910.

Inhalt.

Seite

1. Beweis, dafs die unendliche Reihe $\sum_{n=1}^{n=\infty} \binom{P}{n} \frac{1}{n}$ einen positiven von Null verschiedenen Wert hat. Von *H. Tietze* 1
2. Transformation der Kirchhoff'schen Gleichungen und Integration derselben für Kreiscylinderkoordinaten. Von *P. Jaerisch* in Hamburg 11
3. Über die Funktion $\gamma(x)$ für ganzzahliges Argument Abundanzen. Von *Hans Maurer* 33
4. Die Anzahl von Punkten, Geraden, Ebenen, u. s. w. in den linearen Räumen höherer Ordnung. Von *P. H. Schoute* in Groningen 50
5. Notiz zur Geschichte der Logarithmentafeln. Von *Edm. Hoppe* 52
6. Bericht über das Gesellschaftsjahr 1900/1901. Zusammengestellt vom Adjunkten Dr. *J. Schröder* 56

Inhalt.

		Seite
1.	Über eine identische Gleichung. Von *E. Busche* in Bergedorf	68
2.	Über Transformationsgruppen, deren sämtliche Untergruppen invariant sind. Von *W. Ahrens* in Magdeburg	72
3.	Zur Invariantentheorie. Von *O. Pund* in Altona	78
4.	Bericht über das Gesellschaftsjahr 1901/02. Zusammengestellt vom Adjunkten Dr. *F. Bolte*	90

Inhalt.

Seite

1. Gleichungen zwischen Bedingungen bei specieller Lage linearer Räume. Von *H. Schubert* in Hamburg 97
2. Bemerkungen über die algebraische Auflösung biquadratischer Gleichungen. Von *O. Pund* in Hamburg 111
3. Rotirende Kraftfelder. Von *Edmund Hoppe* 117
4. Bericht über das Gesellschaftsjahr 1902/03. Zusammengestellt vom Adjunkten Dr. *F. Bolte* 126
5. Mitgliederverzeichniss. Bestand der Mathematischen Gesellschaft in Hamburg am 1. Februar 1903. 128

Feb. 1904

Inhalt.

1. Zur Topologie der durch eine gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung und ersten Grades definierten Kurvenschar. Von *Wilhelm Böcher* in Hamburg 133
2. Über die normale Krümmung und die geodätische Torsion der Flächenkurven. Von *P. Frosch* 169
3. Berichtigung und Ergänzung meiner letzten Arbeit über rotierende Kraftfelder. Von *Edm. Hoppe* 173
4. Bericht über das Gesellschaftsjahr 1903/04. Zusammengestellt vom Adjunkten Dr. *F. Holtz* 175

Feb. 1905

Inhalt.

Seite

1. Über die imaginäre Berührungstransformation von Lie, welche gerade Linien in Kugeln überführt. Von *Paul Franck* in Hamburg 177
2. Über einen Satz der Kurventheorie. Von *G. Lony* in Hamburg 204
3. Über den Begriff des Geschlechts bei den quadratischen Formen. Von *O. Pund* in Hamburg 206
4. Bemerkung zur Berechnung des Anfangsgliedes der allgemeinen hyperelliptischen σ-Reihe. Von *J. Schröder* in Hamburg 210
5. Eine Relation zwischen größten Ganzen. Von *J. Schröder* in Hamburg 214
6. Bericht über das Gesellschaftsjahr 1904/05. Zusammengestellt vom Adjunkten Dr. *A. Schwaßmann* 218
7. Mitgliederverzeichnis. Bestand der Mathematischen Gesellschaft in Hamburg am 1. Januar 1905 220

Inhalt.

Seite

1. **Ein direkter Beweis** des Additionstheorems in der Lehre von den elliptischen Funktionen. Von *Hermann Tege* in Wilhelmshaven . . . 225
2. **Lösung einer Aufgabe** über Teileranzahlen. Von *E. Busche* in Hamburg 229
3. **Die Kant-Laplacesche Theorie** und die Gasgesetze. Von *Edmund Hoppe* in Hamburg 237
4. **Elementar-geometrische Herleitung** einer nichteuklidischen Längenmaßbestimmung. Von *Gustav Lony* in Hamburg 253
5. **Zur Berechnung** der Potenzsummen der Teiler von 1 bis n. Von *J. Schröder* in Hamburg 256
6. **Über eine Methode**, einen Wert für den Brechungsexponenten der die Sonne umgebenden Materie zu erhalten. Von *A. Schwaßmann* . . 258
7. **Integration** von $\int p(u)^n$, wo $p(u)$ die Weierstraßsche Funktion bedeutet. Von *A. Wetzler* in Harburg 270
8. **Bericht** über das Gesellschaftsjahr 1905/06. Zusammengestellt von: Adjunkten Dr. *A. Schwaßmann* . . . 273

Inhalt.

Seite

1. Konjugierte Projektivitäten und adjungierte Involutionen. Von *Rudolf Böger* in Hamburg 277
2. Über die Berechnung von sphärischen Dreiecken, in denen jede Seite und jeder Winkel einen rationalen Sinus und einen rationalen Kosinus besitzt. Von *H. Schubert* in Hamburg 288
3. Über einige merkwürdige zahlentheoretische Beziehungen zwischen der Verteilung gewisser Quadratzahlen und den Summenausdrücken, durch welche die Klassenzahl der binären quadratischen Formen mit negativer Determinante dargestellt wird. Von *Hermann Tiege* in Wilhelmshaven 304
4. Über die Konstitution der imprimitiven Körper sechsten Grades. Von *O. Pund* in Charlottenburg 314
5. Eine Bemerkung über Binomialkoeffizienten. Von *J. Schröder* in Hamburg 336
6. Bericht über das Gesellschaftsjahr 1906/07. Zusammengestellt von *Edmund Hoppe* in Hamburg 340
7. Mitgliederverzeichnis. Bestand der Mathematischen Gesellschaft in Hamburg am 1. Januar 1907 344

Inhalt.

Seite

1. Die physikalischen Bedeutungen der durch die Differentialgleichung $\frac{dy}{dx} = \frac{Y(xy)}{X(xy)}$ definierten Kurvenschar. Von *Wilhelm Büchel* in Hamburg 349
2. Über lineare Kongruenzen. Von *E. Busche* in Hamburg 355
3. Zur Theorie der Luftdruckschwankungen. Von *Paul Jaerisch* in Hamburg 380
4. Bericht über das 218. Gesellschaftsjahr 1907/8. Zusammengestellt vom Adjunkten Dr. *A. Schwaßmann* 398

Inhalt.

1. Eine geometrische Veranschaulichung des quadratischen Restcharakters. Von *E. Busche* . . . . . .
2. Abbildung der hyperbolischen Geometrie auf ein zweischaliges Hyperboloid. Von *Hans Jansen* . . . . . .
3. Bemerkung zur Bestimmung der nächsten ganzen Zahl im Gebiete der komplexen Zahlen $a + b\varrho$. Von *Gertrud Meißner* . . . . . .
4. Zur Fassung des Induktionsgesetzes. Von *H. Tege* in Wilhelmshaven.
5. Bericht über das 219. Gesellschaftsjahr 1908/1909. Zusammengestellt vom Adjunkten Dr. *A. Schwaßmann* . . . . . .
6. Mitgliederverzeichnis Bestand der Mathematischen Gesellschaft in Hamburg am 1. Januar 1909 . . . . . .

Inhalt.

Seit

1. Über Punktsysteme in der Ebene. Von *Heinrich W. E. Jung* in Hamburg 457
2. Über den sogenannten „casus ambiguus“ bei der Berechnung des schiefwinkligen sphärischen Dreiecks. Von *P. Riebesell* in Hamburg 461
3. Einige Betrachtungen im Teilerpunktsystem. Von *J. Schröder* in Hamburg 467
4. Bericht über das 220. Gesellschaftsjahr 1909/10. Zusammengestellt vom Adjunkten Dr. *A. Schwaßmann* 470

MATHEMATICS-STATISTICS
LIBRARY

510.6
M126
v.41
no.1

343445